数学要项定理公式证明辞典

〔日〕笹部贞市郎 编

四川教育出版社

数学要项
定理公式
证明辞典

〔日〕笹部贞市郎　编

高隆昌　王仕璠、
田景黄　罗朝杰　译

四 川 教 育 出 版 社
一九九零年·成都

封面设计：田 丰

数学要项定理公式证明辞典

〔日〕笹部贞市郎 编　　高隆昌 王世璠 田景黄 罗朝杰 译

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　攀枝花新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张34.5 插页 6 字数1184千
1990年2月第一版　　1990年2月第一次印刷
印数：1—585 册

ISBN7-5408-0038-X/G·39(精)　　定价：13.50元

译者的话

本书译自日本笹部贞市郎先生编著的《数学要项，定理公式证明辞典》（圣文社1980年第六次印刷本）。笹部先生曾编有《几何学辞典》、《代数学辞典》、《三角学辞典》等几部庞大的题解辞典（已有中译本）。他主编的这本《数学要项，定理公式证明辞典》囊括了初等数学及高等数学中基本概念，定理、公式的详细证明和解法。对现代数学好些分支（线性规划、对策论、拓扑、群论、图论、电子计算机原理等等）也作了概述。全书共十五章，内容编排由浅入深，由远及近，起点低终点高，能适应数学教育现代化的需要，本书兼有数学工具书和教学参考书的优点，适合我国中学数学教师，大学理工科、电大、职大、夜大师生、工程技术人员及自学数学的广大青年使用，前十四章也适合广大高中学生参阅。

需要指出的是，原著篇幅浩大，内容涉及数学的许多分支，参加编写者人数较多，故各章编写质量难说皆优，错误、遗漏和重复之处也在所难免，我们在翻译时，尽可能地作了相应的纠正、补全和删节，译文中不再一一注明，并在表达方式上尽量注意到我国读者的实际情况，便于我国读者使用。

本书译稿经敖硕昌教授、胡鹏教授、孙琦教授、蒋继光教授、胡师度教授、张石生教授、张庆达副教授、白苏华副教授、代正贵副教授以及曾坤论、毛正中等同志仔细审阅，提出了宝贵的修改意见，使本书出版质量得以提高，译者借此机会，谨向惠予大力协助的各位审稿者深表谢意。

限于译者水平，书中难免存在错误和缺点，我们唯恐它给读者带来麻烦，恳请各位同行和读者批评斧正，以使这部辞书译本更加完善。

1988年10月·成都

前　　言

在中学或中专的教科书里，对一些事情常常不得不这样说："已知下列定理(或性质)是成立的"。虽然一般说来没有必要或难于深查细究加以证明，但是有时对某些问题做一些更深入的介绍还是需要的，而且越是在高年级，这样的情况则越多。

譬如讲授到高次方程时，以前对数学不怎么感兴趣的学生，忽然关心起数学来了，兴趣倍增，劲头十足，这时若能向他们介绍卡尔丹公式和费拉里解法，就会看到他们目不转睛倾听的情形，这样看来，应当多从各种专著中把需要的资料摘录出来，经过加工整理后应用到课堂教学中去，可是实际上人们并没有那么多的时间去做那些应做的事情。

编写此书的目的正是为了解决这些困难，它可以帮助读者很容易地查找他所需的资料。本书按下列原则编写：

1. 全书虽不能成为一个体系，但尽量使其各章独立地自成体系。
2. 尽量多收集一些对指导教学有用的公式和定理的完整证明及典型解法。
3. 适当收集一些能唤起学生兴趣的历史故事，以及有助于加深理解的实例等内容。
4. 对于概率和统计等单凭课本则难以充分理解的内容，尽可能作深入浅出的介绍。
5. 用大量篇幅收集图形教材（纯几何学）及其应用例题，这对于目前已成为突出问题——缺乏形象思维能力——的学生，可起到指导作用。
6. 在大学入学试题中经常出现的近代数学的内容也编进了一些在本书里，以便用于课堂讲授或作简单介绍。
7. 对于以"自学为主的讨论会"形式出现的所谓"自学小组"来说，希望本书能成为一本恰当的参考书。

以能使读者"花钱少，收效好"为编写本书的目的，编写这样的书虽然困难重重，但值得欣慰的是我们敢于面向困难，终于完成了本书的编写工作，缺点和不足之处一定很多，望读者不吝赐教，以便在修订本书时使其更臻完善。

最后，对于在编写本书的过程中曾给予大力协助的几位老师，谨表深切的谢意！

编　者

1970年3月(昭和45年3月)

执笔者

元鸟取大学	教授	山本虎之子	(第1章)
高知大学	教授	野町幸男	(第2章)
大分大学	副教授	饭田正宣	(第3章)
元香川大学	教授	福冈力	(第4章)
岩手大学	教授	佐佐木盛男	(第5章)
福井大学	教授	铁井弘行	(第6章)
冈山大学	教授	北山毅	(第7章)
横浜市立大学	教授	内山守常	(第8章) (第13章)
神户大学	教授	金山隆	(第9章)
室兰工业大学	教授	吉田正夫	(第10章)
大分医科大学	教授	津田满	(第11章)
弘前大学	教授	真野健次	(第12章)
元神奈川县立多摩高校	校长	小出一郎	(第14章)
信州大学	教授	铃木良一	(第15章Ⅰ§1)
大分大学	教授	四川谷德正	(第15章Ⅰ§2)
东京理科大学	教授	松尾吉知	(第15章Ⅰ§3)
山形大学名誉教授		船山子之助	(第15章Ⅱ)
顺天堂大学名誉教授		南右内	(第15章Ⅲ)
横浜市立大学	教授	中森宽二	(第15章Ⅳ)
横浜市立大学	教授	栅木信吾	(第15章Ⅴ)
东京理科大学	副教授	浜田隆资	(第15章Ⅵ)

目　录

第三章 函数与图形

第四章 指数与对数

第五章 三角学

第六章 复数与向量

第九章　数列和级数

第十章　函数的极限和连续

第十一章　微分学

第十二章　积分学

第十三章 概率·统计

第十四章 初等几何学

第十五章　近世数学

Ⅰ　集合

Ⅱ　代数

Ⅲ　线性规划与对策论

第一章　数·式及其运算

§1. 整　　式

1·1 整式的四则运算(如未事先声明,字母限于实数范围内取值).

【公理】基本运算定律

	加法	乘法
交换律	$a+b=b+a$,	$ab=ba$,
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$,	$(ab)c=a(bc)$,
分配律	$a(b+c)=ab+ac$.	

【定义】1. 单项式·多项式·整式　由数和字母相乘而成的式子叫做单项式. 在单项式中，相乘字母的个数叫做此单项式的次数，字母以外的部分叫做系数。

几个单项式相加减而成的式子叫做多项式. 单项式和多项式统称整式. 组成整式的每一个单项式叫做这个整式的一项，各项中最高次项的次数叫做此整式的次数. 把整式的次数按由高(低)到低（高）顺序排列，叫做按降幂（升幂）排列.

例　把 $3x^3+2x-5+x^3+2x^2-x+3x^2$ 依降幂、升幂顺序整理时，有

降幂顺序　$4x^3+5x^2+x-5$,

升幂顺序　$-5+x+5x^2+4x^3$.

【定义】2. 合并同类项　在多项式中，除系数以外，字母部分相同的项，叫做同类项. 对同类项使用分配律，可以将它们归并为一项，这叫做合并同类项.

例　$3a^2b+2ab^2-2a^2b+ab^2=3a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2$

$$=(3-2)a^2b+(2+1)ab^2=a^2b+3ab^2.$$

【定义】3. 整式的加法. 减法　求整式的和，就是把它们的各项相加,如有同类项就合并. 为了求整式的差，可将减式反号后与被减式相加.

例　试求下列两式的和以及由第一式减第二式的差．

$5x^2+4x-3,\qquad -x^2-3x+5.$

解　$(5x^2+4x-3)+(-x^2-3x+5)$

$=(5-1)x^2+(4-3)x+(-3+5)$

$=4x^2+x+2.$

$$\begin{array}{r} 5x^2+4x-3 \\ +)\ -x^2-3x+5 \\ \hline 4x^2+\ x+2 \end{array}$$

$(5x^2+4x-3)-(-x^2-3x+5)$

$=(5x^2+4x-3)+(x^2+3x-5)$

$=(5+1)x^2+(4+3)x+(-3-5)$

$=6x^2+7x-8.$

$$\begin{array}{r} 5x^2+4x-3 \\ -)\ -x^2-3x+5 \\ \hline 6x^2+7x-8 \end{array}$$

【定义】4．整式的乘法

（i）单项式的乘法：用乘法的结合律、交换律、以及下列指数法则进行运算．

设 m、n 是正整数，则

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\qquad (a^m)^n=a^{mn},\qquad (ab)^n=a^nb^n.$$

例　$3a^2b(-2ab^3)=3\times(-2)a^{2+1}b^{1+3}=-6a^3b^4.$

（ii）单项式与多项式的积：是把单项式与多项式的各项相乘，再求和．

例　$2abc(3a-2b+4c)=2abc\cdot 3a-2abc\cdot 2b+2abc\cdot 4c$

$=6a^2bc-4ab^2c+8abc^2.$

（iii）多项式与多项式的积：是把一个多项式的各项乘以另一个多项式的各项，再求和．

例　$(a^2-2ab+b^2)(2a+b)=(a^2-2ab+b^2)\cdot 2a+(a^2-2ab+b^2)\cdot b$

$=2a^3-4a^2b+2ab^2+a^2b-2ab^2+b^3$

$=2a^3-3a^2b+b^3.$

（iv）几个单项式与多项式的积：是把这个积表示成一个多项式，叫做把**积展开**．展开整式的积时，可利用下列公式：

乘法公式

Ⅰ　$\begin{cases}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\\(a-b)^2=a^2-2ab+b^2;\end{cases}$

Ⅱ　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$

Ⅲ　$\begin{cases}(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab,\\(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd;\end{cases}$

Ⅳ　$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,\end{cases}$

V $\begin{cases}(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3; \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3;\end{cases}$

Ⅵ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

Ⅶ $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$.

例题 试展开下列各式：

(1) $(a+b+c)^2$;　(2) $(x-y+z)(x+y-z)$;

(3) $(x+3)(x-5)$;　(4) $(2x+3)(3x-5)$;

(5) $(3a-2b)^3$;　(6) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$;

(7) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

解 (1) $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$;　(利用Ⅰ)

(2) $(x-y+z)(x+y-z)=\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$

$=x^2-(y-z)^2=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-y^2+2yz-z^2$;　(利用Ⅱ，Ⅰ)

(3) $(x+3)(x-5)=x^2+(3-5)x+3(-5)=x^2-2x-15$;　(利用Ⅲ)

(4) $(2x+3)(3x-5)=2\cdot 3x^2+\{2(-5)+3.3\}x+3(-5)$

$=6x^2-x-15$;　(利用Ⅲ)

(5) $(3a-2b)^3=(3a)^3-3(3a)^2(2b)+3(3a)(2b)^2-(2b)^3$

$=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$;　(利用Ⅳ)

(6) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x^3+(2y)^3=x^3+8y^3$;　(利用Ⅴ)

(7) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=a^4+a^2b^2+b^4$.

(利用Ⅱ、Ⅰ)

【定义】5．整式的除法

(i) 单项式除单项式时，可用下列指数法则：

设 m、n 为正整数，$a\neq 0$，则

$$\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n}, & (m>n\text{ 时}) \\ 1, & (m=n\text{ 时}) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}. & (m<n\text{ 时})\end{cases}$$

例 $10a^4b^3\div(-2a^2b^4)=\dfrac{10a^4b^3}{-2a^2b^4}=-\dfrac{5a^{4-2}}{b^{4-3}}=-\dfrac{5a^2}{b}$.

(ii) 单项式除多项式，就是多项式的各项被单项式除后所得的商的和。

(iii) 用多项式除多项式时，先把多项式整理成某字母的降幂顺序，再象整数的除法那样进行运算。

例 $(x^3-2x-3)\div(x^2+2x-1)$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
x^2+2x-1 & x^3 \qquad -2x-3 \\
 & x^3+2x^2-x \\
\hline
 & -2x^2-x-3 \\
 & -2x^2-4x+2 \\
\hline
 & 3x-5
\end{array}
$$

答：商式 $x-2$，余式 $3x-5$.

【定义】6. 若用整式 B 除整式 A 时，商式是 Q，余式是 R，则

$$A=B\cdot Q+R \quad（R\text{ 是 0 或是比 }B\text{ 次数低的整式}）. \qquad ①$$

说明 若用 B 除 A，得到商式 Q 和余式 R，则

$$A\div B=Q\cdots\cdots R,$$

可用商式 Q 乘以除式 B 再加上余式 R 来验算此运算是否正确，如其结果等于被除式 A，则表明此除法是正确的。把所说的这种关系表示成数学式，就得到①式。又由 R 的性质，Q、R 唯一地确定。

例题 用 $(x+3)(x-5)$ 除整式 A，得到商式 Q 和余式 $x-3$，试求用 $(x+3)$ 除 A 时的余式。

解
$$
\begin{aligned}
A&=(x+3)(x-5)Q+x-3\\
&=(x+3)(x-5)Q+(x+3)-6\\
&=(x+3)\{(x-5)Q+1\}-6.
\end{aligned}
$$

答：余式 -6.

1·2 因式分解

【定义】7. 因式分解 把一个整式变形为两个或两个以上的整式的积的形式，叫做因式分解。在因式分解中，可原封不动地利用乘法的公式。

注意 因式分解多运用于分式的计算以及解方程式。

因式分解的公式

Ⅰ $ma+mb=m(a+b)$;

Ⅱ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

Ⅲ $\begin{cases}a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;\end{cases}$

Ⅳ $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$;

Ⅴ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$;

Ⅵ $\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2), \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2); \end{cases}$

Ⅶ $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2$;

Ⅷ $\begin{cases} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3, \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3; \end{cases}$

Ⅸ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

因式分解的顺序

(i) 当整式所有项有公因式时，先提取公因式；然后再把有公因式的部分项括在一起，进一步提取公因式.

(ii) 把整式按某字母的降幂顺序排列并利用公式。

例题1. 把下列各式分解因式：

(1) $8a^3b^2c-6ab^2c^3$;　　(2) $x(a+b)-y(a+b)$;

(3) $6a^3b-24ab^3$;　　(4) $9x^2-12xy+4y^2$;

(5) $x^2-3x-10$;　　(6) $3(a+b)^2+14(a+b)+8$;

(7) $6x^2-5xy-6y^2+x+5y+1$;　　(8) $1+x^3+y^3-3xy$.

解 (1) $8a^3b^2c-6ab^2c^3=2ab^2c(4a^2-3c^2)$;　　(利用Ⅰ)

(2) $x(a+b)-y(a+b)=(a+b)(x-y)$;　　(利用Ⅰ)

(3) $6a^3b-24ab^3=6ab(a^2-4b^2)=6ab[a^2-(2b)^2]$

$=6ab(a+2b)(a-2b)$;　　(利用Ⅰ，Ⅱ)

(4) $9x^2-12xy+4y^2=(3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2=(3x-2y)^2$;

(利用Ⅲ)

(5) $x^2-3x-10$,

运用公式Ⅳ. 若取 a, b 使 $a+b=-3$, $ab=-10$, 即取 $a=2$, $b=-5$,

则　$x^2-3x-10=x^2+(2-5)x+2(-5)=(x+2)(x-5)$;

(利用Ⅳ)

(6) 设 $a+b=X$, 则 $3(a+b)^2+14(a+b)+8=3X^2+14X+8$.

运用公式Ⅴ. $ac=3$, $bd=8$, $ad+bc=14$,

因而　$3X^2+14X+8$

$=(3X+2)(X+4)$

$=(3a+3b+2)(a+b+4)$　(利用Ⅴ)

(3)a ╳ b(2)→bc(2)

(1)c ╳ d(4)→ad(12)

$ac=3$　$bd=4$　$ad+bc=14$

(7) 将原式按 x 的降幂排列

$6x^2-5xy-6y^2+x+5y-1$

$=6x^2+(-5y+1)x-(6y^2-5y+1)$

$=6x^2+(-5y+1)x-(2y-1)(3y-1)$

2 ╳ $-3y+1$ → $-9y+3$

3 ╳ $2y-1$ → $4y-2$

6　$-(3y-1)(2y-1)$　$-5y+1$

$=(2x-3y+1)(3x+2y-1)$; (利用Ⅳ,Ⅴ)

(8) $1+x^3+y^3-3xy=1^3+x^3+y^3-3\cdot1\cdot xy$

$=(1+x+y)(1+x^2+y^2-xy-y-x)$. (利用Ⅸ)

例题2. 把下列各式分解因式:

(1) $4ab-4a^2-b^2+1$;

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$;

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$;

(4) $(x^2-6x+5)(x^2-2x-3)+12$;

(5) $x^4+3x^2y^2+4y^4$.

解 (1) $4ab-4a^2-b^2+1=1-(4a^2-4ab+b^2)$

$=1-(2a-b)^2=(1+2a-b)(1-2a+b)$;

(2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)$;

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$.

令 $x^2+5x=X$,则上式$=(X+4)(X+6)-24$

$=X^2+10X=X(X+10)$

$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$;

(4) $(x^2-6x+5)(x^2-2x-3)+12$

$=(x-1)(x-5)(x-3)(x+1)+12$

$=(x-1)(x-3)(x-5)(x+1)+12$

$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-5)+12$

令 $x^2-4x=X$,则上式$=(X+3)(X-5)+12=X^2-2X-3$

$=(X+1)(X-3)$

$=(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)$;

(5) $x^4+3x^2y^2+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-x^2y^2=(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$.

1·3 剩余定理·因式定理

1. 剩余定理

【定理】 1. 用 $x-a$ 除整式 $f(x)$ 时,余式 $R=f(a)$.

证明　假定用 $x-a$ 除整式 $f(x)$ 时，所得的商为 $Q(x)$，余式为 R，则

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R \qquad (R\text{ 是常数}),$$

由于这个等式是恒等式，故将 $x=a$ 代入时得　※

$$f(a)=(a-a)Q(a)+R \qquad \therefore \quad R=f(a).$$

□

注意　$f(a)$、$Q(a)$ 是 $f(x)$、$Q(x)$ 在 $x=a$ 处的值.

例题　试求用 $x+3$ 除 $f(x)=x^3+2x^2+6$ 时的余式.

解　$R=f(-3)=(-3)^3+2(-3)^2+6=-27+18+6=-3$.

2.　因式定理

【定理】　2. 整式 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除的充分必要条件是　$f(a)=0$.

证明　假如 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除，则 $R=f(a)=0$.

反之，假如 $R=f(a)=0$，则 $f(x)=(x-a)Q(x)$，即 $f(x)$ 可用 $x-a$ 整除.因而，$f(x)$ 可用 $x-a$ 整除的充分必要条件是　$f(a)=0$.　□

例题　1. 试确定常数 m 的值，使 $f(x)=x^3+mx-6$ 被 $x-3$ 整除.

解　$f(3)=27+3m-6=0$，$3m=-21$，　$\therefore \quad m=-7$.

例题　2. 把下列各式分解因式：

(1)　$x^4-x^3-3x^2+x+2$；　(2)　x^3+x^2+4；

(3)　$2x^3-3x^2-11x+6$；　(4)　$4x^3-5x+6$.

解　(1)　令　$f(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2$. 由于 $f(1)=0$，$f(-1)=0$，据因式定理，$f(x)$ 可被 $(x-1)$、$(x+1)$ 整除，且有

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-2)=(x-1)(x+1)(x+1)(x-2)$$
$$=(x-1)(x+1)^2(x-2);$$

(2)　令　$f(x)=x^3+x^2+4$，　$\because \quad f(-2)=0$，

$$\therefore \quad f(x)=(x+2)(x^2-x+2);$$

(3)　$f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$，　$\because \quad f(-2)=0$.

$$\therefore \quad f(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$$
$$=(x+2)(2x-1)(x-3);$$

(4)　$f(x)=4x^3-5x+6$，　$\because \quad f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$，

$$\therefore \quad f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)(4x^2-6x+4)$$
$$=(2x+3)(2x^2-3x+2).$$

※　符号"□"表示证毕，以后同.——译注

3. 综合除法　对于整式 $f(x)$，在计算 $x=\alpha$ 的值 $f(\alpha)$ 时，有下述的所谓综合除法：

假定用 $x-\alpha$ 除三次式 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 时所得的商是 $Q(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$，余式是R. 则 $b_0=a_0$，$b_1=a_1+\alpha b_0$，$b_2=a_2+\alpha b_1$，$R=a_3+\alpha b_2$.

计算格式：

$f(x)$ 的系数	a_0	a_1	a_2	a_3	$\lfloor\alpha$
		αb_0	αb_1	αb_2	
$Q(x)$ 的系数	$b_0(=a_0)$	b_1	b_2	R	

证明　$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=(x-\alpha)(b_0x^2+b_1x+b_2)+R$

$$=b_0x^3+(b_1-\alpha b_0)x^2+(b_2-\alpha b_1)x-\alpha b_2+R,$$

由于这是恒等式，因而可比较系数

x^3 的系数　$a_0=b_0$;　　∴ $b_0=a_0$;

x^2 的系数　$a_1=b_1-\alpha b_0$,　　$b_1=a_1+\alpha b_0$;

x 的系数　$a_2=b_2-\alpha b_1$,　　$b_2=a_2+\alpha b_1$.

常数项　$a_3=R-\alpha b_2$,　　$R=a_3+\alpha b_2$

□

例题　利用综合除法，求下列除法运算的商和余式：

$(4x^3-x^2-6x+3)\div(x-2)$

解

4	−1	−6	3	$\lfloor 2$
	8	14	16	
4	7	8	19	

∴ 商 $Q(x)=4x^2+7x+8$，余式 $R=19$.

1·4 恒等式·待定系数法

【定义】8. 恒等式　在表示计算法则和计算结果的等式中，若对其中的字母给予任意值时，等式都恒成立，则这样的等式叫做恒等式。

【定理】3. 若二次整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，对于 x 的相异的三个值 α、β、γ 都有 $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$，则 $a=b=c=0$.

证明　对于 $f(x)=ax^2+bx+c$，由题设有

$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c=0$,　①

$f(\beta)=a\beta^2+b\beta+c=0$,　②

$f(\gamma)=a\gamma^2+b\gamma+c=0$,　③

由①−②　$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$,

$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$,　　$\alpha\neq\beta$

∴ $a(\alpha+\beta)+b=0$.　④

同样，由②−③　$a(\beta+\gamma)+b=0$.　⑤

由④—⑤　$a(\alpha-\gamma)=0$,　$\alpha\neq\gamma$,　∴ $a=0$.

把它代入④时，$b=0$，代入①时，$c=0$.

从而 $a=b=c=0$，即 $f(x)=0$ 是恒等式．□

同理，对于至多 n 次的整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

若有 x 的 $n+1$ 个不同的值 α_1，α_2，…，α_n，α_{n+1} 使

$$f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\cdots=f(\alpha_n)=f(\alpha_{n+1})=0,$$

则 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$，也就是 $f(x)\equiv 0$.

另外，可以证明：若下列两个至多 n 次的整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

对于 x 的 $n+1$ 个不同的值，它们的值分别相等，则恒等式 $f(x)\equiv g(x)$ 成立．事实上，若设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)$ 是至多 n 次的整式而且对于 x 的 $n+1$ 个不同的值，都有 $h(x)=0$．因此，由上所述，$h(x)\equiv 0$，即

$$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})x+(a_n-b_n)\equiv 0,$$

∴ $a_0-b_0=a_1-b_1=\cdots=a_{n-1}-b_{n-1}=a_n-b_n=0$,

即 $a_0=b_0$,　$a_1=b_1$,　…,　$a_{n-1}=b_{n-1}$,　$a_n=b_n$.

从而 $f(x)$ 和 $g(x)$ 恒等．

【定义】9．待定系数法　利用恒等式的性质求未知系数的方法，叫做待定系数法．

例题1．试求 a,b,c,d 的值，使

$$a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d=x^3$$

恒成立．

解　将左端整理，并与右端的同次项的系数相比较，得

x^3的系数	$a=1$,		
x^2的系数	$-6a+b=0$,	∴ $b=6$.	
x的系数	$11a-3b+c=0$,	∴ $c=7$.	
常数项	$-6a+2b-c+d=0$,	∴ $d=1$.	

答 $\begin{cases}a=1,\\ b=6,\\ c=7,\\ d=1.\end{cases}$

另解　由于这是恒等式，所以在两端

令	$x=1$,	$d=1$.	
令	$x=2$,	$c+d=8$,	∴ $c=7$.
令	$x=3$,	$2b+2c+d=27$,	∴ $b=6$.
令	$x=0$,	$-6a+2b-c+d=0$,	∴ $a=1$.

答 $\begin{cases}a=1,\\ b=6,\\ c=7,\\ d=1.\end{cases}$

注意 第一种解法叫做**系数比较法**；第二种解法叫做**数值代入法**.

例题2. 试求出下列各□内适当的数字：

(1) $(x-2)(\square x-3)(3x+\square)=6x^3-5x^2+\square x+\square$；

(2) $x^3+x=(x-1)^3+\square(x-1)^2+\square(x-1)+\square$；

(3) $\dfrac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}=\dfrac{\square}{3x+2}+\dfrac{\square}{5x+3}$.

解 (1) 设$(x-2)(ax-3)(3x+b)=6x^3-5x^2+cx+d$，并比较$x$的同次项的系数，

x^3的系数 $3a=6$， $\therefore$ $a=2$.

x^2的系数 $ab-9-6a=-5$， $\therefore$ $b=8$.

x的系数 $-3b-2ab+18=c$， $\therefore$ $c=-38$.

常数项 $6b=d$， $\therefore$ $d=48$.

答 $(x-2)(2x-3)(3x+8)=6x^3-5x^2-38x+48$.

(2) 设 $x^3+x=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

令 $x=1$， $2=c$.

令 $x=2$， $10=a+b+c+1$.

令 $x=0$， $0=a-b+c-1$.

由此解得 $a=3$， $b=4$， $c=2$.

答 $x^3+x=(x-1)^3+3(x-1)^2+4(x-1)+2$.

(3) 设$\dfrac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}=\dfrac{a}{3x+2}+\dfrac{b}{5x+3}$，

去分母 $a(5x+3)+b(3x+2)=x+1$，

比较系数，有

x的系数 $5a+3b=1$，

常数项 $3a+2b=1$，

由此解得 $a=-1$， $b=2$.

答 $\dfrac{-1}{3x+2}+\dfrac{2}{5x+3}=\dfrac{x+1}{(3x+2)(5x+3)}$.

例题 3. 设用x^2+x+1除$2x^3+ax^2+bx+3$，所得余式是$x+7$，试求常数a,b.

解 令商为$(2x+p)$，则

$2x^3+ax^2+bx+3\equiv(x^2+x+1)(2x+p)+x+7$

比较系数，有

x^2的系数　$a=p+2$,

x 的系数　$b=p+3$,

常数项　　$3=p+7$,

由此解得　$a=-2$,　$b=-1$.

例题4. x、y 独立地取全部实数值时，等式

$$ax+by+c=a'x+b'y+c' \qquad ①$$

成立的充分必要条件是 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$.

证明　因为对于 x 的任意实数值，y 取无论什么样的实数值时等式①都成立，所以等式①是恒等式.因而，x、y 的系数及常数项分别相等，也就是 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$.

反之，假如 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，则对于无论什么样的 x、y 值，等式①恒成立.因而，$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$ 是满足题意的充分必要条件.　□

1·5　约数·倍数

【定义】10. 约数·倍数　整式 A 能被整式 B 整除时，亦即 $A=BQ$ (Q 是整式)时，B 叫做 A 的约数(式)，A 叫做 B 的倍数(式).

公约数(式)·**公倍数**(式)　两个或两个以上整式 $A, B, C, \cdots$ 的公共的约数(式)，叫做这些整式的公约数(式)(或公因子)；公共的倍数(式)叫做公倍数(式)。

最大公因子.最小公倍数(式)　公因子中次数最高的叫做最大公因子(G. C. D.)，公倍数(式)中次数最低的叫做最小公倍数(式)(L.C. M).

例题　试求下列各组数(或式)的最大公因子及最小公倍数(式).

(1)　12，18　　(2)　$x^2(2x+1)(x-2)^2$，　$x(2x+1)(x-3)$；

(3)　24，72，120.

解　(1)　$12=2^2\times3$.　$18=2\times3^2$,

G. C. D. $=2\times3=6$.

L. C. M. $=2^2\times3^2=36$.

(2)　$x^2(2x+1)(x-2)^2$，　$x(2x+1)(x-3)$,

G.C.D. $=x(2x+1)$.

L. C. M. $=x^2(2x+1)(x-2)^2(x-3)$.

(3)

2)	24	72	120
2)	12	36	60
2)	6	18	30
3)	3	9	15
	1	3	5

G.C.D. $=2^3\times3=24$.

$L.C.M.=2^3\times3^2\times5=360.$

【定义】11. 连除法(或辗转相除法) 求整式 A,B 的最大公因子时．先用B除 A，若能整除，则 B 是最大公因子．若不能整除，再用余式 R 除 B，这时若能整除，R 就是 A，B 的最大公因子．若不能整除，如前一样地，用此时的余式 S 除 R．反复这样作下去，直到整除，这时的除数便是 A，B 的最大公因子。

说明 假设用 B 除 A 的商为 Q，余式为 R，则

$$A=BQ+R, \quad ①$$

$$\therefore\quad R=A-BQ. \quad ②$$

假如 A 和 B 的公约数(式)是 D，则由②式知 D 是 R 的约数(式)．因而 A，B 的公约数(式)就是 B 和 R 的公约数(式)．

反之，由①式知，B 和 R 的公约数(式)是 A 的约数(式)，因而是 A,B 的公约数(式)．

从而，A,B 的最大公因子可以由 B，R 的最大公因子求得．同理，B，R 的最大公因子是用 R 除 B 的余式和 R 的最大公因子，如此一直进行到余式能整除当时的除数为止，该余式就是所求的最大公因子。

【定义】12* 设整式 A、B 的最大公因子是 G，最小公倍数（式）是 L，且用 G 除 A、B 的商分别是 a,b，则下列关系式成立：

$$L=abG=Ab=aB, \qquad LG=AB.$$

$$A=aG, \qquad B=bG, \qquad a,b \text{ 是互质的}.$$

证明 $L=abG=(aG)b=a(bG)=Ab=aB,$

$LG=(abG)G=(aG)(bG)=AB.$ □

例题1. 试求下列各组的 $G.C.D.$

(1) 966，1656；

(2) $x^3-5x^2+11x-15$，　x^3-x^2+3x+5.

解 (1)

```
          1
    966)1656
         966    1
        690)966
            690    2
           276)690
               552    2
              138)276
                  276
                    0
```

答：138.

* 其实，这是个定理，但原文如此．——译注

(2)

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & x^3-5x^2+11x-15\ \cdots(A) & x^3-\ x^2+3x+5\ \cdots(B) & x \\
 & x^3-\ x^2+\ 3x+\ 5 & x^3-2x^2+5x & \\
\hline
 & -4)\ -4x^2+\ 8x-20 & x^2-2x+5 & 1 \\
 & x^2-\ 2x+\ 5\ \cdots(C) & x^2-2x+5 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

答：x^2-2x+5.

说明　设用 (B) 除 (A) 得一余式，用 -4 除这个余式得 (C). 接着，用 (C) 整除 (B). 因而 (C) 是 (A)、(B) 的最大公因子.

例题2. 有两个整式，其最大公因子是 $2x+1$，最小公倍式是 $6x^3-7x^2-9x-2$. 试求这两个整式.

解　设两个整式为 A、B，则 $A=a(2x+1)$，$B=b(2x+1)$，a,b 互质.

$\therefore$　$L=ab(2x+1)=6x^3-7x^2-9x-2=(x-2)(3x+1)(2x+1)$,

$\therefore$　a,b 是 $(x-2),(3x+1)$ 或 $1,(x-2)(3x+1)$.

因而两个整式是　$(x-2)(2x+1)$，$(3x+1)(2x+1)$；

或　　　　$2x+1$，　$(3x+1)(x-2)(2x+1)$.

答：$\begin{cases}2x^2-3x-2,\\6x^2+5x+1\end{cases}$　或 $\begin{cases}2x+1,\\6x^3-7x^2-9x-2\end{cases}$

1·6　整数的性质·整数论

倍数的简单速算法

(1) 2(或5) 的倍数：假设某个数的个位数是 2 (或 5) 的倍数或 0，则这个数是 2 (或 5) 的倍数.

证明　设此数是 N，则 $N=10n+a$ (其中，n 是整数，a 是 0 到 9 之间的整数). 因为 $N=(2\times5)n+a$，所以当 a 是 2 (或 5) 的倍数或0时，N 就是 2 (或 5) 的倍数.　□

(2) 4 (或 25) 的倍数：假如某整数的最后两位数字是 4(或 25) 的倍数或 0，则此数是 4 (或 25) 的倍数.

证明　$N=100n+10a+b$ (其中，n 是整数，a，b 是 0 或 9 以下的整数). 因为可表示成 $N=(4\times25)n+10a+b$，所以可以和 (1) 同样地证明.　□

(3) 8 (或 125) 的倍数：假如某数的最后三位数是 8 (或 125) 的倍数或 0，则此数是 8 (或 125) 的倍数.

证明　由于这个数可表示成 $N=1000n+100a+10b+c=(8\times125)n+100a+10b+c$，故得证.　□

(4) 3（或 9）的倍数：如果各位数字的和是 3（或 9）的倍数，则此数是 3（或 9）的倍数。

证明 不妨设这个数是四位数，其各位数字为 a,b,c,d，则

$$N=1000a+100b+10c+d$$
$$=(999+1)a+(99+1)b+(9+1)c+d$$
$$=9(111a+11b+c)+a+b+c+d,$$

∴ 如果 $a+b+c+d$ 是 3（或 9）的倍数，则 N 就是 3（或 9）的倍数。 □

(5) 11的倍数：从某数的第一位数起，所有奇位数的数字的和减去偶位数的数字的和，若其差可被 11 除尽，则此数是 11 的倍数。

证明 $N=1000a+100b+10c+d$

$$=(990+11-1)a+(99+1)b+(11-1)c+d$$
$$=(11\text{的倍数})+\{b+d-(a+c)\},$$

∴ 如果 $(b+d)-(a+c)$ 是 11 的倍数．则 N 就是 11 的倍数． □

(6) 7(或 13) 的倍数：从某数的个位数起，把每三位数分为一组，依从右向左的顺序把奇序号各组之和减去偶序号各组之和，若所得的差是 7（或 13）的倍数，则此数也是 7（或 13）的倍数．

证明 把一个整数 N，从个位数起，按每三位分成一组．从开始的一组算起，设每组数依次为 A_0，A_1，$A_2\cdots$，A_{n-1}，A_n*，则

$$N=(10^3)^nA_n+(10^3)^{n-1}A_{n-1}+\cdots+(10^3)^2A_2+(10^3)A_1+A_0$$
$$=\{A_0-A_1+A_2-\cdots+(-1)^nA_n\}$$
$$+[(10^3-(-1))A_1+((10^3)^2-(-1)^2)A_2+\cdots+((10^3)^n-(-1)^n)A_n].$$

因 $(10^3)^n-(-1)^n=[10^3-(-1)][(10^3)^{n-1}-(10^3)^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}]=1001\times\text{整数}=7\times11\times13\times\text{整数}(n=1,2,\cdots n)$，故

$$N=(A_0-A_1+A_2-\cdots+(-1)^nA_n)+7\times11\times13\times\text{整数}$$

∴ 如果 $(A_0+A_2+A_4+\cdots)-(A_1+A_3+A_5+\cdots)$ 是 7（或13）的倍数，则 N 也是7（或 13）的倍数。 □

例题 找出 1001 的约数．

解 从第一位开始，奇位数的数字1，0 之和是 1，偶位数的数字0，1之和是 1，其差为零，故由(5)知，1001 是 11 的倍数。又由(6)，把 1001 按三位分成一组，$A_0=001$，$A_1=1$．$A_0-A_1=001-1=0$ 为 7 和13的倍数。故 1001 也是 7 和 13 的倍数。

---

* 按理，应为 A_1，A_2，A_3，…，A_n，A_{n+1}——译注

∴　$1001=11\times7\times13$.

【定理】4. 假如 a 是一个整数，则任何一个整数 N 可用下列各数中的某一个表示.其中 m 为某一整数.

$$am, am+1, am+2, \cdots, am+a-1.$$

证明　设用 a 除任意整数 N，所得的商是 m，余数是 R，则

$N=am+R$　(R 是 $0,1,2\cdots,a-1$ 中的某一个数).

∴　N 是 $am, am+1, am+2, \cdots, am+a-1$ 中的一个数.也就是说，任何一个整数都可用 $am, am+1, am+2, \cdots, am+a-1$ 中的某一个表示.□

例题　试证明任何整数的平方都具有 $3m$ 或 $3m+1$ 的形式.

解　一切整数可用 $3m, 3m+1, 3m+2$（m 取全部整数）表示.

$$(3m)^2=9m^2=3\cdot3m^2,$$
$$(3m+1)^2=9m^2+6m+1=3(3m^2+2m)+1,$$
$$(3m+2)^2=9m^2+12m+4=3(3m^2+4m+1)+1.$$

因而一切整数的平方具有 $3m$ 或 $3m+1$ 形式.　□

【定义】13. 弃九法　任何整数都可表成 $9m+n$（n是从 0 到 8 的整数）的形式.又因为每一整数都是（9 的倍数）+（它的各位数字的和），所以 $9m+n$ 中的 n 等于该整数各数字的和除 9 后的余数. 利用这点可以检查四则运算的答案是否错误.

例　对于 $8239\times5266=43386574$,

左端　由 8239,　$8+2+3+9=22=2\times9+4$
　　　由 5266,　$5+2+6+6=19=2\times9+1$
　　　　　　　　} $4\times1=4\cdots4$.

右端　由 43386574,　$4+3+3+8+6+5+7+4=40=4\times9+4\cdots4$.

也就是说，设两个整数分别为 A, B, 则

$$A=M(9)+4,\quad B=M(9)+1,\ (M(9)\text{表示 9 的倍数})$$

∴　$A\cdot B=M(9)+4$.

因为算得的积是 $M(9)+4$,所以这个计算可能是正确的.

注意　上述方法叫做弃九法. 这是因为在求一个数的各位数字的和时，可以去 9 而只求零头.由于计算结果有可能恰好差错 9 的倍数，故此验算法不能保证其结果一定正确* .

【定义】14. 质数.非质数　一个数，如果除 1 和它自身以外没有别的约数，这个数就叫做质数(或素数)，不是质数的数叫做非质数（或合数）

例　2, 3　5, …, 13, …, 19, …是质数.

※　例如，$18534\times247\neq36131988$,但由弃九法算出两边的余数都是 3——译注

4,6,8,…,14,…是非质数.

质数的求法 关于判断某个数是不是质数的方法，自古以来不少学者积累了许多研究结果，但还没有发现一般的方法．从十九世纪到本世纪，高斯、勒让德、狄利克莱、黎曼、契贝谢夫等专家作了大量的研究，但都没有取得值得一提的成果.在今天，有了以爱拉托斯散筛法为基础作出的质数表.其中，最有名的是由美国的勒姆(Lehmer)编制的从1到10,006,721的质数表.

1．爱拉托斯散筛法 首先考察从2开始直到所要讨论的整数N为止的一切整数，并把它们依次写出来.把质数2留下，而划去它后面每隔一个数的数4，6，8…；其次，把质数3留下，而划去它后面每隔两个数的数6,9,12,…；再其次，把质数5留下，划去每隔四个数的数10,15,20,…；进一步，留下质数7，划去每隔六个数的数；依次继续下去，直到最后*，于是留下的数都是质数．这就是所谓的爱拉托斯散筛法，它好象是用筛子从整数中把质数筛出来一样，是古希腊时代（公元前三百年左右）爱拉托斯散发明的.例如，从1到100的整数范围内的质数共有25个，如下表所示。

2,3,~~4~~,5,~~6~~,7,~~8~~,~~9~~,~~10~~,11,~~12~~,13,~~14~~,~~15~~,~~16~~,17,~~18~~,19,~~20~~,~~21~~,~~22~~,23,~~24~~,~~25~~,~~26~~,~~27~~,~~28~~,29,~~30~~,31,~~32~~,~~33~~,~~34~~,~~35~~,~~36~~,37,~~38~~,~~39~~,~~40~~,41,~~42~~,43,~~44~~,~~45~~,~~46~~,47,~~48~~,~~49~~,~~50~~,~~51~~,~~52~~,53,~~54~~,~~55~~,~~56~~,~~57~~,~~58~~,59,~~60~~,61,~~62~~,~~63~~,~~64~~,~~65~~,~~66~~,67,~~68~~,~~69~~,~~70~~,71,~~72~~,73,~~74~~,~~75~~,~~76~~,~~77~~,~~78~~,79,~~80~~,~~81~~,~~82~~,83,~~84~~,~~85~~,~~86~~,~~87~~,~~88~~,89,~~90~~,~~91~~,~~92~~,~~93~~,~~94~~,~~95~~,~~96~~,97,~~98~~,~~99~~,~~100~~

2．质数判别法 如果自然数N不能被不超过$\sqrt{N}$的所有质数整除，则N是质数.

证明 证明较难，从略. □

例题 223是不是质数？

解 $\sqrt{223}=14.\cdots$，用比14小的质数2,3,5,7，11，13依次除它，结果任何一个都除不尽，因而223是质数.

【定理】5．设两个数A,B互质，且它们的积AB可被数C除尽．如果A,B中的一个数与C互质，则另一个数必被C除尽.

证明 略.

记数法

(1) **十进制** 是通常使用的记数制.如

※ 其实只须进行到不大于$\sqrt{N}$的最大整数即可，见下面质数判别法——译注

$$352=3\times100+5\times10+2.$$

一般地，设 n 是正整数时，自然数 N 可按照以 10 为底的十进制表示如下：

$$N=a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\cdots+a_2 10^2+a_1 10^1+a_0$$
$$(1\leqslant a_{n-1}\leqslant 9,\ 0\leqslant a_0,a_1,\cdots a_{n-2}\leqslant 9).$$

(2) 三进制，五进制

所谓三进制，是逢三进一的记数制.1,2 不变，但 3 上升一位变为 10. 4 是 3+1,因此变为 11,5 变为 12，6 变为 20，12 是 3 的 4 倍，即 3 倍加 1 倍，因此变为 110.

例题1. 把十进制中的 25、429 分别用三进制、五进制表示.

解

```
3) 25                5) 429
 3) 8  …1             5) 85  …4
    2  …2             5) 17  …0
                          3  …2

   答 221.               答 3204.
```

例题2. 把五进制的 4023 用十进制表示.

解

```
      4   0   2    3
 5)      20  100  510      答 513.
 ----------------------
      4  20  102  513
```

说明 从高位起依次乘 5 再加下一位的数，一直进行到最低位.

(3) 二进制 在二进制中，数字用 0 和 1 表示，1 不变，2 是 10,3 是 2+1，因此表示成 11，4 是 2 的 2 倍，故为 20，因此变为 100，5 是 2^2+1,故表示成 101，6 是 2^2+2，故表示成 110，7 是 2^2+2+1，故变为 111，8 是 2^3，故表示成 1000,….

例题 在某记数制中，有下列计算。试说明它们各是哪种进位制的计算：

(1) $245\times5=1624$;

(2) 1155 能用 12 除尽.

解 (1) 设为 x 进位制，则由个位数的关系 $5\times5=ax+4$，$\therefore\ ax=21=3\times7$，由原式 $x>6$，因而 $x=7$.　　答：七进制.

(2) 设为 x 进位制，则 $1155=x^3+x^2+5x+5=p(x)$，$12=x+2$. 因为 $p(x)$ 能用 $x+2$ 除尽，所以 $p(-2)=0$，而 $p(-2)=-8+4-10+5=-9$，它变为 0 时是三进制或九进制，但由原式 $x>5$，因而 $x=9$.

答：九进制.

§2. 分　　式

2·1 约分·通分

【定义】1. 分式 分母中含有字母的式子，叫做分式.

分式的基本性质：分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于0的整式，分式的值不变. 在关于分式的问题中，分母一般不为0.

约分 根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分. 不能再约分的分式（即分子、分母互质的分式）叫做**既约分式.**

通分 把异分母的分式化成和原来的各分式分别相等的同分母的分式，叫做分式的通分. 为了通分，可以把各分式的分母的最小公倍式作为它们的公共分母.

2·2 分式的四则运算

【定义】2. 加法·减法 对于同分母的各分式，把它们的分母作分母，把各分子的代数和作分子. 例如

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}-\frac{D}{C}=\frac{A+B-D}{C}.$$

对于异分母的分式，先通分变为同分母的分式，然后再加减.

乘法·除法 分式的积是把各分式的分母的积作分母，分子的积作分子而得到的分式. 用分式去除，相当于用这个分式的倒数去乘. 即

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

2·3 繁分式

【定义】3. 繁分式 分式的分母或分子（或两者）中含有分式，这样的分式叫做繁分式.

例题 试简化下列式子：

(1) $P=\dfrac{1+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a-b}{a+b}}$；　(2) $Q=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}$.

解　(1) 分子、分母同乘以$(a+b)$，得

$$P=\frac{a+b+(a-b)}{a+b-(a-b)}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b};$$

(2) $$Q=1-\frac{1}{\dfrac{-a}{1-a}}=1+\frac{1-a}{a}=\frac{1}{a}.$$

2·4　比 例 式

【定理】　(1)　若$a:b=c:d$，则

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\qquad ad=bc.$$

(2)　若$ad=bc$，则$a:b=c:d$，$b:a=d:c$，$a:c=b:d$，$c:a=d:b$.

(3)　若$a:b=c:d$，则

(i)　$a\pm c:b\pm d=a:b=c:d$　（合比定理）

(ii)　$a-b:c-d=b:d$　（分比定理）

(iii)　$a+b:a-b=c+d:c-d$　（合分比定理）

(4) **连比**　若$a:b=b:c$，则称a,b,c成连比.若$a:b=b:c=c:d$，则称a,b,c,d成连比.

(5) **比例中项**　当$a:b=b:c$时，称b是a,c的比例中项.

(6) 若$a:b=b:c$，则$b^2=ac$，$b=\pm\sqrt{ac}$.

(7) $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$，则

$$k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\qquad（加比定理）.$$

例题1. 若$a:b:c=x:y:z$，试证明

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

解　根据假设　$a:b=x:y$，$b:c=y:z$，

$\therefore\ \frac{a}{x}=\frac{b}{y},\quad \frac{b}{y}=\frac{c}{z},\quad$ 从而 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$

令 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$, 则 $a=kx,\quad b=ky,\quad c=kz,$

$$\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{kx+ky+kz}{x+y+z}=\frac{k(x+y+z)}{x+y+z}=k.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

例题2. 试求 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$ 时分式的值.

解 令 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=k$, 则 $x=k(y+z)$, $y=k(z+x)$, $z=k(x+y)$. 把各式两端相加，得

$$x+y+z=2k(x+y+z),\quad \therefore\quad (x+y+z)(1-2k)=0,$$

从而，$x+y+z=0$ 或 $1-2k=0$. $\therefore\quad x+y=-z.$

把它代入 $\frac{z}{x+y}$，则 $\frac{z}{x+y}=\frac{z}{-z}=-1$，由 $1-2k=0$，得 $k=\frac{1}{2}$.

§3. 无理数·无理式

3·1 平方根·不尽根数

【定义】1. 平方根 一个数的平方为 a，则这个数叫做 a 的平方根.

正数 a 的平方根有两个值，其绝对值相等，符号相反. 用 $\sqrt{a}$ 表示正平方根，用 $-\sqrt{a}$ 表示负平方根.

正数 a 的平方根是 $\pm\sqrt{a}$，这是因为 $(\pm\sqrt{a})^2=a$. 符号 $\pm$ 叫做复号.

例 25的平方根是 ±5，$\sqrt{25}=5$.

【定义】2. 无限小数.有限小数 在计算 $\sqrt{2}$ 时，得到1.4142…这样一个无限继续的小数.这样的小数叫做无限小数.不是无限继续的小数叫做有限小数.

有限小数可以写成分数，例如

$$2.325=\frac{2325}{1000}=\frac{93}{40}.$$

无限小数中，有一种几个数字无限重复的小数（叫做**循环小数**），例如 0.345345345…（缩写成$0.\dot{3}4\dot{5}$），它也可写成分数

$$0.\dot{3}4\dot{5}=\frac{345}{999}=\frac{115}{333}.\text{又如，}0.2\dot{5}\dot{3}=\frac{253-2}{990}=\frac{251}{990}.$$

反之，分子、分母是整数的分数，在改写为小数时，成为有限小数或循环小数。

$$\frac{3}{4}=0.75,\ \frac{5}{7}=0.714285714285\cdots=0.\dot{7}1428\dot{5}.$$

再看看分数$\frac{m}{n}$（m,n是正整数）。

为了改写为小数，在作$m\div n$时，由于除数是n，因此各次的余数是0或从1到$n-1$的整数。

当余数是0时，$m\div n$除尽，故$\frac{m}{n}$变为有限小数。

当余数不是0时，至多除到第n次出现原来出现过的余数，这以后的除法是重复的，故$\frac{m}{n}$组成循环小数。

【定义】3. 无理数·不尽根数 用有限小数和无限小数所表示的数，一般叫做实数.实数中不是有理数（整数、分数）的数，叫做无理数.

$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$是无理数，其证明包含在下述一般的证明中.

一般地，对于正整数a，若$\sqrt{a}$是有理数，则满足$x^2=a$的正数x必是整数或分数.

(1) $x=m$（m是整数）时，$a=m^2$，即a是完全平方数，$\sqrt{a}=m$.

(2) $x=\frac{m}{n}$（m,n是互质整数，且$n\neq1$）时，$x^2=\frac{m^2}{n^2}$（$n\neq1$），但因右端是既约分数，故不等于整数a. 从而，$\sqrt{a}$不是分数.

比较(1)和(2)，只要a不是完全平方数，$\sqrt{a}$都是无理数.这样的无理数叫做不尽根数.

此外，在无理数中，还有象下面这样的一些数：

圆周率	$\pi=3.14159265\cdots$
对数	$\lg 2=0.30103\cdots$
自然对数的底	$e=2.718281\cdots$

3·2 开方法

【定义】4. 开方法 求正数 a 的平方根，叫做把 a 开平方。

当 $0<a<100$ 时， $0<\sqrt{a}<10$，

当 $100<a<10000$ 时，$10<\sqrt{a}<100$.

假如 a 是两位以内的数，则其平方根的整数部分是一位；假如 a 是三位或四位数，则其平方根的整数部分是两位.以下同样地，当 a 每增加两位时，其平方根的整数部分就增加一位.因而，假如从 a 的个位向左算起，每隔两位划分为一个节（用“′”分开），则划分出的节数就是平方根的位数.

对于$\sqrt{3136}$，由前所述，3136可分为两节：31′36，故$\sqrt{3136}$是二位数.而且，由于 $50^2<3136<60^2$，所以 $50<\sqrt{3136}<60$，即$\sqrt{3136}$的十位数是5.假设其个位数是 x，则$50+x\leqslant\sqrt{3136}$.

$\therefore\quad (50+x)^2\leqslant 3136,\qquad 50^2+100x+x^2\leqslant 3136,$

$(100+x)x\leqslant 636,$

由此 $100\cdot x\leqslant 636$， 故 $x\leqslant 6$.

又 $56^2=3136$， 故 $\sqrt{3136}=56$.

实际上，开方可按下列方式计算.

例题1. 试求$\sqrt{3136}$ 及 $\sqrt{772.84}$.

解

```
                5  6                          2  7.8
   5          √31′36              2         √7′72.84′
   5           25                 2          4
 ----        -------            ----       ---------
 106            6 36             47          372
   6            6 36              7          329
             -------            ----       ---------
                   0             548          4384
                                   8          4384
                                           ---------
                                                 0
```

答：56。 答：27.8 。

讨论 开立方法 为了求某数的立方根，可根据公式

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=x^3+(3x^2+3xy+y^2)y,$$

且按下述方式计算。

例题2， 试求 $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ 及 12167 的立方根，

解

$3x+y$	$3x^2$	$\overline{x\quad+\quad y}$
		$)x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
		x^3
y	$3xy+y^2$	$3x^2y+3xy^2+y^3$
	$3x^2+3xy+y^2$	$3x^2y+3xy^2+y^3$
		0

答：$x+y$.

		$\overline{2\quad 3}$
63	1200	$)12'167$
3	189	8
	1389	4 167
		4 167
		0

答：23.

3·3　无理数的计算

【公式】 Ⅰ　$a>0$，$b>0$ 时，

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ⅱ　$k>0$，$a>0$时，$k\sqrt{a}=\sqrt{k^2a}$.

证明　Ⅰ　$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$，由$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}>0$ 可知，$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是 ab 的正平方根，

$\therefore\quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.　□

公式Ⅱ的证明从略.

例题1. 化简下列各式：

(1) $2\sqrt{18}-\sqrt{72}$；　(2) $\sqrt{0.16}$；

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$.

解　(1) $2\sqrt{18}-\sqrt{72}=2\sqrt{2\cdot3^2}-\sqrt{2^3\cdot3^2}=6\sqrt{2}-6\sqrt{2}=0$；

(2) $\sqrt{0.16}=\sqrt{\frac{16}{100}}=\sqrt{\frac{4^2}{10^2}}=\frac{4}{10}=0.4$；

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$.

例题2. 利用平方根表，求下列各式的值.

(1) $2\sqrt{5}$；　(2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

解　(1)　$2\sqrt{5}=\sqrt{20}\approx4.4721$；

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{6}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\approx\dfrac{2.4495}{2}\approx1.2248$。

注意　也可按

$$2\sqrt{5}\approx2\times2.2361,\qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\approx\frac{1.732}{1.4142}$$

求值，但上述(1)，(2)的解法更容易计算，并可得到较准确的值。

例题3．化简下式，并求出它的值到小数点后第四位：

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$$

解　$\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{5-2\sqrt{15}+3}{5-3}$

$=\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}=4-3.8730=0.1270$．

【定义】5．分母有理化　如例题3所示，将分母中包含无理数的式子变形使分母变成只含有理数的式子，叫做分母的有理化．

【定义】6．双重根式　象$\sqrt{p+2\sqrt{q}}$那样在根号内又含有根号的式子，叫做双重根式．

把双重根式$\sqrt{p+2\sqrt{q}}$变换为$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ $(a>b>0)$，叫做去双重根号，其过程按下列方式进行．

当$a>0$，$b>0$时，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$，

$\therefore\ \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$．

又　$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$，$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}>0$，

故当$a>b$时，有

$$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}.$$

例题　试去掉下列各式的双重根号并化简．

(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$；　　(2)　$\sqrt{4+\sqrt{15}}$；

(3)　$\sqrt{6-3\sqrt{3}}$．

解　(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$，这里$a+b=7$，$ab=12$，$a=4$，$b=3$．

$\therefore\ \sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$；

(2) $\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{2}}=\frac{\sqrt{5+3+2\sqrt{5\times3}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2};$$

(3) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}=\sqrt{6-\sqrt{27}}=\sqrt{\frac{12-2\sqrt{27}}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{9+3-2\sqrt{9\times3}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}.$$

3·4 无理式的计算

【定义】7. 无理式 在根号中含有字母的式子叫做无理式.

例题1. 试化简 $\sqrt{4a^2b^3}$, $\sqrt{(a-b)^2}$ $(a>0, b>0)$.

解 $\sqrt{4a^2b^3}=2ab\sqrt{b}$,

若 $a>b$, 则 $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$.

若 $a<b$, 则 $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$.

例题2. 试化简 $\sqrt{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}$ $(x>0)$.

解 $\sqrt{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}=\sqrt{(x+1)+x-2\sqrt{x(x+1)}}$

$$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}. \quad (\because x+1>x>0)$$

§4. 实数的绝对值

4·1 绝对值的意义·记号

【定义】 实数 a 的**绝对值**,是去掉它的符号后数的大小. 用记号 $|a|$ 表示. 显然 $|a|\geqslant0$.

说明 $|+5|$ 与 $|-5|$ 都是 5. 当 $a\geqslant0$ 时, $|a|=a$, $a<0$ 时, $|a|=-a$.

4·2 含有绝对值符号的式子的计算

例题1. 试计算 $|a-b|+(2a+3b)$.

解 当 $a-b>0$ 时，$|a-b|=a-b$，

$\therefore\ |a-b|+(2a+3b)=a-b+2a+3b=3a+2b$.

当 $a-b<0$ 时，$|a-b|=b-a$，

$\therefore\ |a-b|+(2a+3b)=b-a+2a+3b=a+4b$.

例题2. 解下列方程式

(1) $|x+1|=7-2x$；　　(2) $|2x|-|x-1|=2x+5$.

解 (1) (i) 当 $x+1\geqslant 0$ 时，有$x+1=7-2x$，$3x=6$，$\therefore x=2$.

(ii) 当 $x+1<0$ 时，有 $-x-1=7-2x$，$x=8$；但它不合乎 $x+1<0$ 的条件，所以这时无解.　　答：$x=2$.

(2) $|2x|-|x-1|=2x+5$

(i) 当 $x<0$ 时，$|2x|-|x-1|=2x+5$，$-2x+x-1=2x+5$，$3x=-6$　$\therefore x=-2$.

(ii) 当 $0\leqslant x<1$ 时，$2x+x-1=2x+5$，$x=6$，它与 $0\leqslant x<1$ 的条件不合，故它不是解.

(iii) 当 $1\leqslant x$ 时，$2x-x+1=2x+5$，$x=-4$，与条件不合，不是解.　　答：$x=-2$.

例题3. 解下列不等式

(1) $|5x-2|<7$；　　(2) $|3x+2|>5$.

解 (1) 当 $5x-2\geqslant 0$，即 $x\geqslant\frac{2}{5}$ 时，有 $5x-2<7$，$5x<9$，$x<\frac{9}{5}$，

$\therefore\ \frac{2}{5}\leqslant x<\frac{9}{5}$.

当 $5x-2<0$，即 $x<\frac{2}{5}$ 时，$-5x+2<7$，　$-5<5x$，$-1<x$，

$\therefore\ -1<x<\frac{2}{5}$.　　答：$-1<x<\frac{9}{5}$.

(2) 当$3x+2\geqslant 0$，即 $x>-\frac{2}{3}$时，$3x+2>5$，　$\therefore\ x>1$

当$3x+2<0$，即 $x<-\frac{2}{3}$时，$-3x-2>5$，

$\therefore x<-\frac{7}{3}$　　答：$x<-\frac{7}{3}$，$1<x$.

§5. 虚数·复数

5·1 虚数、复数的意义

说明 二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根，可用 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

表示.但在实数范围内，当 $D=b^2-4ac\geqslant 0$ 时方程有根，而在 $D<0$ 时，由于$\sqrt{D}$不存在，这个求根公式失去了意义.在这里，我们把平方后成为负数的数，作为一种新引进的数，叫做**虚数**.把平方后为-1的数用字母i表示，叫做虚数单位.引进虚数后，在$D<0$时，二次方程也有根，上述求根公式也适用于这种情形.实数和虚数统称**复数**.这样，数的范围就扩张到了复数.

复数用两个实数 a,b 表示成 $a+bi$.当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，bi 叫做纯虚数，而 $b=0$ 时，它表示实数.

复数 $a+bi$
- 实数$a(b=0)$
  - 有理数(整数，分数)
  - 无理数
- 虚数$a+bi(b\neq 0)$
  - 纯虚数$bi(a=0,b\neq 0)$
  - 其他虚数$a+bi(a\neq 0,b\neq 0)$

5·2 复数的计算

对于复数，有下列关系成立

$a+bi=c+di$ 的充分必要条件是 $a=c,b=d$.

$a+bi=0$ 的充分必要条件是 $a=b=0$.

除 $i^2=-1$ 外，其四则运算可遵照实数的运算法则.

I 加法、减法 $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$;

II 乘法 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

III 除法 $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

证明 III $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-bdi^2+(bc-ad)i}{c^2-(di)^2}$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$ □

【定义】 共轭复数 复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做互为共轭的复数.共轭复数的和与积都是实数.

证明 和的情形 $(a+bi)+(a-bi)=2a$,

积的情形 $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2$

$=a^2+b^2$. □

例题 试计算下列各题:

(1) $2\sqrt{-3}+\sqrt{-27}$; (2) $\frac{2+3i}{3-2i}$.

解 (1) $2\sqrt{-3}+\sqrt{-27}=2\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i=5\sqrt{3}i$

(2) $\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{6-6+(9+4)i}{9+4}$

$=\frac{13i}{13}=i$

第二章　方程与不等式

§1.　线性方程

1·1　方程的意义和历史概述

【定义】1.　恒等式　如果一个等式，不管其中的字母取什么值，等式都成立，我们就说这个等式是关于这个（或这些）字母的恒等式.

【定义】2. 方程　如果一个等式，仅仅在其中的字母取特定的值时才成立，而对于字母的其他值不成立，则这样的字母叫未知数，这样的等式就叫做（关于未知数的）方程.

二次方程，早在欧几里德的《几何学原本》中就已论述了。但是当时在希腊的数学中还没有负数的概念.与此相反，印度人已认识到正根与负根的区别，研究了确定二次方程的两个根的公式．尽管如此，仍然没有考虑过虚根．考虑虚根存在的是16世纪意大利的卡尔丹和邦伯利等.

三次方程的一般解法，是由16世纪中叶的意大利数学家芬达拉（亦称塔塔利阿）发现，后由他的学生卡尔丹发表的.

四次方程的一般解法，又是由卡尔丹的学生弗拉利所发现的．此后，五次方程的代数解法，尽管经过了许多数学家的努力，却始终没有找到.（所谓代数解法，是由方程的系数经加减乘除及开方等有限次运算求根的方法.）最后终于由挪威的青年数学家阿贝耳证明了，"五次及五次以上的代数方程，用代数法求解一般是不可能的."

1·2　线性方程　$ax+b=0$　$(a\neq 0)$

【定理】1、在等式两端加上定数时，等式仍成立．也即是说，当 C 是任意数时，如果 $A=B$，则 $A+C=B+C$.

证明　$\because\ (A+C)-(B+C)=A-B=0$,

$\therefore\ A+C=B+C$. □

【定理】2. 在等式两端乘以（或除以）不等于 0 的常数，等式仍成立.即是当 $C\neq 0$ 时，如果 $A=B$，则 $AC=BC$，$\frac{A}{C}=\frac{B}{C}$.

证明 $AC-BC=C(A-B)$，但是 $A=B$. $\therefore A-B=0$，从而 $AC=BC$.

又，用 C 除时，也同样可证. □

【定理】3. 线性方程 $ax+b=0$ 的解法如下：

(1) $a\neq 0$时，$x=\frac{-b}{a}$；

(2) $a=0$ 时，如果 $b=0$，则 x 不确定；

(3) $a=0$ 时，如果 $b\neq 0$，则无解.

注意1. 所谓x不确定，是指x无论取什么值都可以.

2. $a(x-a)=0$ 的解，(i) $a\neq 0$ 时是 $x=a$，(ii) $a=0$ 时 x 不确定.

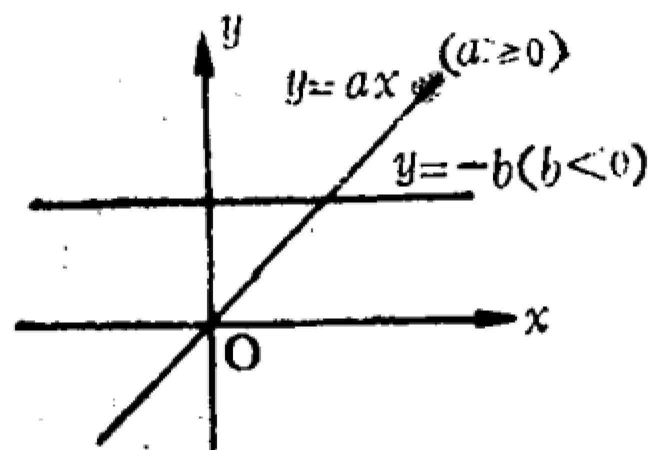


图 2-1

3. 线性方程 $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ 的解的几何意义.

设 $ax=-b$，且令

$$y=ax \quad ①$$

$$y=-b \quad ②$$

这时，如图 2—1 所示，①、② 两直线交点的横坐标 x 就是解，但是，如果 $a=0$且$b\neq 0$，则①、②没有交点，原方程也就没有解.如果 $a=b=0$，则①、②重合，任意 x 值都是解.

【定义】3. 绝对值 若一个数是正的，则取此值本身，而若一个数是负的，则变更此数的符号.这样得到的数，叫做这个数的绝对值（参看第一章§4）.数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示，0 的绝对值是 0.

例 若 a 是实数，则 $|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \text{ 时}. \\ -a, & a<0 \text{ 时}. \end{cases}$

又，对于复数 $a=x+yi$ (x，y 是实数，i 是虚数单位)，有

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2}$$

注意1. 在初中阶段，绝对值的定义是按下列方式给出的(因为在初中涉及的范围仅仅是"正数、负数的四则运算"，且不包含字母，所以下面这个定义就完全够了)：

【定义】 把表示正数、负数的正负性质的符号去掉后剩下的部分，叫做这个数的绝对值，亦即把绝对值按正数处理，但 0 的绝对值是 0，且在讨论

问题中，仅仅是考虑+3，-5，-0.1这样具体的数，而不涉及$|x-1|$等等.

2. 对于复数$\alpha=x+iy$，$|\alpha|=\sqrt{x^2+y^2}$，其中，当$y=0$时，"对于实数x，$\sqrt{x^2}=|x|$"成立.反之也真，即"$|x|^2=x^2$成立时，x是实数."

例题　解方程式$|x|=2$.

解　用类似第一章§4例题2的解法，可得所求的根是$x=\pm2$.

注意　此例的几何解法，令

$$y=|x| \qquad ①$$

$$y=2 \qquad ②$$

则由①式得

$$y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0\text{ 时} \\ -x, & x<0\text{ 时} \end{cases} \qquad ③$$

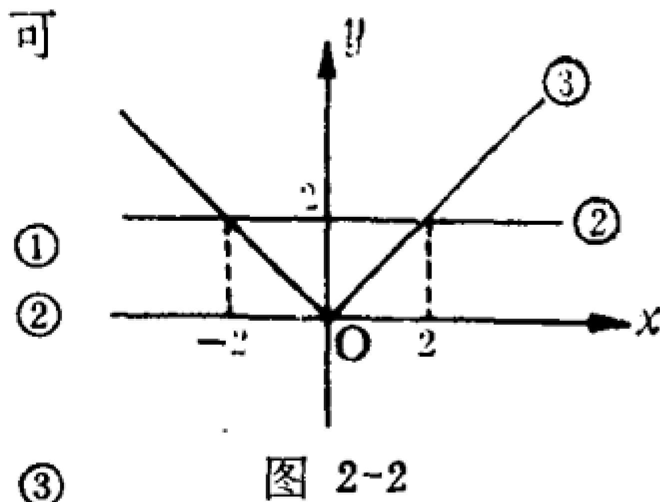


图 2-2

因而，由图2—2所示，③和②的交点的x坐标，即$x=-2$，2是所求的根.

1·3　线性方程组

线性方程组的解法　代入(消元)法，加减(消元)法，等量法.

例题　解下列线性方程组：

$$\begin{cases} x+2y=6, & ① \\ x-3y=1. & ② \end{cases}$$

解　(代入法)　由①式得

$$x=6-2y. \qquad ③$$

把③式代入②式得　$(6-2y)-3y=1$，　∴　$y=1$.

再把它代入③式得　$x=4$.　　答：$x=4$　$y=1$

另解1.(加减消元法)　由①—②得$5y=5$，∴$y=1$. 又，

①×3，得　$3x+6y=18$，

②×2，得　$2x-6y=2$，

因而，①×3+②×2得　$5x=20$，　∴$x=4$.

答：$x=4$，$y=1$.

另解2.(等量法)

由①　$x=6-2y$，　③

由②　$x=1+3y$，　④

令③，④右端相等得　$6-2y=1+3y$，　∴$y=1$.

又由①，②分别得

$$y=\frac{6-x}{2},\qquad ⑤$$

$$y=\frac{x-1}{3}.\qquad ⑥$$

令⑤，⑥右端相等得

$$\frac{6-x}{2}=\frac{x-1}{3}\qquad \therefore\quad x=4,$$

答：$x=4$，$y=1$.

注意 代入法，加减消元法，等量法三者的同解关系如下.

(代入法) $\begin{cases}x+2y=6, & ①\\ x-3y=1. & ②\end{cases}$

由①用“等式的性质” $x=6-2y$, ③

把③代入② $(6-2y)-3y=1$, ④

由此很显然，{①和②}一组与{③和④}一组，两者是同解的.

在求解④时，由于仅仅使用了“等式的性质”，因而结果很明显地保持了同解关系.

(加减消元法) 假设关于 x, y 的两个方程为 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$. 使这两个方程同时满足的 (x,y) 的集合，用

$A=\{(x,y): f(x,y)=0,\ \ g(x,y)=0\}$ ①

表示. 设 A 的任意一个元素为 (x_1,y_1)，则

$f(x_1,y_1)=0,\quad g(x_1,y_1)=0.$

于是，对于常数 m,n $(n\neq 0)$，有

$$\begin{cases}mf(x_1,y_1)+ng(x_1,y_1)=0,\\ f(x_1,y_1)=0\end{cases}$$

成立. 因而 $x=x_1$，$y=y_1$ 是下列联立方程组的解：

$$\begin{cases}mf(x,y)+ny(x,y)=0(n\neq 0),\\ f(x,y)=0\end{cases}\qquad ②$$

又设联立方程组②的解的集合为 B，则由上所述，有 $A\subset B$ ③

其次设集合 B 的任一元素为 (x_2,y_2)，则

$$\begin{cases}mf(x_2,y_2)+ng(x_2,y_2)=0,\\ f(x_2,y_2)=0.\end{cases}$$

这与下列方程组是同解的：

$$\begin{cases} ng(x_2,y_2)=0, \\ f(x_2,y_2)=0 \end{cases}$$

因为 $n\neq0$，所以

$$\begin{cases} g(x_2,y_2)=0, \\ f(x_2,y_2)=0 \end{cases}$$

成立．这表示 (x_2,y_2) 是集合 A 的元素．因而

$$A\supset B \qquad ④$$

由③、④得 $A=B$.

因而，用加减消元法所得的解与最初的联立方程组的解一致．这就是加减消元法的原理．

（等量法）显然，若 $A=B$ 且 $A=C$，则 $B=C$.

从而 $\begin{cases} A=B, \\ A=C \end{cases}$ 和 $\begin{cases} A=B, \\ B=C \end{cases}$ 同解

【定理】4. 二元线性方程组

$$\begin{cases} ax+by=c, & ① \\ a'x+b'y=c'. & ② \end{cases}$$

当 $\Delta=ab'-a'b\neq0$ 时，有唯一解：

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

其中 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$,

证明 假如 a,a',b,b' 中至少有一个为 0，则对联立方程组可直接地求解，因此这里假定 a,a',b,b' 都不为 0.

由①$\times a'$－②$\times a$，得

$$(a'b-ab')y=a'c-ac'.$$

(i) 当 $a'b-ab'\neq0$ 时，

$$y=\frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}.$$

同样，由①$\times b'$－②$\times b$，得

$$(a'b-ab')x=b'c-bc'$$



$$\therefore \quad x=\frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}.$$

同时也证明了解的唯一性.

(ii) 当 $a'b-ab'=0$ 时，由假设 $a'b'\neq 0$,因而

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}. \qquad ③$$

而且，如果 $a'c-ac'\neq 0$，则 $0\cdot y\neq 0$ 不能成立，故此时无解.

又，如果 $a'c-ac'=0$,则由③得

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

①和②变为同一方程，此时解是不确定的. □

另证 由行列式的性质

$$\begin{vmatrix} ax+by-c & b \\ a'x+b'y-c' & b' \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & b \\ b' & b' \end{vmatrix}y-\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}. \qquad ③$$

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$.

(i) 假如 $\Delta\neq 0$,则由③

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

同样地，

$$\because \quad \begin{vmatrix} a & ax+by-c \\ a' & a'x+b'y-c' \end{vmatrix}=0,$$



$\therefore \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$.　其中 $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

(ii) $\Delta=0$ 时，如果$\Delta_x=0$（或$\Delta_y=0$），则

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

解不确定.

(iii) $\Delta=0$ 时，如果$\Delta_x\neq0$（或$\Delta_y\neq0$），这不可能，故无解. □

注意1. 解的几何意义　是两实直线①和②的交点的坐标.

2. 关于解的讨论：

(1) 如果$\Delta=ab'-a'b\neq0$，则只有一组解.

(2) 如果$\Delta=0$ 且 $bc'-b'c\neq0$，则无解.

(3) 如果$\Delta=0$ 且 $bc'-b'c=0$，则解不确定.

例　在 1.3 例题的线性方程组中，

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-5,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-20,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$\therefore \quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=4,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1.$$

例题　解下列线性方程组

$$\begin{cases} x+2y=3, & ① \\ 2x+4y=5. & ② \end{cases}$$

解　由【定理】1，

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0,\text{且 } bc'-b'c=2\times5-4\times3=-2\neq0,$$因而解不存在.

注意　上例无解，是因为①×2 的左端与②的左端相等. 但①×2 的右端是 6，而②的右端是 5，两者不相等.因而①与②不相容是显然的，这意味着，①、②两直线是不重叠的二平行直线，故没有交点.

【定理】5. 二元线性方程组

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ a'x+b'y=0 \end{cases}$$

具有 $x=y=0$ 以外的解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0, \quad 即 ab'=a'b.$$

证明 在【定理】4 中令 $c=c'=0$，这时假如 $\Delta\neq 0$，则 $x=y=0$，因此作为它的对偶，【定理】5成立. □

例题1. 求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y-2z=-6, & ① \\ 3x+y+3z=10, & ② \\ 4x+y+2z=8. & ③ \end{cases}$$

解 （代入法）由①式得

$$z=\frac{2x+y+6}{2}, \qquad ④$$

把④代入②和③

$$\begin{cases} 3x+y+\dfrac{3(2x+y+6)}{2}=10, \\ 4x+y+(2x+y+6)=8, \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 12x+5y=2, & ⑤ \\ 3x+y=1, & ⑥ \end{cases}$$

由⑥得 $y=1-3x$, ⑦

把⑦代入⑤得 $12x+5(1-3x)=2$, $\therefore\ x=1$.

又由⑥得 $y=-2$. 及由④得 $z=3$.

答：$x=1$，$y=-2$，$z=3$.

另解

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6, \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 10 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix}=-12, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}=18.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1, \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2, \qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=3.$$

例题2. 求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1, & ① \\ x-2y \quad =4, & ② \\ 3x \quad +2z=5. & ③ \end{cases}$$

解 由①×2－③得

$$x-2y=3, \quad ④$$

②和④矛盾，因而没有解。

例题3. 求解下列三元线性方程组

$$\begin{cases} x+y+z=1, & ① \\ x-3y+2z=2, & ② \\ 3x-y+4z=4. & ③ \end{cases}$$

解 由①得 $z=1-x-y$, ④

把④代入②得 $x+5y=0$, $\therefore \quad x=-5y$. ⑤

由⑤和④ 得$z=1+5y-y$, $\therefore y=\dfrac{z-1}{4}$ ⑥

由⑥和⑤得 $x=\dfrac{5(1-z)}{4}$.

答 $x=\dfrac{5(1-z)}{4}$, $\quad y=\dfrac{z-1}{4}$.

另解 由①，②有

$$\begin{cases} x+y=1-z, & ① \\ x-3y=2-2z. & ② \end{cases}$$

根据【**定理**】1，便得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-2z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{5(1-z)}{4},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 1-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{z-1}{4}.$$

【定理】6. n元线性方程组的解(克莱姆公式) n个未知量 x_1, x_2, …, x_n的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

如果系数行列式 $|A|\neq0$，则有唯一解：

$$x_i=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots b_1\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots b_2\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots b_n\cdots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(第 i 列)

其中

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【定理】7. n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

具有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外的解的充分必要条件是$|A|=0$.($|A|$的意义见【定理】6.)

【定理】8. n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

具有解的充分必要条件是，两个矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

的秩相等($\mathrm{rank}\ A=\mathrm{rank}\ B$).

再有，当这个条件成立且 $\mathrm{rank}\ A=r(r\leqslant n)$时，解具有 $n-r$ 个独立变量.

特别是，在 A 的 r 阶子行列式中，若不等于 0 的子行列式是

$$|\Delta_r|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & a_{r2}\cdots a_{rr} \end{vmatrix},$$

则解为(把 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 作为独立变量)

(第 i 列)

$$x_i=\frac{1}{|\Delta_r|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots b_1\cdots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}\cdots b_2\cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & a_{r2}\cdots b_r\cdots a_{rr} \end{vmatrix}$$

(第 i 列)

$$-\frac{1}{|\Delta_r|}\sum_{j=r+1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1j}\cdots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2j}\cdots a_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{r1} & a_{r2}\cdots a_{rj}\cdots a_{rr} \end{vmatrix}x_j.$$

注意 关于行列式的秩，请参看第十五章 II §3.

§2. 二次方程

2·1 二次方程的意义和求根公式

【定义】1. 整式方程 令 a_0x^n, $a_1x^{n-1}\cdots$, $a_{n-1}x$及常数 a_n 的和 (x 的多项

式）为0，这样构成的等式叫做关于 x 的整式方程.特别是，当 $a_0\neq 0$时，把它叫做 n 次整式方程.

【定理】1.（求根公式）二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

证明 由于 $a\neq 0$，所以

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{(2a)^2}\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2},$$

因而所给的二次方程是

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

由此得 $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

□

注意 实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$的根，可以由曲线 $y=ax^2$……①

和直线 $y=-bx-c$……②

的交点来决定.

(1) 假如①、②在两点相交，则有相异的两个实根.

(2) 假如①、②相切，则有相等的两个实根.

(3) 假如①、②没有公共点，则有两个共轭虚根.

此外，【定理】1 对复系数二次方程显然也是成立的.(见本节【定理】5)

例题 求解 $2x^2-6x+3=0$.

解 由【定理】1的求根公式，得

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2\times 2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}.$$

【系】 二次方程式$ax^2+2b'x+c=0(a\neq0)$的根是

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}.$$

证明 在【定理】1中，令$b=2b'$,则

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}.$$

□

【定义】2. 判别式 $D=b^2-4ac$ 叫做二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 根的判别式.

【定理】2. 设二次方程$f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的两个根为α，β,则

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$;(根与系数的关系)

(2) $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{-b^2+4ac}{4a}$是函数$f(x)$的极值.

证明 由【定理】1知,

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

因而

(1) $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$,

$$\alpha\beta=\frac{1}{4a^2}(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})$$

$$=\frac{1}{4a^2}\{(-b)^2-(b^2-4ac)\}$$

$$=\frac{c}{a};$$

(2) 如图2—3所示。首先，当$a>0$时，对于一切实数x，有
$f(x)=ax^2+bx+c$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=f\left(-\frac{b}{2a}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{最小值})$$

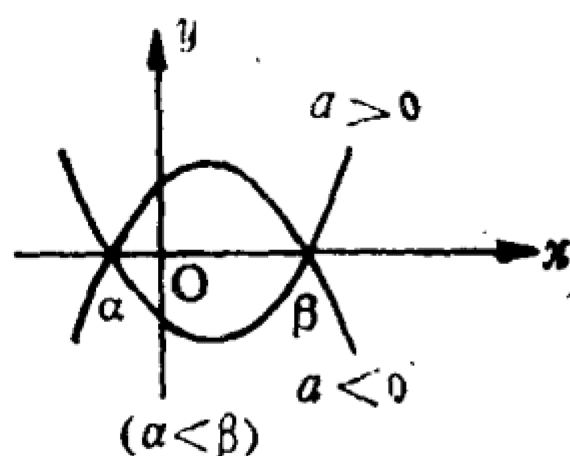


图2-3

而当 $a<0$ 时，由于

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0,$$

所以对于一切实数 x，有

$$f(x)\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}=f\left(-\frac{b}{2a}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{最大值})$$

□

【定理】3. 以 α，β 为二根的方程是

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0\qquad(a\neq 0).$$

【定理】4.（根的判定） 对于实系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0\qquad(a\neq 0),$$

(1) 若 $D\geqslant 0$，则具有实根．特别是，$D>0$ 有相异二实根，$D=0$ 有相等二实根．

(2) 若 $D<0$，则具有二共轭复根．

证明 可以由【定理】1并考察 $D=b^2-4ac$ 为正、零，负的情形而得到． □

注意 当系数中至少有一个不是实数时，【定理】4 不成立。例如

在 $x^2-2ix-1=0$ 中，$D=0$，但是有虚根 $x=i$（重根）．

在 $x^2+ix-5=0$ 中，$D=-1+5=4>0$，但有复根 $x=-i\pm 2$．

【定理】5. 复系数的二次方程 $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0(\alpha\neq 0)$ 的根是

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

证明 由于 $|\alpha|\neq 0$，故可用【定理】1的证法来证明 □

例题 求解　$2x^2-(3+2i)x+5=0$．

解　由【定理】5的求根公式，有

$$x=\frac{3+2i\pm\sqrt{(3+2i)^2-4\times 2\times 5}}{4}.$$

令

$\sqrt{(3+2i)^2-4\times2\times5}=\sqrt{-35+12i}=a+bi$ (a,b为实数)，两端平方，并整理得

$$\begin{cases}a^2-b^2=-35,\\ ab=6,\end{cases}$$

由此二式又可得

$$a^4+35a^2-36=0,$$

$$\therefore\quad (a^2+36)(a^2-1)=0.$$

但因 a 是实数，有 $a^2+36>0$，$\therefore\quad a=\pm1$

对于 $a=\pm1$，$b=\pm6$. 又注意到 $ab=6>0$，故有

$\sqrt{-35+12i}=\pm(1+6i)$，从而

$$x=\frac{3+2i\pm(1+6i)}{4},$$

$$\therefore\quad x=1+2i,\quad \frac{1-2i}{2}.$$

【定理】6. 二次方程 $(a+ia')x^2+(b+b'i)x+(c+c'i)=0\quad(a^2+(a')^2\neq0)$ 的实根，是联立方程组

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0,\\ a'x^2+b'x+c'=0,\end{cases}$$

的实根，其中，a,a',b,b',c,c' 都是实数.

证明 注意到 x 是实数，整理原式得

$$(ax^2+bx+c)+i(a'x^2+b'x+c')=0.$$

但是 ax^2+bx+c 及 $a'x^2+b'x+c'$ 是实数，因此满足该式的实根 x 与联立方程组

$$\begin{cases}ax^2+bx+c=0,\\ a'x^2+b'x+c'=0\end{cases}$$

的实根相同. □

【定理】7.（根的正负） 在实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，

(1) 两根同是正根的充分必要条件是$b^2-4ac\geqslant0$，$ab<0$，$ac>0$;

(2) 两根同是负根的充分必要条件是$b^2-4ac\geqslant0$，$ab>0$，$ac>0$;

(3) 两根异号的充分必要条件是 $ac<0$.

证明 (1) 如图2—4，为使 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 具有两个正根，应使对称

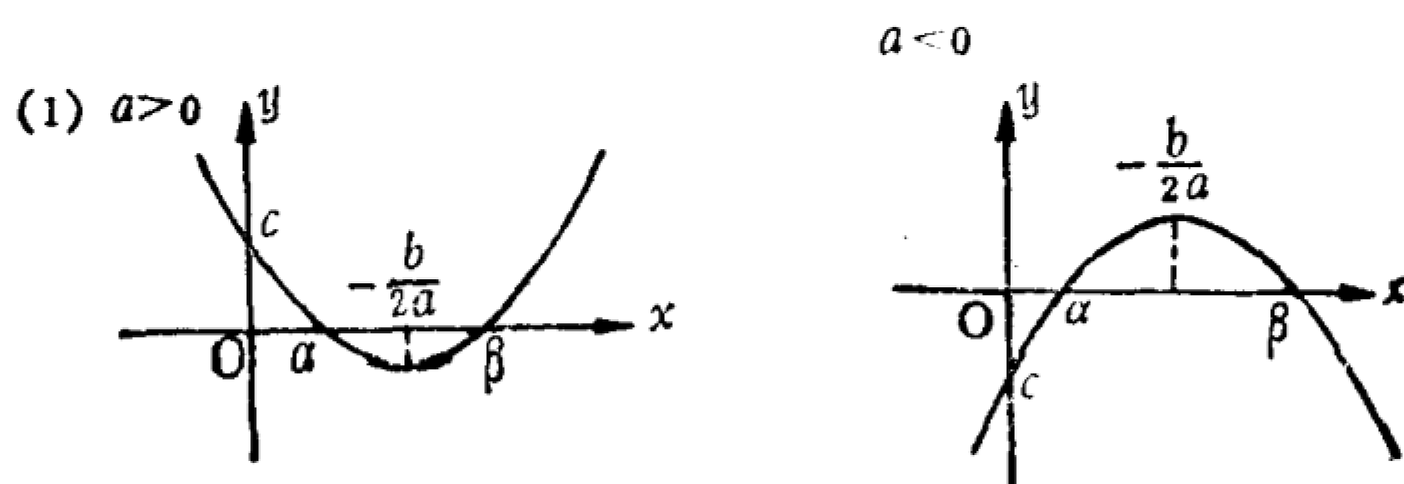


图 2-4

轴

$$x=-\frac{b}{2a}$$

在右半平面内，因而

$$-\frac{b}{2a}>0. \qquad ①$$

若 $a>0$，则 $f(0)=c>0$
若 $a<0$，则 $f(0)=c<0$　　②

根据实根条件，

$$D=b^2-4ac\geqslant 0, \qquad ③$$

由于①、②、③必须同时成立．从而

由①，$ab<0$，　　①′

由②，$ac>0$，　　②′

而③就是　$b^2-4ac\geqslant 0$．

反之，当①′、②′、③满足时，设 $f(x)=0$ 的两个根是 α,β（令$\alpha<\beta$）：

(i) $a>0$ 时，

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

α,β 同是实根．另一方面，由②′得

$$(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2=4ac>0.$$

但是 $ab<0$，$a>0$，　∴　$-b>0$．

而且又因为 $|b|>\sqrt{b^2-4ac}>0$，所以 $-b-\sqrt{b^2-4ac}>0$，

$$\therefore\quad \alpha=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0.$$

不言而喻，有 $\beta>\alpha>0$， $\therefore\ \beta>0$.

(ii) $a<0$ 时。

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

α,β 同是实根，另一方面，

$$(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2=+4ac>0.$$

但是， $\because\ ab<0$，$a<0$， $\therefore\ b>0$，从而

$$-b+\sqrt{b^2-4ac}<0.$$

这里，由于 $a<0$，所以

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}>0.$$

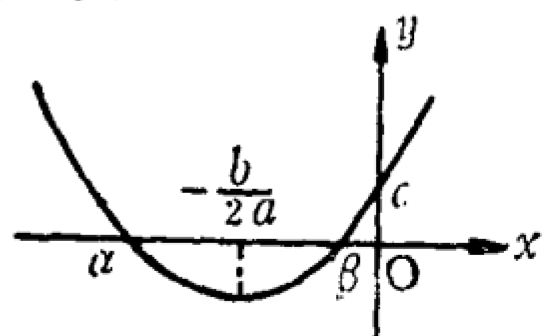
不言而喻 $\beta>\alpha>0$， $\therefore\ \beta>0$.

从以上所述可知，若①′，②′，③成立，则 α,β 同是正根；

(2) 与(1)同样可证，如图 2-5 所示；

(3) 如图 2-6 所示.

(2) $a>0$



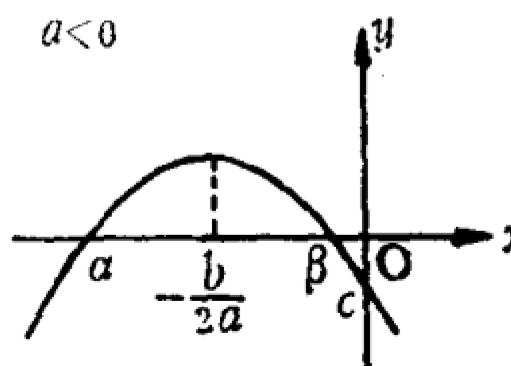
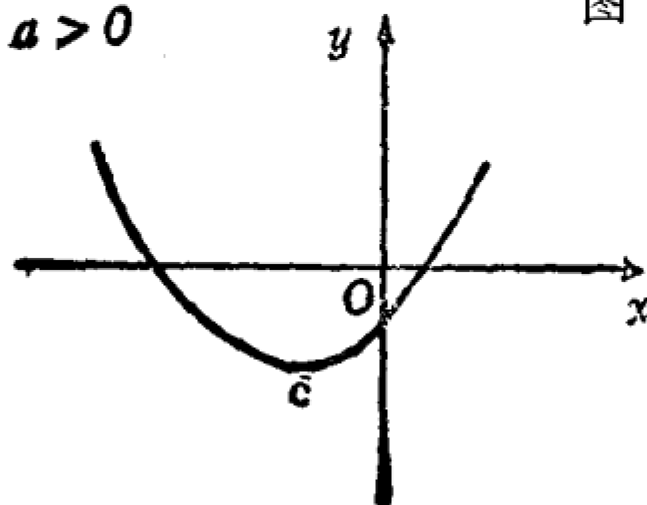


图 2-5

(3) $a>0$



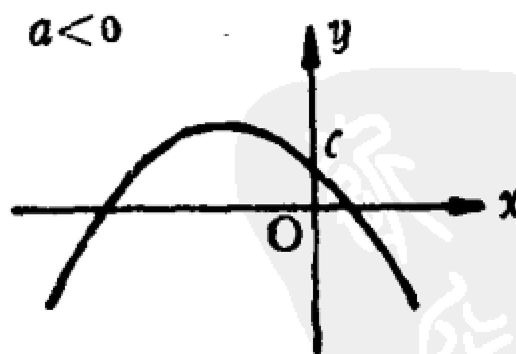


图 2-6

(i) 当 $a>0$ 时，对于 x 的充分大及充分小的值，有 $f(x)>0$.

从而，假如 $f(0)=c<0$，那末使 $f(x)=0$ 的 x 值，在正 x 值和负 x 值两部分中各有奇数个. 然而二次方程只有两个根，因此使 $f(x)=0$ 的 x 值，在正 x 值和负 x 值两部分中正好是各有一个.

(ii) $a<0$ 时，也同样可证. □

【定义】3. 结式 对于两个二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$a'x^2+b'x+c'=0$ $(aa'\neq0)$，

$$R=(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$

叫做这两个方程的结式.

【定理】8. 设有两个二次方程 $ax^2+bx+c=0$，$a'x^2+b'x+c'=0(aa'\neq0)$，则它们

(1) 至少有一个公根的充分必要条件是 $R=0$；

(2) 有两个公根的充分必要条件是 $R=0$ 且 $ab'=a'b$；

(3) 仅有一个公根的充分必要条件是 $R=0$ 且 $ab'\neq a'b$.

证明 (1) 必要性 假如 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 和 $g(x)=a'x^2+b'x+c'=0$ 具有公根 α，则

$$\begin{cases} a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0, \\ a\alpha^2+b\alpha+c=0, \\ a'\alpha^3+b'\alpha^2+c'\alpha=0, \\ a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0. \end{cases}$$

由本章1·3【定理】7，若消去 $\alpha^3,\alpha^2,\alpha,1$ 因它们不全为0，故有

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}=0,$$

由此得

$$(ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0,$$

充分性 将



$$R=\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ a' & b' & c' & 0 \\ 0 & a' & b' & c' \end{vmatrix}=0$$

转置后得

$$\begin{vmatrix} a & 0 & a' & 0 \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ 0 & c & 0 & c' \end{vmatrix}=0.$$

利用上述【定理】7，存在不全为零的 p, q, r, s，使

$$\begin{cases} pa+ra'=0, & ① \\ pb+qa+rb'+sa'=0, & ② \\ pc+qb+rc'+sb'=0, & ③ \\ \qquad qc+\qquad sc'=0. & ④ \end{cases}$$

把①$\times x^3$，②$\times x^2$，③$\times x$，④相加，并整理得，

$$(px+q)(ax^2+bx+c)+(rx+s)(a'x^2+b'x+c')=0,$$

$$(px+q)f(x)+(rx+s)g(x)=0.$$

今设 $f(x)=0$，$g(x)=0$ 没有公共根，即 $f(x)$，$g(x)$ 互质，则由上式知，一次式 $(px+q)$ 必被二次式 $g(x)$ 除尽，这是一个矛盾．所以 $f(x)=0$，$g(x)=0$ 具有公根．

(2) 设 $f(x)=0$，$g(x)=0$ 的两个公根为 α，$\beta(\alpha\neq\beta)$，则

$$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0,$$

由此 $\quad f(\alpha)-f(\beta)=0,$

因 $\alpha-\beta\neq0$，故有 $\beta=-\dfrac{a\alpha+b}{a}$，

对 $g(x)$ 同理可得 $\beta=-\dfrac{a'\alpha+b'}{a'}$，

由 $-\dfrac{a\alpha+b}{a}=-\dfrac{a'\alpha+b'}{a'}$，



得　$ab'=a'b$.

又由(1),显然 $R=0$.

其逆自明.

(3) 由(2)立即可知.　□

【定理】9. 设实系数的二次方程为 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq0)$,令$D=b^2-4ac$.

(1) 若 $D<0$,则对于一切实数 x,有 $af(x)>0$;

(2) 若 $D=0$,则对于$x\neq\frac{-b}{2a}$的一切实数 x, 有 $af(x)>0$, 对于 $x=\frac{-b}{2a}$, 有

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=0;$$

(3) 若$D>0$,则对于两根之间的 x 有 $af(x)<0$. 而对于两根之外的 x, 有 $af(x)>0$.

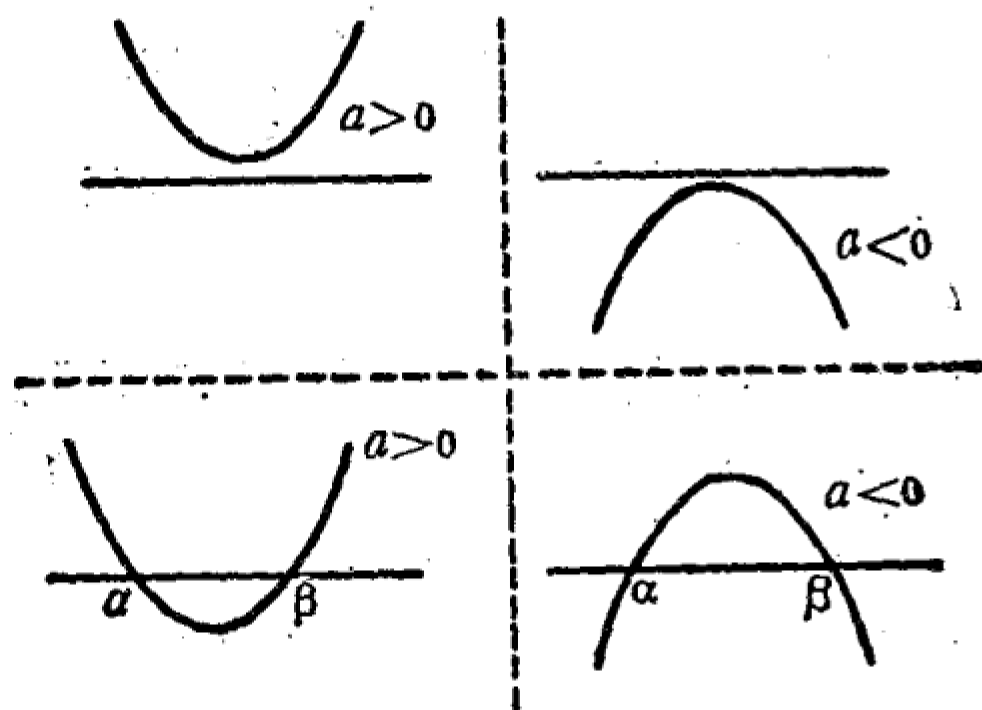


图2-7

证明　如图 2-7 所示.

$$(1)\ af(x)=a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4},$$

因而, 假如 $D=b^2-4ac<0$, 则

$$af(x)>0.$$

(2) 假如 $D=0$, 则当

$$x \neq \frac{-b}{2a} \text{ 时}, \quad af(x)=a^2\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0.$$

再者，$D=0$ 时，

$$af\left(\frac{-b}{2a}\right)=0. \quad \text{但 } a\neq 0,$$

故
$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=0;$$

(3) 因为 $D>0$，所以 $f(x)=0$ 具有相异二实根．令此二实根为 α, β $(\alpha<\beta)$，这时由【定理】3，有

$$af(x)=a^2(x-\alpha)(x-\beta),$$

因而，对于使 $\alpha<x<\beta$ 的 x 值，有 $af(x)<0$．另外，对于满足 $x<\alpha$ 或 $\beta<x$ 的 x 值，$af(x)>0$． □

【定理】10．（根的分离） 对于实系数的二次方程 $f(x)=0$，

(1) 假如 $f(p)\cdot f(q)<0$，则 $f(x)$ 的二根是不相等的实数，且其中有一根位于 p 和 q 之间．

(2) 当 $p<q<r$ 时，如有

	$f(p)$	$f(q)$	$f(r)$
	$+$	$-$	$+$
或	$-$	$+$	$-$

则在 p 和 q，q 和 r 间各存在一个根．

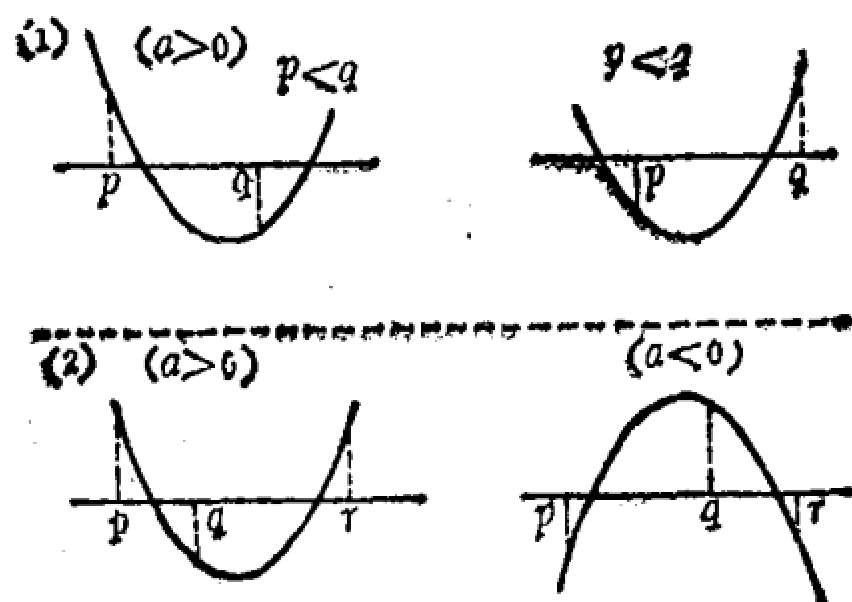


图2-8

证明　对于 $f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$，当 $a>0$ 时，如图2—8，结论显然成

立.

$a<0$ 时，也同理可证. □

【定理】11. 对于实系数的二次方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$,

(1) 当 $a>0$ 时，如有满足 $f(p)<0$ 的实数 p，则在 p 的两侧各有一实根;

(2) 当 $a<0$ 时，如有满足 $f(p)>0$ 的实数 p，则在 p 的两侧各有一实根. □

证明 如图 2—9，证明显然.

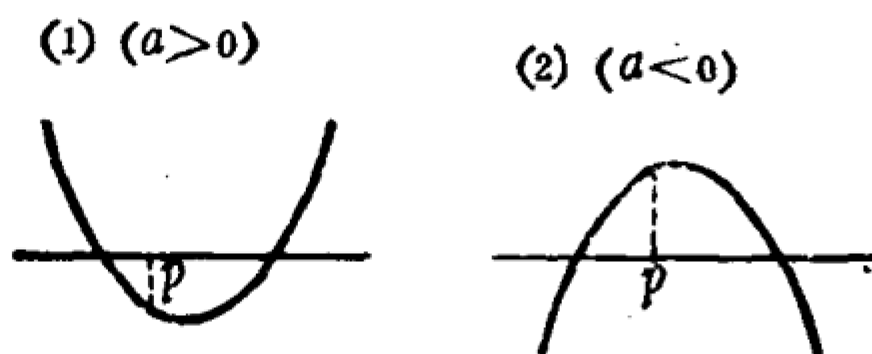


图 2-9

【定理】12. 当 a,b,c 是有理数时，方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的根为有理数的充分必要条件是：b^2-4ac 是形如 $\left(\frac{n}{m}\right)^2$ 的完全平方数（m，n 为自然数).

证明 由【定理】1 的求根公式，立即可证. □

2·2　二元二次方程组

【定义】4. 二元二次方程组 在包含两个未知数的两个方程中，考虑两种情形:

(1) 两者都是二次方程;

(2) 一个是一次方程，另一个是二次方程;

这两个方程式结合在一起，叫做二元二次（联立）方程组.

注意 二次方程组的解法

(1) 在一个是一次另一个是二次的情形下，可用代入法求解.

(2) 两者都是二次的情形，如果可以把一个方程分解为一次因式之积时，那么用方法(1)解这些一次方程分别和二次方程组成的联立方程组.一般情形下，常把方程组变形，使它的一个变为一次方程或容易分解因式的方程.

例题1. 解下列方程组

$$\begin{cases}2x+3y=1, & ①\\ 3x^2-4xy+y^2=0. & ②\end{cases}$$

解 由①得

$$y=\frac{1-2x}{3}, \quad ③$$

把③代入②，整理得

$$55x^2-16x+1=0,$$

$$(5x-1)(11x-1)=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{5}, \quad \frac{1}{11}. \quad ④$$

再代入③依次得

$$y=\frac{1}{5}, \quad \frac{3}{11}. \quad ⑤$$

另解 把②分解因式得

$$(x-y)(3x-y)=0.$$

(i) 求解 $\begin{cases}2x+3y=1, & ①\\ x-\ y=0, & ⑥\end{cases}$

得 $5x=1$， $\therefore\ x=\frac{1}{5}$. 再代入⑥得 $y=\frac{1}{5}$.

(ii) 求解 $\begin{cases}2x+3y=1, & ①\\ 3x-\ y=0, & ⑦\end{cases}$

得 $11x=1 \therefore\ x=\frac{1}{11}$，再代入⑦得 $y=\frac{3}{11}$.

例题2. 解下列方程组

$$\begin{cases}6x^2-xy-2y^2=0, & ①\\ x^2-xy+\ y^2=7. & ②\end{cases}$$

解 把①分解因式得

$$(3x-2y)(2x+y)=0.$$

于是可以形成两个方程组：

(i) $\begin{cases}3x-2y=0,\\ x^2-xy+y^2=7;\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}2x+y=0,\\ x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

求解(i)得 $x=\pm 2$, $y=\pm 3$ （正负号 同取上或同取下）.

求解(ii)得 $x=\pm 1$, $y=\mp 2$ （正负号 同取上或同取下）.

答，$\begin{cases}x=1,\\y=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2,\\y=-3.\end{cases}$

§3．高次方程

3·1　特殊的高次方程

如本章1.1所述可以证明，五次以上的方程一般不能用代数方法求解．但是某些特殊（即系数取特殊值）的五次以上的方程，却有可能简单地求解．这里的特殊方程一般也适用于三次以上的方程．

【定义】1.双二次方程式　诸如 $x^4+ax^2+b=0$ 以及$p(ax^2+bx+c)^2+q(ax^2+bx+c)+\gamma=0$这样的方程，叫做双二次方程．它们都采用二次方程的解法来求解．

【定义】2.　倒数方程　（或反方程式）如象 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 以及 $ax^5-bx^4+cx^3-cx^2+bx-a=0$ 这样的方程，一般说，对于 n 次方程 $f(x)=0$，当 $f(x)=\pm x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ 成立时，则 $f(x)=0$ 叫做倒数方程．

【定理】1.　奇数次的倒数方程具有根+1 或−1，且用 $x-1$或$x+1$ 来除时，即变为偶数次的倒数方程．

证明　不妨对三次方程 $f(x)=ax^3+bx^2+bx+a=0$来证明．

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+bx+a&=a(x^3+1)+bx(x+1)\\&=(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}\\&=(x+1)\{ax^2+(-a+b)x+a\},\end{aligned}$$

故 $f(x)$能被$(x+1)$整除，且 $ax^2+(-a+b)x+a=0$是二次倒数方程．

又，如果　$f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=a(x^5+1)+bx(x^3+1)+cx^2(x+1)\\&=(x+1)\{a(x^4-x^3+x^2-x+1)+bx(x^2-x+1)+cx^2\}\\&=(x+1)\{ax^4+(-a+b)x^3+(a-b+c)x^2+\\&\qquad(-a+b)x+a\}.\end{aligned}$$

所以定理仍成立.对更高次的情形也同理可证。

对于$ax^3+bx^2-bx-a=0$ 的情形，根为 $x=1$.　□

注意1. 设 $f(x)=0$ 是n 次倒数方程.这时，由于 $f(x)=\pm x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$成立，因此也可以把倒数方程定义如下．

【定义】 在整式方程 $f(x)=0$ 中，假如 α 是根就有 $\frac{1}{\alpha}$ 也是根，则此方程叫做倒数方程.

当采用此定义时，【定理】1可按下列方法证明.

【定理】1的证明 （仅以三次方程为例，对于一般的奇次倒数方程，也可同样论证.）设三次倒数方程 $f(x)=0$ 的三个根为 α, β, r. 由倒数方程的定义知，若令 $\beta=\frac{1}{\alpha}$，则三个根变为 $\alpha, \frac{1}{\alpha}, r$.

因为 r 是根时，$\frac{1}{r}$ 也必定是根，所以 $r=\frac{1}{r}$（r 是对于自身的倒数）.由此得 $r^2=1$，　∴　$r=\pm1$.

2. 为了求偶次的倒数方程的解，只要令 $x+\frac{1}{x}=y$ 即可.

例题 试求 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0(a\neq0)$ 的根.

解 令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$.如果 $x=0$ 是根，则 $a=0$. 这与题设矛盾，因而 $x\neq0$.用 x^2 除 $f(x)=0$ 的两端得

$$ax^2+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

$$\therefore \quad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

在这里，令 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$，因而

$$ay^2+by+(c-2a)=0(a\neq0).$$

因此，由1·1的【定理】1，可求出 y 的两个根.令这两根为 y_1, y_2，则

$$x+\frac{1}{x}=y_1, \quad \therefore \quad x^2-y_1x+1=0.$$

再一次根据【定理】1，可求 x 的两个根.同样，对于 y_2 也求得两个根. 合起来，就求得了四个根.

3·2 三次方程的解法

【定理】2. 实系数的三次方程至少具有一个实根.

证明 对于三次方程 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$，当 x^3 的系数 a 为正时，如 x 充分大，则 $f(x)$ 变为与 ax^3 同符号（即正号）.另一方面，如取 x 充分小（即取为负，且绝对值充分大）时，则 $f(x)$ 变为与 ax^3 同是负号. 因为整函数是连续的，所以当 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时，$f(x)$ 从负值变为正值，$f(x)$ 至少有一次变为 0.

$a<0$ 的情形也同样可证. □

【定理】3. 若 $a+bi$ 是方程 $x^3+px+q=0$ 的根,则 $-2a$ 也是它的根. 其中, a, b, p, q 是实数, 且 $b\neq0$.

证明 把 $a+bi$ 代入 $f(x)=x^3+px+q=0$, 有

$$f(a+bi)=(a+bi)^3+p(a+bi)+q$$
$$=(a^3-3ab^2+pa+q)+(3a^2b-b^3+pb)i=0.$$

其中, $a^3-3ab^2+pa+q, 3a^2b-b^3+pb$ 都是实数, 因此

$$\begin{cases}a^3-3ab^2+pa+q=0, & ①\\ 3a^2b-b^3+pb=0 & ②\end{cases}$$

必须同时成立, 但按题设 $b\neq0$,故由②有

$$3a^2-b^2+p=0. \quad ③$$

另一方面,

$$f(-2a)=-8a^3-2ap+q, \quad ④$$

在这里, 假如 $a=0$, 则由①可知, ④的右端等于0, 于是 $-2a$ 是 $f(x)$ 的根; 假如 $a\neq0$, 则由①－③×$3a$ 得

$$f(-2a)=-8a^3-2ap+q=0,$$

从而, $-2a$ 也是根. □

【定理】4. 在 $x^3+3ax+b=0$ 中, 作变换 $x=\frac{a-y^2}{y}$ 则变为 $y^6-by^3-a^3=0$.

证明 可以把 $x=\frac{a-y^2}{y}$ 直接代入原方程中, 整理而得. □

【定理】5. $x^3+px+q=0$ 可变换成 $x^4=(x^2+ax+b)^2$ 的充分必要条件是: $a^2+2b=0, b=p, b^2=2aq$.

证明 由 $x^4=(x^2+ax+b)^2$,可得

$$2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2=0.$$

为使它与 $x^3+px+q=0$ 是同解的, 必须

$$a^2+2b=0,$$

且 x 的其他幂的系数成比例, 即

$$\frac{2a}{1}=\frac{2ab}{p}=\frac{b^2}{q}, \qquad \therefore \quad p=b, 2aq=b^2.$$

□

【定理】6. $x^3-1=0$ 的根是 $1, \omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

证明 $x^3-1=0, \therefore (x-1)(x^2+x+1)=0.$

利用1·1中【定理】1的公式, 即得

$x=1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.　□

【系】1.　$x^3-a^3=0(a\neq0)$的根是$a, a\omega$、$a\omega^2$.

证明　令$y=\dfrac{x}{a}$，则原方程变为$y^3-1=0$，　∴　$y=1$，ω，ω^2

从而，$x=a$，$a\omega$，$a\omega^2$是所求的根.　□

【系】2．$x^3+a^3=0(a\neq0)$的根是$-a$，$-a\omega$，$-a\omega^2$.

证明　把【系】1 中的a代换成$-a$，可得证.

□

【定理】7．设a, b, c, d是整数.如果$ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$以有理数$\dfrac{p}{q}$为它的一个根，则p是d的约数，q是a的约数.其中，设$\dfrac{p}{q}$为既约分数.

证明　把$x=\dfrac{p}{q}$代入$ax^3+bx^2+cx+d=0$得

$$ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=0.$$

$$\therefore\quad p(ap^2+bpq+cq^2)+dq^3=0.$$

但因$\dfrac{p}{q}$是既约分数，所以p必须是d的约数．又因为

$ap^3+q(bp^2+cpq+dq^2)=0$，所以q是a的约数.　□

【系】如果$x^3+bx^2+cx+d=0$有整数解，则它是d的约数.

证明　设n是该方程的整数解，则

$$n(n^2+bn+c)+d=0.$$

所以n是d的约数.　□

【定理】8．如果三次倒数方程$ax^3+bx^2+bx+a=0(a\neq0)$以-1为它的一个根，则另外两个根就是$ax^2+(b-a)x+a=0$的根.

证明　参看3·1【　理】1.　□

3·3　四次方程的解法

【定理】9．倒数方程式$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0(a\neq0)$的解，若令$y=x+\dfrac{1}{x}$，则可由$ay^2-by+c-2a=0$求得.

证明　参照3·1的【定理】1.　□

例题1．求$x^4+4x^3-7x^2-22x+24=0$的解.

解　x^4+4x^3与$(x^2+2x)^2$前两项相同，故令$y=x^2+2x+a$，则

$$x^4+4x^3-7x^2-22x+24=(x^2+2x+a)^2+b(x^2+2x+a)+c$$
$$=x^4+4x^3+(4+2a+b)x^2+(4a+2b)x+a^2+ab+c,$$

由 $\begin{cases} 4+2b+b=-7, \\ 4a+2b=-22, \\ a^2+ab+c=24, \end{cases}$

求 a,b,c，得 $a=-6$，$b=1$，$c=-6$，因而该方程式是

$$y^2+y-6=0, \qquad \therefore \quad y=2 \text{ 或 } -3.$$

但 $y=x^2+2x-6$，于是又有

$$x^2+2x-6=2, \qquad \therefore \quad x=2 \text{ 或 } -4,$$

$$x^2+2x-6=-3, \qquad \therefore \quad x=1 \text{ 或 } -3.$$

答：$x=1, 2, -3, -4$.

例题2. $x^4-1=0$ 的根是 $1, -1, \pm i$.

解 $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$,

$\therefore \quad x=\pm 1, \pm i$.

例题3. $x^4+1=0$ 的根是 $\dfrac{\pm 1 \pm i}{2}$.

解 将原方程式变形得

$$x^4+2x^2+1-2x^2=0,$$

$$(x^2+1)^2-2x^2=0,$$

$$\therefore \quad x^2 \pm \sqrt{2}\, x+1=0.$$

(i) 从 $x^2+\sqrt{2}\,x+1=0$ 得　$x=\dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$;

(ii) 从 $x^2-\sqrt{2}\,x+1=0$ 得　$x=\dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$.

答：$x=\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$

注意 $x=\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$，即

$$x=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$ 而

$x=\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$（同取上号或下号）就是

$$x=\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

3·4 根与系数的关系

【定理】10. 设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$的二根为 α，β，则

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

证明 参照 2·1 的【定理】2. □

【定理】11. 设三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$ 的三个根为 α,β,γ，则

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$

证明 以 α,β,γ 为三个根并且 x^3 的系数为 a 的方程是

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0,$$

从而

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

恒成立．由于 $a\neq 0$，故有

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}.$$ □

【定理】12. 设 n 次方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$ 的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=-\frac{a_1}{a_0},\quad \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j=\frac{a_2}{a_0},$$

$$\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k=-\frac{a_3}{a_0},\ \cdots,\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

【定理】13．实系数的 n 次方程可表示成下列形式：

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_h)^{m_h}\cdot\{(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2\}^{n_1}\cdot$$

$$\cdot\{(x-\beta_2)^2+\gamma_2^2\}^{n_2}\cdots\{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2\}^{n_k},$$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_h;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k;\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_k$ 是实数，且。

$$m_1+m_2+\cdots+m_h+2(n_1+n_2+\cdots+n_k)=n.$$

3·5 二项方程

【定义】3．二项方程 在关于 x 的整式方程中，只有两项（其中一项是非零常数项））时，这个整式方程叫做二项方程．

【定理】14．在 $x^n\pm a^n=0$ $(a\neq0)$ 中，若用 ax 代替 x，则它变为 $x^n\pm1=0$．

【定理】15．若 α 是 $x^n-1=0$ 的一个根，则 α^m 也是根．其中 m 是任意整数．

证明 令 $f(x)=x^n-1$，则 $f(\alpha)=\alpha^n-1=0$，

故 $f(\alpha^m)=(\alpha^m)^n-1=(\alpha^n)^m-1=0$． □

【系】 设 α 是 $x^n+1=0$ 的一个根，则 α^{2m+1} 也是根．其中，m 是任意整数．

证明 令 $f(x)=x^n+1$，则 $f(\alpha)=\alpha^n+1=0$，∴ $\alpha^n=-1$．从而

$$f(\alpha^{2m+1})=(\alpha^{2m+1})^n+1=(\alpha^n)^{2m}\cdot\alpha^n+1$$
$$=(-1)^{2m}\cdot\alpha^n+1=0.$$ □

【定理】16．设 p 为质数，α 是 $x^p-1=0$ 的一个虚根，则方程 $x^p-1=0$ 的 p 个根是 $\alpha,\alpha^2,\cdots,\alpha^p(=1)$．

例 设 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\alpha$ 是 $x^3-1=0$ 的一个虚根，试证明 α^2,α^3 也是 $x^3-1=0$ 的根，

解 从 $x^3-1=0$ 得 $(x-1)(x^2+x+1)=0$，因而 α 是 $x^2+x+1=0$ 的根，

$$\alpha^2+\alpha+1=0,\qquad \alpha^3=1.$$

由 $(\alpha^2)^3-1=(\alpha^3)^2-1=1-1=0$，

可知 α^2 是 $x^3-1=0$ 的根．对 α^3 也同样可证．

【定理】16的证明可仿此例进行．

【定理】17．$x^n-1=0$ 的 n 个根是

$$x=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right),\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1.)$$

例 试求 $x^5-1=0$ 的五个根．

解 令 $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)(0\leqslant\theta\leqslant2\pi,r\geqslant0)$，并代入原方程，由棣莫佛(de Moivre)定理得

$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1$,

∴ $r=1$，且 $\cos 5\theta = 1$，$\sin 5\theta = 0$.

∴ $5\theta = 2n\pi (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

但是 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 因此

$$\theta = 0,\ \frac{2\pi}{5},\ \frac{4\pi}{5},\ \frac{6\pi}{5},\ \frac{8\pi}{5}.$$

从而 $x=1, \cos\frac{2n\pi}{5}+i\sin\frac{2n\pi}{5} (n=1,2,3,4)$.

【系】 $x^n+1=0$ 的 n 个根是

$$x=\cos\left\{\frac{(2k+1)\pi}{n}\right\}+i\sin\left\{\frac{(2k+1)\pi}{n}\right\}, (k=0,1,2\cdots,n-1.)$$

注意 假如 α 是 $x^n=1$ 的一个根，则其他的 $n-1$ 个根可用 α^2，$\alpha^3,\cdots,\alpha^n$ 表示.这是显然的.事实上，若令 $\alpha=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，则由棣莫佛定理，有 $\alpha^p=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\cdot p\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\cdot p\right)$.

特别是，令 $\alpha=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$，则这些根可用 α^0,α^1，α^2，$\cdots,\alpha^{n-1}$ 表示.

§ 4. 方程的一般理论

4·1 三次、四次方程的解法

【定理】1. 在三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 中，若把 $x=y-\frac{a}{3}$ 代入，则变为 $y^3+py+q=0$.其中，$p=-\frac{a^2}{3}+b$，$q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$.

证明 直接计算可得. □

【定理】2.（卡尔丹公式） 三次方程 $x^3+3px+q=0$ 的根是

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}.$$

其中，$A=\frac{-q+\sqrt{4p^3+q^2}}{2}$，$B=\frac{-q-\sqrt{4p^3+q^2}}{2}$，$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}=-p$.

证明 令 $x=u+v$，代入该方程得

$$u^3+v^3+3(u+v)(uv+p)+q=0.$$

又令　$uv+p=0$，则

$$u^3+v^3=-q, uv=-p.$$

从而，u^3，v^3是下列二次方程的根：

$$t^2+qt-p^3=0,$$

$$\therefore\quad t=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4p^3}}{2}.$$

$$\therefore\quad x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ x_1=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}.$$

其中，$A=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$，$B=\dfrac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$，$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}=-p$，

且 ω 是 1 的虚立方根. □

【定义】1. 判别式　q^2-p^3叫做三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 的判别式.

【定理】3. 三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 必有一个实根，而其余两个根分别是：

(1) 若 $q^2-p3>0$，为共轭的两个虚根；

(2) 若 $q^2-p^3=0$，为相等二实根；

(3) 若 $q^2-p^3<0$，为相异二实根.

证明　由3·2的【定理】2，方程 $x^3-3px-2q=0$ 至少具有一个实根. 又由本节【定理】2，它的三个根是

$$x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B},\ x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}.$$

其中　$A=q+\sqrt{q^2-p^3}$，$B=q-\sqrt{q^2-p^3}$，$\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}=p$，

令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

(1) 若 $q^2-p^3>0$，则 A，B 同是实数，x_1是实根. 而

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B}$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})i,$$

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{B}$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})i.$$

因而x_2，x_3是互为共轭的虚根。

(2) 若 $q^2-p^3=0$，则 $A=B=-q$.

$$x_1=2\sqrt[3]{q},\quad x_2=x_3=\sqrt[3]{q}(\omega+\omega^2)=-\sqrt[3]{q}.$$

因而，x_1是实根，$x_2=x_3$也是实根.

(3) 若$q^2-p^3<0$，则$\sqrt[3]{A}$，$\sqrt[3]{B}$同是虚数.现假设x_2是实根，则对于

$$x_2=\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}=-\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})i$$

右端第二项是实数，因而右端第一项也必须是实数.从而x_1，x_3也变为实数.

x_1,x_3是实根的情形也同样可证. □

【公式】 三次方程 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0(a_0\neq0)$的其他解法.

把原式用$f(x)$表示，并令

$$f(x)=A(x-p)^3+B(x-q)^3,$$

则$a_0=A+B$，$a_1=-Ap-Bq$，$a_2=Ap^2+Bq^2$，$a_3=-Ap^3-Bq^3$.其中p，q是方程 z 的

$$(a_0z+a_1)(a_2z+a_3)=(a_1z+a_2)^2$$

的根.若这样确定A，B，p，q的值，则$f(x)=0$变为

$$\left(\frac{x-p}{x-q}\right)^3=-\frac{B}{A}.$$

由此，作为三次的二项方程，可求出x的值.

例题 求$x^3+6x^2+9x+2=0$的解.

解 设原式为$f(x)$，且令

$$f(x)=A(x-p)^3+B(x-q)^3.$$

则由$f(x)=0$得到

$$\left(\frac{x-p}{x-q}\right)^3=-\frac{B}{A}.$$

与原式比较，又有

$$x^3+6x^2+9x+2=(A+B)x^3-3(Ap+Bq)x^2+3(Ap^2+Bq^2)x-(Ap^3+Bq^3),$$

$$\therefore\quad A+B=1,\quad 2=-(Ap+Bq),\quad 3=Ap^2+Bq^2,\quad 2=-Ap^3-Bq^3.$$

$$\begin{cases} A(p-q)=-(2+q), \\ A(p^2-q^2)=3-q^2, \\ A(p^3-q^3)=-(2-q^3) \end{cases}$$

$$\therefore\qquad p=-2+i,\quad q=-2-i,\quad A=B=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\left(\frac{x-p}{x-q}\right)^3=-1,$$

$$\therefore\qquad \frac{x-p}{x-q}=-1,\ -\omega,\ -\omega^2.$$

其中

$$\omega=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2},$$

$$\therefore\qquad x=-2,\qquad \frac{-6\pm\sqrt{3}}{3}$$

【定理】4.5（费拉利解法） 四次方程 $x^4+px^2+qx+r=0$ ($q\neq0$) 的解，可先求出三次方程 $y^3-py^2-4ry+4pr-q^2=0$ (叫做四次方程的分解方程)的一个根(令其为 y_1)，然后用下列二次方程的解表示

$$x^2+\frac{y_1}{2}=\pm\sqrt{y_1-p}\left\{x-\frac{q}{2(y-p)}\right\}.$$

例题 用费拉利方法解方程式

$$x^4-12x^3+48x^2-88x+60=0.$$

解 为了消去 x^3 项，用综合除法求出具有比原方程的根小 $\dfrac{-a_1}{4a_0}=3$ 的根的方程.

3	1	−12	48	−88	60
		3	−27	63	−75
	1	−9	21	−25	−15
		3	−18	9	
	1	−6	3	−16	
		3	−9		
	1	−3	−6		
		3			
	1	0			

$\therefore \qquad x^4-6x^2-16x-15=0.$

现取 $x^4=6x^2+16x+15$，在两端加上 $x^2y+\dfrac{y^2}{4}$ 得

$$\left(x^2+\frac{y}{2}\right)^2=(y+6)x^2+16x+15+\frac{y^2}{4}.$$

然而，上式右端必须是完全平方，故由判别式$=0$，即

$$64-(y+6)\left(15+\frac{y^2}{4}\right)=0.$$

$y^3+6y^2+60y+104=0$ （$x^4-6x^2-16x-15=0$ 的分解方程）

它的一个根是 $y_1=-2$，从而

$$\left(x^2+\frac{y_1}{2}\right)^2=(y_1+6)\left(x+\frac{8}{y_1+6}\right)^2,$$

$\therefore \quad x^2-1=\pm 2(x+2).$

从而

(i) 由 $x^2-2x-5=0$ 得 $x=1\pm\sqrt{6}$；

(ii) 由 $x^2+2x+3=0$ 得 $x=-1\pm\sqrt{2}\,i.$

答：$x=4\pm\sqrt{6}$， $2\pm\sqrt{2}\,i.$

【定理】5. 四次方程 $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ $(a_0\neq 0)$ 的四个根 x_1, x_2, x_3, x_4，与它的分解方程的根 p_1, p_2, p_3 之间，有下列关系：

(1) $4(p_2-p_3)=a_0(x_1-x_2)(x_3-x_4)$；

(2) $4(p_3-p_1)=a_0(x_2-x_3)(x_1-x_4)$；

(3) $4(p_1-p_2)=a_0(x_3-x_1)(x_2-x_1)$.

另外，若四次方程有两个根相等，则分解方程也有两个根相等，反过来也对．

【定理】6.（欧拉公式） 在四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 中，令 $x=y-\dfrac{a}{4}$，则原方程变为 $y^4+py^2+qy+r=0$ 的形式．其次，令 $2y=u+v+w$，则 u^2, v^2, w^2 是 $t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0$ 的根．设这些根是 t_1, t_2, t_3，则

$$x_1=\frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{2}, \qquad x_2=\frac{\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}}{2},$$

$$x_3=\frac{-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}}{2}, \qquad x_4=\frac{-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{2}.$$

4·2　代数学的基本定理

【定理】7.（代数学的基本定理） 复系数 n 次方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ (a_0\neq0)$$

至少具有一个复根.

【定理】8 令 $f(x)$ 表示【定理】7 中所述的 n 次方程式的左端，则有满足

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

的复数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 存在，假如把它整理成

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)^{m_1}(x-\beta_2)^{m_2}\cdots(x-\beta_k)^{m_k},$$

其中，$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是正整数，$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$. 这时，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 分别叫做 $f(x)=0$ 的 m_1 重根，m_2 重根，$\cdots$，m_k 重根.

证明　根据【定理】7，$f(x)=0$ 至少具有一个复根 α_1，使得有

$$f(x)=(x-\alpha_1)g_{n-1}(x).$$

其中，$g_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式. 同样，对于 $g_{n-1}(x)$ 也使用【定理】7，必存在一个复根 α_2 和 $n-2$ 次多项式 $g_{n-2}(x)$，使得有

$$g_{n-1}(x)=(x-\alpha_2)\cdot g_{n-2}(x).$$

所以 $f(x)$ 可表示为

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)g_{n-2}(x).$$

把这个过程重复进行下去，最后就有 n 个复数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 存在，使得

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

其次，若在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中间，有相等的值，而所有不同的值为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ $(k<n)$，且 β_1 有 m_1 个，β_2 有 m_2 个，$\cdots$，β_k 有 m_k 个，则有

$$f(x)=a_0(x-\beta_1)^{m_1}(x-\beta_2)^{m_2}\cdots(x-\beta_k)^{m_k},$$

其中，$m_1+m_2+\cdots+m_k=n$.　□

【定理】9. 如果实系数的 n 次方程具有复根 $\alpha(=a+bi, a, b$ 是实数)，则其共轭复数 $\bar{\alpha}\ (=a-bi)$ 也是此方程的根，且它们的重（根）数也是相同的.

证明　如果实系数的三次方程 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0\ (a_0\neq0)$ 具有复根 $\alpha=a+bi$ (a, b 是实数)，则由 $f(\alpha)=0$，有

$$a_0(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i)+a_1(a^2+2abi-b^2)+a_2(a+bi)+a_3=0,$$

$$\{a_0(a^3-3ab^2)+a_1(a^2-b^2)+a_2a+a_3\}+\{a_0(3a^2b-b^3)+2a_1ab+a_2b\}i=0,$$

其中，a_0, a_1, a_2, a_3, a 及 b 是实数，从而

$$\begin{cases}a_0(a^3-3ab^2)+a_1(a^2-b^2)+a_2a+a_3=0.\\a_0(3a^2b-b^3)+2a_1ab+a_2b=0.\end{cases}$$

另一方面，如计算 $f(\bar{\alpha})$，则有

$$\begin{aligned}&a_0(\bar{\alpha})^3+a_1(\bar{\alpha})^2+a_2(\bar{\alpha})+a_3\\&=a_0(a^3-3a^2bi-3ab^2+b^3i)+a_1(a^2-2abi-b^2)+a_2(a-bi)+a_3\\&=\{a_0(a^3-3ab^2)+a_1(a^2-b^2)+a_2a+a_3\}-i\{a_0(3a^2b-b^3)+2a_1ab+a_2b\}\\&=0.\end{aligned}$$

同理可证，该结论对 4 次，5 次，…，n次的情形也成立。 □

注意 共轭复数的四则运算具有下列性质：

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

应用这些性质可得

$$(\overline{mz})=m\cdot\bar{z}\quad(m\text{ 是实数}),$$
$$(\overline{z^n})=(\bar{z})^n\quad(n\text{ 是自然数}).$$

由此，下列关系式成立（假定已知 $z=0\rightleftarrows\bar{z}=0$.）

"对于实系数的整式 $f(x)$，有 $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$"。

若应用上述性质，则【定理】9 可另行证明如下：

另证 设 z 是 $f(x)$ 的一个虚根，即 $f(z)=0$. 由前述性质，$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$. 再者，若 $f(z)=0$，则 $\overline{f(z)}=0$. 因而由 $f(z)=0$ 得 $\overline{f(z)}=0$，$\therefore\ f(\bar{z})=0$. 所以 $\bar{z}$ 也是 $f(x)=0$ 的根。 □

【定理】10. n 次方程 $f(x)=0$以 α 为 k 重根 $(k=1,2,\cdots)$ 的充分必要条件是

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha)=0,\ f^{(k)}(\alpha)\neq0.$$

证明 如果三次方程 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$（$a_0\neq0$）以 α 为二重根，则应用【定理】2 它可以表示成

$$f(x)=a_0(x-\alpha)^2(x-\beta)\qquad(\alpha\neq\beta).$$

于是，求关于 x 的一阶、二阶导数，得

$$\begin{aligned}f'(x)&=a_0\ \{2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2\}\\&=a_0(x-\alpha)\ \{2(x-\beta)+(x-\alpha)\},\qquad\therefore\ f'(\alpha)=0.\end{aligned}$$
$$f''(x)=a_0\ \{2(x-\beta)+4(x-\alpha)\},$$
$$\therefore\ f''(\alpha)=2a_0(\alpha-\beta)\neq0.$$

从而 $\quad f(\alpha)=f'(\alpha)=0,\qquad f''(\alpha)\neq0.$

反之，设 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，$f''(\alpha)\neq0$. 由

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

得　$$\begin{cases} f'(x)=3a_0x^2+2a_1x+a_2, \\ f''(x)=6a_0x+2a_1. \end{cases}$$

从而，由条件 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$，　$f''(\alpha)\neq 0$，得

$$\begin{cases} a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3=0, & ① \quad \therefore a_3=-a_0\alpha^3-a_1\alpha^2+(3a_0\alpha^2+2a_1\alpha)\alpha. \\ 3a_0\alpha^2+2a_1\alpha+a_2=0, & ② \quad \therefore a_2=-3a_0\alpha^2-2a_1\alpha. \\ 6a_0\alpha+2a_1\neq 0, & ③ \quad \therefore 3a_0\alpha+a_1\neq 0. \end{cases}$$

把①,②,③代入 $f(x)$ 得

$$\begin{aligned} f(x)&=a_0\ \{x^3-3\alpha^2x+3\alpha^3-\alpha^3\}\ +a_1\ \{x^2-2\alpha x-\alpha^2+2\alpha^2\} \\ &=a_0(x^3-\alpha^3)+a_1(x^2-2\alpha x+\alpha^2) \\ &=(x-\alpha)^2\ \{a_0(x+2\alpha)+a_1\}\ . \end{aligned}$$

在这里，用 $(x-\alpha)$ 除 $a_0(x+2\alpha)+a_1$ 后的余式 $3a_0\alpha+a_1$ 不为 0，因而 α 是 $f(x)=0$ 的二重根．

一般的情形也同样可证明．　□

【定理】11． $f(x)=0$ 的 k 重根是 $f'(x)=0$ 的 $k-1$ 重根．

证明　先证明，当 α 是三次方程 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的二重根时，α 是 $f'(x)=0$ 的根．

由条件可知，存在一个 β 使下式成立：

$$f(x)=a_0(x-\alpha)^2(x-\beta)\qquad(\alpha\neq\beta).$$

并且有下列恒等式

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=a_0\ \{x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta\}\ .$$

从而

$$a_1=-a_0(2\alpha+\beta),\qquad a_2=a_0(\alpha^2+2\alpha\beta),\qquad a_3=-a_0\alpha^2\beta.$$

应用这些结果，得

$$\begin{aligned} f'(x)&=3a_0x^2+2a_1x+a_2 \\ &=3a_0x^2-2a_0(2\alpha+\beta)x+a_0(\alpha^2+2\alpha\beta) \\ &=a_0(x-\alpha)\ \{3x-(\alpha+2\beta)\}\ . \end{aligned}$$

从而，α 是 $f'(x)=0$ 的根．并且由于 $\alpha-\beta\neq 0$，所以 $3x-(\alpha+2\beta)$ 不能用 $x-\alpha$ 整除．

一般的情形也同样可证．　□

【定理】12． 若既约分数 p/q 是整系数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0a_n\neq 0)$ 的根，则 p 是 a_n 的约数，q 是 a_0 的约数．

证明　假如 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ $(a_0a_3\neq 0)$ 以既约分数 $\frac{p}{q}$ 为它的

一个根，则

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=a_0\frac{p^3}{q^3}+a_1\frac{p^2}{q^2}+a_2\frac{p}{q}+a_3$$

$$=\frac{1}{q^3}(a_0p^3+a_1p^2q+a_2pq^2+a_3q^3)=0,$$

$$\therefore\quad -\frac{a_0p^3}{q}=a_1p^2+a_2pq+a_3q^2.$$

式中，$a_0\neq0$，且右端是整数，因而左端也是整数．但是，p，q 是既约的，因而 q 是 a_0 的约数．

同样，由 $-\frac{a_3q^3}{p}=a_0p^2+a_1pq+a_2q^2$ 可证，p 是 a 的约数．

一般地，n 次的情形也同样可证． □

【系】 若整系数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_n\neq0)$ 有有理根，则它是整数，且是 a_n 的约数．

证明 应用【定理】12，这时 $a_0=1$，所以 $q=1$，根变为 p（整数）． □

【定理】13． 实系数的 n 次方程 $f(x)=0$，$p<q$，

(1) 当 $f(p)\cdot f(q)>0(p<q)$ 时在 (p,q) 上有偶数个根．

(2) 当 $f(p)\cdot f(q)<0$ 时在 (p,q) 上有奇数个根．反过来也对．

例 考查 $f(x)=x^3+x^2-5x+3=0$ 的实根数目．例如，$f(-4)\cdot f(-2)=-225<0$，因而在 $[-4,-2]$ 之间有奇数个实根（1个）．

$f(-2)\cdot f(0)=27>0$，因而在 $[-2,\ 0]$ 之间有偶数个实根(0个)．

$f(0)\cdot f(2)=15>0$，因而在 $[0,\ 2]$ 之间有偶数个实根（2 个）．

$f(-4)f(2)=-125<0$，因而在 $[-4,\ 2]$ 之间有奇数个实根(3个)．

注意 (1) 这里，偶数也包括 0 在内；

(2) m 重根算成 m 个根．

4·3 根的变换

【定理】14． 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq0)$ 的根，则以 $\alpha_1-c,\alpha_2-c,\cdots,\alpha_n-c$ 为根的方程可用 $f(x+c)=0$ 表示．其系数可反复用综合除法求出．

证明 二次方程式 $f(x)=x^2+4x+3=0$的根是$-1,-3$，这时，以$-1-c$，$-3-c$ 为根的二次方程是

$$g(x)=k(x+1+c)(x+3+c)$$

$$=k\{x^2+(2c+4)x+(c^2+4c+3)\}=0\quad(k\neq0).$$

另一方面，

$$f(x+c)=(x+c)^2+4(x+c)+3$$
$$=x^2+(2c+4)x+(c^2+4c+3).$$

从而 $g(x)$ 的根与 $f(x+c)=0$ 的根是一致的．为了求得 $f(x+c)=0$ 的系数，也可由反复使用综合除法得到．即

$$\begin{array}{c|ccc}
c & 1 & 4 & 3 \\
 & & c & c^2+4c \\
\hline
 & 1 & c+4 & c^2+4c+3 \\
 & & c & \\
\hline
 & 1 & 2c+4 &
\end{array}$$

∴ $f(x+c)=x^2+(2c+4)x+c^2+4c+3.$

一般的情形也同样可证． □

【定理】15． 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq0)$的根，则

(1) 以 $k\alpha_1$，$k\alpha_2,\cdots,k\alpha_n$ $(k\neq0)$ 为根的方程是 $f(x/k)=0$，即

$a_0x^n+a_1kx^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k^{n-1}x+a_nk^n=0$；

(2) 当α_1，α_2，…，α_n全都不为 0 时，以$\dfrac{1}{\alpha_1}$，$\dfrac{1}{\alpha_2},\cdots,\dfrac{1}{\alpha_n}$为根的方程是 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$，即

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0.$$

证明 (1) 先求以$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0(a\neq0)$的根的 k倍 $(k\neq0)$ 作为根的方程．

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $f(x)=0$ 的根，则以 $k\alpha_1,k\alpha_2,k\alpha_3(k\neq0)$作为根的三次方程 $g(x)$是

$$g(x)=a_0(x-k\alpha_1)(x-k\alpha_2)(x-k\alpha_3)$$
$$=a_0\{x^3-k(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+k^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)x-k^3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}$$

另一方面，由根与系数的关系有

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{a_1}{a_0},\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=\frac{a_2}{a_0},\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_3}{a_0}.$$

把上述关系代入 $g(x)=0$，得

$$a_0\left\{x^3+k\frac{a_1}{a_0}x^2+k^2\frac{a_2}{a_0}x+k^3\frac{a_3}{a_0}\right\}=0,$$

∴ $a_0x^3+a_1kx^2+a_2k^2x+a_3k^3=0.$

但是，由 $f(x/k)=0$ 得

$$a_0x^3+a_1kx^2+a_2k^2x+a_3k^3=0.$$

从而，以求得的 $k\alpha_1$，$k\alpha_2$，$k\alpha_3$ 作为根的方程是

$$f(x/k)=0.$$

一般的情形也同样可证.

(2) 以$\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}$为根的方程是

$$g(x)=a_0\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_3}\right)$$

$$=a_0\left\{x^3-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}\right)x^3+\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_1}\right)x-\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\right\}$$

$$=0.$$

另一方面，由根与系数的关系有

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{a_1}{a_0},\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=\frac{a_2}{a_0},\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{a_3}{a_0}.$$

把它们 代入$g(x)=0$,得

$$g(x)=a_0\left\{x^3-\frac{\left(\frac{a_2}{a_0}\right)}{\left(\frac{-a_3}{a_0}\right)}x^2+\frac{\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)}{\left(-\frac{a_3}{a_0}\right)}x+\frac{a_0}{a_3}\right\}$$

$$=a_0\left\{x^3+\frac{a_2}{a_3}x^2+\frac{a_1}{a_3}x+\frac{a_0}{a_3}\right\}=0$$

$$\therefore\quad a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

但是

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0\left(\frac{1}{x}\right)^3+a_1\left(\frac{1}{x}\right)^2+a_2\left(\frac{1}{x}\right)+a_3=0.$$

$$\therefore\quad a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

从而，以 $f(x)=0$ 的根的倒数作根的方程可用 $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$给出.

一般的情形也同样可证.

【理定】16. 设α_1，α_2，…，α_n是 n 次方程 $f(x)=0$的根，则以

$$\alpha_1+\frac{a_1}{na_0},\alpha_2+\frac{a_1}{na_0},\cdots,\alpha+\frac{a_1}{na_0}$$

作为根的方程 $f\left(x-\dfrac{a_1}{na_0}\right)=0$，没有 $(n-1)$ 次的项．

证明　证明 $n=3$ 的情形，在【定理】14中，令

$$C=-\frac{a_1}{na_0},\qquad 则\quad f\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)=0,$$

$$\therefore\quad a_0\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^3+a_1\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)^2+a_2\left(x-\frac{a_1}{3a_0}\right)+a_3=0.$$

经整理后可知，x^2 的系数等于 0．

一般的情形也同样可证．　□

例题　对于 $f(x)=2x^3-12x^2+5x+4=0$，试作变换以使 x^2 的系数为 0．

解　令

$$y=x+\frac{a_1}{3a_0}=x-2$$

则由 $f(x)=0$，得 $f(y+2)=0$，即

$$2(y+2)^3-12(y+2)^2+5(y+2)+4=0,$$

$$\therefore\quad 2y^3-19y-18=0.$$

另解　反复使用综合除法，得到具有比 $f(x)=0$ 的各根仅仅少 2 的根的方程是

$$2x^3-19x-18=0.$$

这是由 $f(x+2)=0$ 经整理后得到的．

2	2	−12	5	4
		4	−16	−22
	2	−8	−11	−18
		4	−8	
	2	−4	−19	
		4		
	2	0		

注意　这又是

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)[2x^2-8x-11]-18\\&=(x-2)[(x-2)\{2(x-2)\}-19]-18\\&=(x-2)[(x-2)\{2(x-2)+0\}-19]-18\\&=2(x-2)^3-19(x-2)-18.\end{aligned}$$

从而，具有比 $f(x)=0$ 的各根仅仅少 2 的根的方程式是

$$g(x)=2x^3-19x-18=0.$$

4·4 判别式·结式

【定义】2. 判别式 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 次方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq0)$ 的 n 个根，则

$$D=a_0^{2(n-1)}\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

叫做 $f(x)=0$ 的判别式.

例题1. 当 $n=2$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 的判别式是 $D=b^2-4ac$.

证明 设该方程式的根为 α,β，则由判别式的定义，有

$$D=a^2(\alpha-\beta)^2.$$

又根据根与系数的关系（2.1 的【定理】2），有

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

$$\therefore\quad D=a^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=a^2\left\{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\right\}=b^2-4ac.$$

□

例题2. 当 $n=3$ 时，$f(x)=x^3+3px+q=0$ 的判别式是 $D=-27(q^2+4p^3)$.

证明 设 $f(x)=0$ 的三个根是 α,β,γ，则由判别式的定义，有

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2.$$

又根据根与系数的关系（3.4 的【定理】12），有

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3p,\quad \alpha\beta\gamma=-q,$$

即 $\alpha+\beta=-\gamma,\quad \alpha\beta=3p-(\alpha+\beta)\gamma=3p+\gamma^2.$

从而 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\gamma^2-4(3p+\gamma^2)=-3(\gamma^2+4p).$

同样地有 $(\alpha-\gamma)^2=-3(\beta^2+4p),$

$(\beta-\gamma)^2=-3(\alpha^2+4p),$

从而 $D=-27(\alpha^2+4p)(\beta^2+4p)(\gamma^2+4p).$

而 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-6p,$

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=(3p)^2,$

$$\therefore\quad D=-27\{q^2+4p(9p^2)+16p^2(-6p)+64p^3\}$$
$$=-27(q^2+4p^3).$$

□

【定理】17. n 次方程式 $f(x)=0$ 有等根的充分必要条件是 $D=0$.

证明 $n=2$ 的情形 对于 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，由求根的公式(2.1的【定理】1)知，$D=b^2-4ac=0$ 是具有等根的充分必要条件.

$n=3$ 的情形 对于 $f(x)=x^3+3px+q=0$，由卡尔丹公式(4.1的【定理】2)知，若

$$D=-27(q^2+4p^3)=0,$$

则有 $$A=B=-\frac{q}{2},$$

$$\therefore\quad x_2=x_3=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$ □

【定理】18. 设 $f(x)=x^3+3px+q=0$ 的三个根为 α,β,γ，则

$$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=-27(4p^3+q^2).$$

这时

(1) 当且仅当 $D>0$ 时，此方程有相异的三个实根.

(2) 当且仅当 $D=0$ 时，有一个二重根.

(3) 当且仅当 $D<0$ 时，有一对共轭复根.

证明 参看4.1的【定理】3的证明 □

【定理】19. $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 与 $g(x)=b_0x^2+b_1x+b_2=0$ 具有公共根的充分必要条件是

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

证明 设 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 具有公共根 α，则下列各式成立：

$$(A)\begin{cases} \alpha f(\alpha)=a_0\alpha^4+a_1\alpha^3+a_2\alpha^2+a_3\alpha=0,\\ f(\alpha)=a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3=0,\\ \alpha^2\cdot g(\alpha)=b_0\alpha^4+b_1\alpha^3+b_2\alpha^2=0,\\ \alpha g(\alpha)=b_0\alpha^3+b_1\alpha^2+b_2\alpha=0,\\ g(\alpha)=b_0\alpha^2+b_1\alpha+b_2=0. \end{cases}$$

在这里，设 α 的系数构成的行列式为

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

由于在R的第1，第2，第3，第4列中各乘以α^4，α^3，α^2，α，再加到最末一列上，由(A)这一列便为0，所以R=0.

反之，当R=0时，在R的第1，第2，第3，第4列上各乘以x^4，x^3，x^2，x，再加到最末一列上，便得

$$0=R=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & xf(x) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & x^2g(x) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & xg(x) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & g(x) \end{vmatrix}.$$

把R按第4列展开，便化为下列形式：

$$(Ax+B)f(x)=(Cx^2+Dx+E)g(x).$$

如果在$f(x)$和$g(x)$中没有公共根，则三次式$f(x)$将除尽二次式Cx^2+Dx+E.这是一个矛盾.因而$f(x)=0$与$g(x)=0$具有公共根. □

4·5 实系数方程

【定义】3. $f(x)$的符号的变化　对给定数字系数的n次方程

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq0)$，若其系数列$a_0$，$a_1,\cdots,a_n$中相邻的两个系数异号，就叫做有符号变化(系数为0时，则从系数列中略去不计).这种符号变化数，叫做$f(x)$的变号数，用W表示.

【定理】20.(笛卡尔符号法则)

(1) 若数值系数的n次方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0(a_0\neq0)$$

的正根的数目为$N_{0,\infty}$(m重根，算作m个根)，则$N_{0,\infty}=W-2h$.其中，h是0或正整数.

(2) 若$f(x)=0$的负根的数目为$N_{-\infty,0}$，且$f(-x)$的变号数为W'，

则

$$N_{-\infty,0}=W'-2h'.$$

其中,h'是0或正整数.

例题 求$f(x)=x^5-2x^3+3x^2-4x-5=0$的正根数目与负根数目.

解 系数列{1,-2,3,-4,-5}的符号变化数$W=3$,因而$N_{0,\infty}=3$或1

另外,对于$f(-x)=-x^5+2x^3+3x^2+4x-5=0$,$W'=2$,因而$N_{-\infty,0}=2$或0.

【定理】21.(傅立叶法则) 设$f(x)=0$是数值系数的n次方程,$f(x)$及其各阶导数$f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x)$的符号变化数用$V(x)$表示.这时,位于区间$[a,b]$上的$f(x)=0$的实根数目$N_{a,b}$,在$f(a)\cdot f(b)\neq0$时,是

$$N_{a,b}=V(a)-V(b)-2h.$$

其中,h是0或正整数.

【定义】4.(根的分离) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$次方程$f(x)=0$的实根,若把$\alpha_i$包含在区间$(a_i,b_i)$内,而其他根不包含在此区间内,就叫做根的分离.

例题 试分离$f(x)=x^5-2x^3+3x^2-4x-5=0$的根.

解 $f'(x)=5x^4-6x^2+6x-4$,

$f''(x)=20x^3-12x+6$,

$f^{(3)}(x)=60x^2-12$,

$f^{(4)}(x)=120x$,$f^{(5)}(x)=120$.

x	f	f'	f''	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$	$V(x)$
0	−	−	+	−	0	+	3
1	−	+	+	+	+	+	1
2	+	+	+	+	+	+	0

从而,正根的数目是$N_{0,\infty}=V(0)-V(\infty)-2h=3$或1.而且在区间(0,1)内,有2个或0个根,在区间(1,2)内,有1个根.

其次,求负根的数目.把$f(-x)=0$加以整理,得

$g(x)=x^5-2x^3-3x^2-4x+5=0$,

$g'(x)=5x^4-6x^2-6x-4$,

$g''(x)=20x^3-12x-6$,

$g^{(3)}(x)=60x^2-12$,

$g^{(4)}(x)=120x$,$g^{(5)}(x)=120$.

x	g	g'	g''	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$	$g^{(5)}$	$V(x)$
0	+	−	−	−	0	+	2
1	−	−	−	+	+	+	1
2	+	+	+	+	+	+	0

从而，$f(x)=0$ 的负根数是 $N_{-\infty,0}=2$，在区间$(-1,0)$内有一个，在区间$(-2,-1)$内有一个。

【定义】5．斯图姆函数列 设$f(x)$为实系数的n次多项式，令$f_1(x)=f'(x)$，以$r_2(x)$表示用$f_1(x)$除$f(x)$所得余式反号后的多项式。然后用$r_2(x)$除$f_1(x)$并以$r_3(x)$表示用$r_2(x)$除$f_1(x)$所得余式反号后的多项式。如此继续下去，最后一个记作$r_s(x)$（非零常数），这样的序列组

$$\{f(x),f_1(x),r_2(x),\cdots,r_s(x)\}$$

叫做斯图姆函数（或斯图姆函数列）。

【定理】22． $f(x)=0$ 的位于区间$[a,b]$上的实根数目$N_{a,b}$（不计重根的重数），在$f(a)\cdot(b)\neq0$时是

$$N_{a,b}=V(a)-V(b).$$

其中，$V(x)$是斯图姆组的变号数。

例题 试求 $f(x)=x^3-6x-3=0$ 的正根及负根数目，且将各个根分离。

解 $f'(x)=3x^2-6=f_1$.

	(f_1)	3	0	−6	(f)	1	0	−6	−3	1
		1	0	−2		1	0	−2		
1		4	0	−8				−4	−3	
		4	3		(f_2)			4	3	
			−3	−8						
−3			−12	−32						
			−12	−9						
				−23						
			(f_3)	23						

$\therefore\ f=x^3-6x-3,\quad f_1=x^2-2,\quad f_2=4x+3,\quad f_3=23.$

x	f	f_1	f_2	f_3	$V(x)$
$-\infty$	−	+	−	+	3
0	−	−	+	+	1
$+\infty$	+	+	+	+	0

从而

正根数 $N_{0,\infty}=V(0)-V(+\infty)=1$，

负根数 $N_{-\infty,0}=V(-\infty)-V(0)=2$，

又

x	f	f_1	f_2	f_3	$V(x)$
−3	−	+	−	+	3
−2	+	+	−	+	2
−1	+	−	−	+	2
0	−	−	+	+	1
1	−	−	+	+	1
2	−	+	+	+	1
3	+	+	+	+	0

从而

在(2，3)内有一个正根，在(−3，−2)内和(−1，0)内各有一个负根.

4·6　根的存在范围

根的存在范围的历史　最早企图要证明根的存在定理的是达兰贝尔，而最早给出严格证明的，则是高斯(*Gauss*). 他的第一个证明在1799年用博士论文发表出来，接着在1816年又相继发表了第二个及第三个证明. 把第一个证明改进后的第四个证明是1850年庆祝他荣获博士学位50周年之际，在哥廷根学术协会的记要上公布的.

【定理】23. 对 n 次方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ $(a_0\neq 0)$，若令 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$，则 $f(x)=0$ 的根的绝对值小于

$$1+\frac{M}{|a_0|}.$$

证明　当 $|a_0|(|x|-1)\geqslant M$ 时，$|f(x)|>0$. 事实上，

$$|f(x)|\geqslant|a_0||x|^n-M\{|x|^{n-1}+\cdots+|x|+1\}$$

$$>|a_0||x|^n-|a_0|(|x|-1)\frac{|x|^n-1}{|x|-1}=|a_0|>0.$$

从而，对于 $f(x)=0$ 的根 α，有

$$|\alpha|<1+\frac{M}{|a_0|}.$$ □

【定理】24.（挂谷定理）在 n 次方程 $f(x)=0$ 的根与系数之间，有下列关系：

(1) 若 $a_0>a_1>\cdots>a_n>0$，则根的绝对值小于 1；

(2) 若 $a_0\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，则根的绝对值不大于 1；

(3) 若 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$，则根的绝对值大于 1；

(4) 若 $0\leqslant a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$，则根的绝对值不小于 1.

证明 (1) 令 $|x|=\rho$，则

$$|(x-1)f(x)|=|a_0x^{n+1}-(a_0-a_1)x^n-\cdots-(a_{n-1}-a_n)x-a_n|$$
$$\geqslant a_0\rho^{n+1}-\{(a_0-a_1)\rho^n+(a_1-a_2)\rho^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\rho+a_n\}$$
$$=(\rho-1)f(\rho).$$

x 非正，且 $\rho\geqslant1$ 时，$|(x-1)f(x)|>(\rho-1)f(\rho)\geqslant0$．$x$ 为正时，$f(x)>0$：总之，若 $\rho\geqslant1$，则 $f(x)>0$．从而，$f(x)=0$ 的根的绝对值小于 1.

(2) 对于 $|x|=\rho>1$，$|(x-1)f(x)|\geqslant(\rho-1)f(\rho)>0$，从而 $|f(x)|>0$，

$\therefore$ $f(x)=0$ 的根的绝对值不大于 1.

(3)、(4) 也同样可证. □

【定理】25. 若 n 次方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\,(a_0\neq0)$ 的系数全为正，则对于任何根都有

$$\min\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}\leqslant|\alpha|\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}.$$

证明 如果 $g(x)=f(rx)=a_0r^nx^n+a_1r^{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}rx+a_n=0$ 的系数满足

$$a_0r^n\geqslant a_1r^{n-1}\geqslant\cdots\geqslant a_{n-1}r\geqslant a_n>0,$$

即
$$r=\max\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}.$$

则对于 $g(x)=0$ 的根 β 有 $|\beta|\leqslant1$．从而 $f(x)=0$ 的根 $|\alpha|=|r\beta|\leqslant r$.

同样，假如 $0<a_0r^n\leqslant a_1r^{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}r\leqslant a_n$，

即
$$D=\min\left\{\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\right\}.$$

则 $|\beta|\geqslant1$，从而 $|\alpha|\geqslant D$. □

注意 求解整式方程的一般方法是：(1) 利用因式分解和倒数方程的性质等等，这对较简单的问题，是有效的． (2) 在二次、三次、四次的情形

下，无论如何都能用求根公式求解．（3）对于五次或五次以上的某些方程，有时可利用4.2及4.3中所述的基本定理和根的变换求解．（4）对于五次以上的最一般的方程，可以求出实根的个数，根的界限以及将根分离。而且，可以利用根的近似公式（牛顿法，贺拉法等）求解．近来，由于电子计算机的迅速发展和运用，在任何情形下都可以计算出逼近根的真值的任意精度的近似值．

§5．不 等 式

5·1　线性不等式

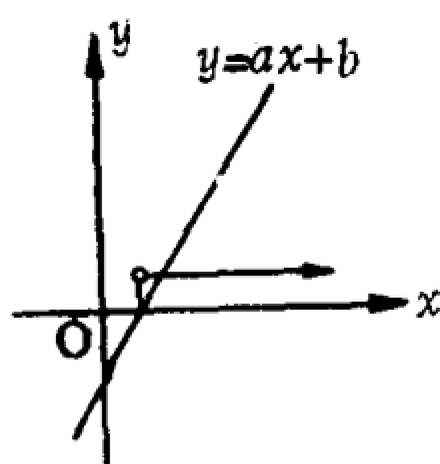
【定义】1．线性不等式　我们把可以表示成（线性函数）>0（或⩾0）形式的关系式，叫做线性不等式．

注意　本节中所用的字母都假定为实数．

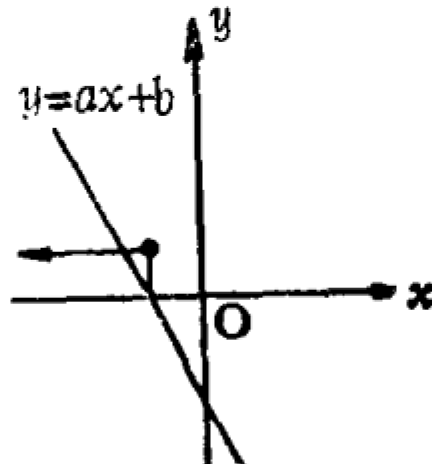
【定理】1． $ax+b>0$ 的解是

（1）当 $a>0$ 时，$x>-\dfrac{b}{a}$；

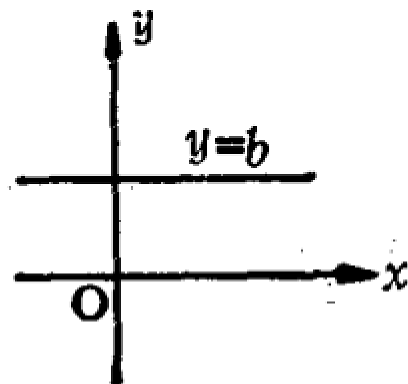
(1)$a>o$



(2)$a<o$



(3)$a=o$, $b>o$



(4)$a=o$, $b\leqslant o$

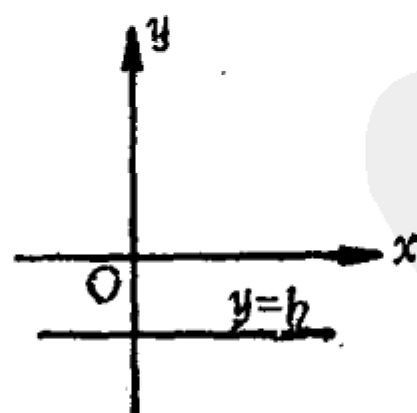


图 2-10

(2) 当 $a<0$ 时，$x>-\frac{b}{a}$;

(3) 当 $a=0$ 且 $b>0$ 时，x 不确定(即任何实数 x 都是解)；

(4) 当 $a=0$ 且 $b\leqslant 0$ 时，无解.

注意 $ax+b>0$ 的几何意义：

如图 2—10 所示，其解表示使直线 $y=ax+b$ 位于 x 轴上方的一切 x 值的全体.

5·2 二次不等式

【定义】2. 二次不等式 不等式 $ax^2+bx+c>0$ (或 $\geqslant 0$) ($a\neq 0$) 称为二次不等式.

【定理】2. 关于二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 的解，若 $ax^2+bx+c=0$ 具有二实根 α，$\beta(\alpha<\beta)$，则由 $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$，有

(1) $a>0$ 时，$x<\alpha$ 或 $x>\beta$;

(2) $a<0$ 时，$\alpha<x<\beta$.

其中，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

证明 如图 2—11 所示.

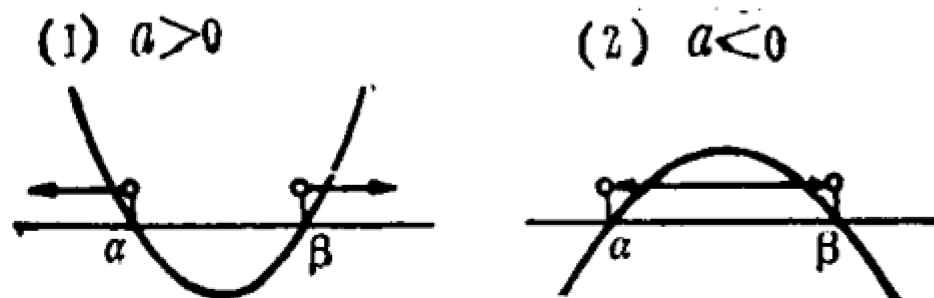


图 2-11

(1) $a>0$ 时，$x<\alpha$ 或 $x>\beta$ 可由下表得出.

	$x<\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$\beta<x$
$(x-\alpha)$	$-$	$+$	$+$
$(x-\beta)$	$-$	$-$	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	$-$	$+$

(2) $a<0$ 时，$\alpha<x<\beta$ 也可由类似的表得出. □

【定理】3. 二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq 0)$ 对一切实数 x 恒成立的充分必要条件是

$$a>0,\ b^2-4ac<0.$$

【证明】 因为 $a\neq 0$，所以

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

当 $a>0$，$b^2-4ac<0$ 时，$ax^2+bx+c>0$. □

注意1. 二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a\neq 0)$ 的几何解法.

设 $y=ax^2$， ①

$y=-bx-c$ ②

则只要求得使①的图形在②的图形上方的那些 x 值即可.

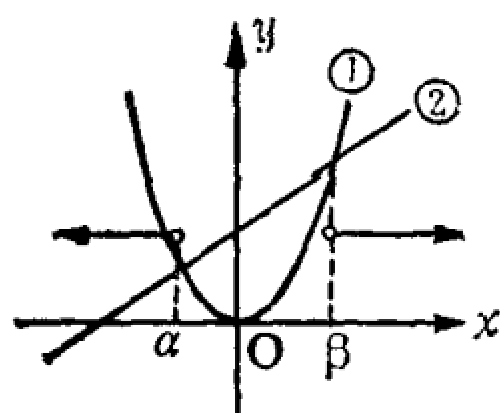


图 2-12

2. 曲线①和②的交点的 x 坐标(图 2-12) 就是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根. 如果①和②相切，切点的 x 坐标就是 $ax^2+bx+c=0$ 的等根.

再有，当它们没有公共点时，

(i) 若 $a>0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立;

(ii) 若 $a<0$，则 $ax^2+bx+c>0$ 不成立.

5·3 高次不等式

【定义】3. **n 次不等式** 我们把可以表示成(实系数的 n 次整函数) >0 (或 $\geqslant 0$) 形式的关系式，叫做 n 次不等式. 此外，在不等式中，还有分式不等式及无理式不等式，等等.

【定义】4. **条件不等式. 绝对不等式** 象 $(x-1)(x-2)>0$ 这样的不等式，仅仅对属于某一特定实数值集合的 x 的值才成立，这样的不等式叫做条件不等式. 又，象 $x^2+1>0$ 这样的不等式，x 取任意实数值，不等式都恒成立，这样的不等式叫做绝对不等式.

【定理】4. n 次不等式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n>0$ $(a_0\neq 0)$，在 $f(x)$ 改写成下列形式

$$f(x)=a_0\prod_{i=1}^{h}(x-a_i)^{m_i}\prod_{i=1}^{l}\left\{(x-\beta_i)^2+r_i^2\right\}^{n_i}$$

时与 $a_0\prod_{i=1}^{h}(x-c_i)^{m_i}>0$ 同解，

其中 $\sum_{i=1}^{h}m_i+2\sum_{j=1}^{k}n_j=n$，

α_i，β_i，γ_i $(i=1,2,\cdots,h;\ j=1,2,\cdots,k)$ 是实数。

【证明】 因为 $(x-\beta_j)^2+\gamma_j^2>0$ $(j=1,2,\cdots,k)$，故定理成立。 □

例题1. 求解 $(x-1)^2(x-2)(x-3)<0$.

解 $(x-1)^2(x-2)(x-3)=0$ 的根是 1,2,3.

	$x<1$	$1<x<2$	$2<x<3$	$3<x$
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$x-2$	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$f(x)$	+	+	−	+

因而所求的 x 值的范围是 $2<x<3$.

例题2. 求解 $(x-1)^2(x-2)(x-3)\leqslant 0$.

解 由例题1的符号表和所求得的根是 1,2,3 可知，所求的 x 值的范围是 $x=1$，$2\leqslant x\leqslant 3$.

5·4 不等式的性质

基本公式

【定理】5. (1) 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$；

(2) 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$，$a-c>b-c$；

(3) 若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$，$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

(4) 若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$；

(5) 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$.

证明　(1)　$a-c=(a-b)+(b-c)$，但 $a-b>0$，且 $b-c>0$　$\therefore a-c>0$.

(2)　$(a\pm c)-(b\pm c)=a-b>0$

$\therefore$　$a\pm c>b\pm c$（同取＋号或同取－号）

(3) $ac-bc=c(a-b)$，而 $a-b>0$，且 $c>0$，　$\therefore ac>bc$.

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$，而 $a-b>0$ 且 $c>0$，

$\therefore \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

(4)　在 (3) 中令 $c<0$，可证.

(5)　$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$，而 $a-b>0$，$c-d>0$，

$\therefore$　$a+c>b+d$.　□

【定理】6. (1)　若 $a_1>b_1$，$a_2>b_2,\cdots$，则 $a_1+a_2+\cdots>b_1+b_2+\cdots$.

(2) 设 $b>0$，$c>0$，若 $a>b$，$c>d$，则 $ac>bd$.

(3)　若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明　(1)　$a_1+a_2+\cdots-(b_1+b_2+\cdots)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots$.

因　$a_1-b_1>0$，$a_2-b_2>0,\cdots$，

$\therefore$　$a_1+a_2+\cdots>b_1+b_2+\cdots$.

(2)　$ac-bd=(ac-bc)+(bc-bd)=c(a-b)+b(c-d)$.

因　$a-b>0$，$c>0$，$b>0$，且 $c-d>0$，

$\therefore ac>bd$.

(3)　$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}$，因 $a-b>0$，$a>0$，且 $b>0$，　$\therefore$　$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$.　□

5·5　绝对不等式

在一切实数或一切正数等范围内恒成立的不等式，叫做绝对不等式，下面出现的所有字母如未特别声明都假定是正数.

【定理】7. $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 其中，等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

证明　$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$，而 a，b 是实数，因此　$(a-b)^2\geqslant 0$.

又由 $a^2+b^2=2ab$，得$(a-b)^2=0$，　$\therefore a=b$.

反之，当 $a=b$ 时，有$a^2+b^2=2ab$.　□

【定理】8. 若 $a>0$，则 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$，其中，等号当且仅当 $a=1$ 时成立.

证明　$a+\frac{1}{a}-2=\frac{1}{a}(a^2-2a+1)=\frac{(a-1)^2}{a}$，而　$a>0$，$(a-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore\ a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$．另一方面，由$a+\dfrac{1}{a}=2$，得$(a-1)^2=0$；　$\therefore a=1$.

反之，$a=1$时，有$a+\dfrac{1}{a}=2$.　□

【定理】9． 如果$a\neq 0$，则$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|\geqslant 2$．其中，等号当且仅当$a=\pm 1$时成立．

证明　当$a>0$时，由【定理】8有$a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$；当$a<0$时，令$a=-a'$，则$a'>0$．由【定理】8有$a+\dfrac{1}{a}=-a'-\dfrac{1}{a'}=-\left(a'+\dfrac{1}{a'}\right)\leqslant -2$．由上述两方面可得$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|\geqslant 2$.

再者，当$a=\pm 1$时，显然$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=2$；反之$\left|a+\dfrac{1}{a}\right|=2$，则$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2=4$，即$\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2=0$，$a^2-1=0, a=\pm 1$.

□

【定理】10． 当a，b同号时，有$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqslant 4$．其中等号当且仅当$a=b$时成立．

证明　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-4=\dfrac{1}{ab}\left((a+b)^2-4ab\right)=\dfrac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$.

等号当且仅当$a=b$时才成立．　□

【定理】11． (1)　$a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，其中等号当且仅当$a=b=c$时成立；

(2)　$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqslant 9$．其中等号当且仅当$a=b=c$时成立．

证明　(1)　$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=$

$$=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3+\left(\sqrt[3]{c}\right)^3-3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left\{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2+\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}\right)^2+\left(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}\right)^2\right\}\geqslant 0.$$

(利用 $A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA.)$

(2) 应用(1)有

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

再把它与(1)两端分别相乘，得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9.$$ □

【定理】12. $a^2+b^2+c^2\geqslant bc+ca+ab$. 其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

证明 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqslant 0.$$

其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立. □

【定理】13. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$. 其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

证明 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$, $c+a\geqslant 2\sqrt{ac}$.

把这些式子两端各自相乘，便得

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$ □

【定理】14. $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\geqslant\sqrt{abc}$.

其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立.

证明 首先，$(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geqslant 0.$$

其次，由【定理】11的(1)，有

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geqslant\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geqslant 0.$$ □

【定理】15.（施瓦兹不等式） 对任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 有

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

证明 首先证明，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqslant(ax+by)^2$. 设字母全部是实数，则有

$$(at+x)^2=a^2t^2+2axt+x^2\geqslant 0,$$

$$(bt+y)^2=b^2t^2+2byt+y^2\geqslant 0,$$

两端各自相加，得

$$(a^2+b^2)t^2+2(ax+by)t+(x^2+y^2)\geqslant 0.$$

由于这个不等式对一切实数 t 都成立，故

(判别式)$\leqslant 0$，也就是

$$(ax+by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2)\leqslant 0.$$

一般的情形也同样可证。 □

【定理】16. 设 n 是正整数，

(1) 若 $a>b$，则 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$，且 $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$；

(2) 若 $a>b\geqslant 0$，则 $a^{2n}>b^{2n}$，且 $\sqrt[2n]{a}>\sqrt[2n]{b}$.

证明 (1) 若 $a>b$ 而 $ab=0$，则 $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ 及 $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$ 显然成立，故在下面的证明中不妨设 $ab\neq 0$.

当 $n=1$ 时，有

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=(a-b)\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}.$$

式中 $a-b>0$. 如果又有 $a+\frac{b}{2}=0$ 且 $b=0$，则 $a=b=0$，这与 $a-b>0$ 矛盾.

从而 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0$，$\therefore$ 若 $a>b$ 则 $a^3>b^3$.

当 $n=2$ 时，有

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

其中

$$a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4$$

$$=a^2b^2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=a^2b^2\left\{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1\right\}.$$

(*A*) 当 $ab>0$ 时，由 5.5 的【定理】8，有

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2,$$

$$\therefore\quad a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4>0.$$

从而，若 $a>b$，则 $a^5>b^5$.

(*B*) 当 $a>o>b$ 时，很明显有 $a^5>b^5$.

一般的情形也同样可证.

(2) 当 $n=1$ 时，有

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

式中 $a-b>0$ 且 $a+b>0$ $\therefore$ $a^2>b^2$.

当 $n=2$ 时，有

$$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)>0,$$

$$\therefore\quad a^4>b^4.$$

一般的情形也同样可证. □

【定理】17. 两个及两个以上正数的算术平均值不小于其几何平均值. 等号当且仅当各数都相等时才成立. 即

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\ \cdots,\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

证明 当 $n=2$ 时，由【定理】7 得到.

当 $n=3$ 时，由【定理】11 得到.

当 $n=4$ 时，有

$$a_1+a_2\geqslant 2\sqrt{a_1a_2},\quad a_3+a_4\geqslant 2\sqrt{a_3a_4},$$

$$(a_1+a_2)+(a_3+a_4)\geqslant 2\sqrt{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}$$

$$\geqslant 4\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}},$$

$$\therefore\quad \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

当$n=8$时，有

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$
$$a_5+a_6+a_7+a_8\geqslant4\sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_1+a_2+\cdots+a_8&\geqslant2\sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)\ (a_5+a_6+a_7+a_8)}\\&\geqslant8\sqrt{\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\ \sqrt[4]{a_5a_6a_7a_8}}\\&=8\sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_8}.\end{aligned}$$

当$n=6$时，有

$$a_1+a_2+a_3\geqslant3\sqrt[3]{a_1a_2a_3},\quad a_4+a_5+a_6\geqslant3\sqrt[3]{a_4a_5a_6},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_1+a_2+\cdots a_6&\geqslant2\sqrt{(a_1+a_2+a_3)(a_4+a_5+a_6)}\\&\geqslant6\sqrt[6]{a_1a_2\cdots a_6}.\end{aligned}$$

当$n=5$时，令

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5},\qquad ①$$

则对于$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_5,\ x,\ x,\ x$，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_5+3x\geqslant8\sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_5x^3},\qquad ②$$

而
$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5+3x}{8}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5+3\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5}\right)}{8}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_5}{5}=x.$$

从而，由②式得

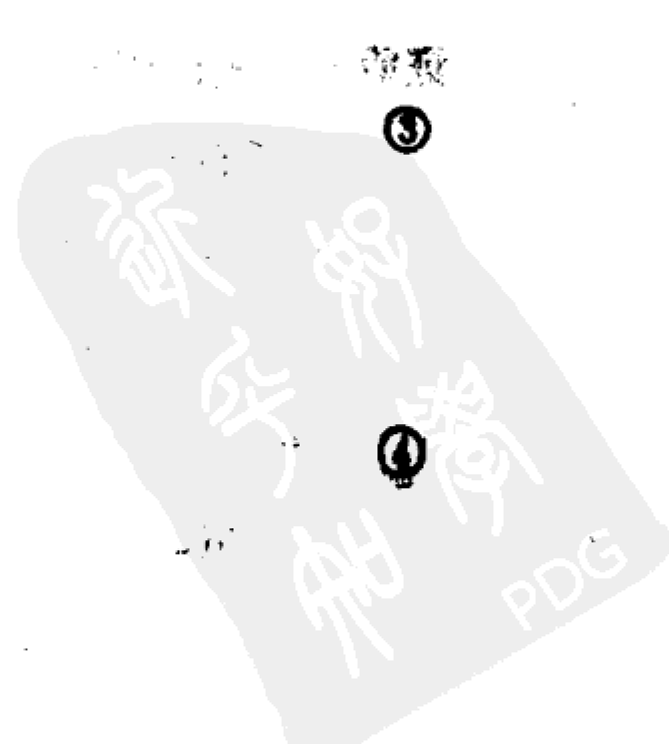
$$x\geqslant\sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_5x^3}.\qquad ③$$

在③式两端作8次乘方，得

$$x^8\geqslant a_1a_2\cdots a_5x^3,\qquad \therefore x^5>a_1a_2\cdots a_5.$$

当$x=7$时，令

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_7}{7}\qquad ④$$



则对于$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_7,\ x$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_7+x}{8}\geqslant\sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_7x}\ . \qquad ⑤$$

⑤式左端显然等于 x，因而⑤式即

$$x\geqslant\sqrt[8]{a_1a_2\cdots a_7x}\ , \qquad ⑥$$

把⑥式两端作 8 次乘方，得

$$x^8\geqslant a_1a_2\cdots a_7x \qquad \therefore\quad x\geqslant\sqrt[7]{a_1a_2\cdots a_7}\ .$$

一般地，对于 n，选取正整数 m 使 $n<2^m$ 且令

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad ⑦$$

这时，对于 a_1，a_2，…，a_n，$\underbrace{x，x，\cdots，x}_{(2^m-n)\text{个}}$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^m-n)x}{2^m}\geqslant\sqrt[2^m]{a_1a_2\cdots a_nx^{(2^m-n)}} \qquad ⑧$$

但是，⑧式的左端很显然等于 x，因而在⑧式的两端作 2^m 乘方，得

$$x^{2^m}\geqslant a_1a_2\cdots a_nx^{2^m-n}\ ,$$

从而 $\quad x^n\geqslant a_1a_2\cdots a_n$，$x\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$. □

【定理】18. 若 $m>k>0$，a_1,a_2，…，a_n 是正整数，则

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}\geqslant\frac{a_1^k+{}_2^k+\cdots+a_n^k}{n}\cdot\frac{a_1^{m-k}+a_2^{m-k}+\cdots+a_n^{m-k}}{n}.$$

证明 首先证明 $m=2$，$k=1$ 的情形，即

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

当 $n=2$ 时，有

$$2(a_1^2+a_2^2)-(a_1+a_2)^2=a_1^2+a_2^2-2a_1a_2=(a_1-a_2)^2\geqslant0.$$

当 $n=3$ 时，有

$$3(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-(a_1+a_2+a_3)^2=$$

$$=2(a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_1a_2-a_2a_3-a_3a_1)\geqslant 0.$$

当 $n=4$时，有

$$4(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2$$

$$=3(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)-2(a_1a_3+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1)$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2$$

$$+(a_4-a_1)^2\geqslant 0.$$

当 n 为一般情形时，

$$n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

$$=\sum_{i<j}(a_i^2+a_j^2-2a_ia_j)=\sum_{i<j}(a_i-a_j)^2\geqslant 0.$$

其次，证明 $m=3$，$k=1$ 的情形，即

$$n(a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3)$$

$$\geqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

当 $n=2$ 时，有

$$2(a_1^3+a_2^3)-(a_1^2+a_2^2)(a_1+a_2)=a_1^3+a_2^3-a_1^2a_2-a_1a_2^2$$

$$=(a_1-a_2)^2(a_1+a_2)\geqslant 0.$$

当 $n=3$ 时，有

$$3(a_1^3+a_2^3+a_3^3)-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1+a_2+a_3)$$

$$=\sum_{i<j}(a_i^3+a_j^3-a_i^2a_j-a_ia_j^2)=\sum_{i<j}(a_i+a_j)(a_i-a_j)^2\geqslant 0.$$

当 n 为一般的情形，也同样可证.

最后，当 $m>k>0$，n 为一般的正整数时，有

$$n(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)-(a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k)$$

$$\cdot(a_1^{m-k}+a_2^{m-k}+\cdots+a_n^{m-k})$$

$$=\sum_{i<j}(a_i^m+a_j^m-a_i^{m-k}\cdot a_j^k-a_i^k\cdot a_j^{m-k})$$

$$=\sum_{i<j}(a_i^k-a_j^k)(a_i^{m-k}a_i^{m-k}).$$

式中

若$a_i \neq a_j$，则$(a_i^k - a_j^k)(a_i^{m-k} - a_j^{m-k}) > 0$.

若$a_i = a_j$，则$(a_i^k - a_j^k)(a_i^{m-k} - a_j^{m-k}) = 0$.

从而定理得证. □

【系】 对于n个$(n \geqslant 2)$正数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，当$m(m \geqslant 2)$是正整数时，有

$$\frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^m. \quad ①$$

其中，等号当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = o$时成立.

证明 当$m=2$时，在【定理】18中取$m=2$，$k=1$就化为①式.

当$m=3$时，在【定理】18中取$m=3$，$k=1$，就有

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}. \quad ②$$

在②式右端最后一个因子中，再次用【定理】18，取$m=2$，$k=1$就有

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2. \quad ③$$

把③代入②得

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^3.$$

对于一般的正整数m，也同样可证. □

例题1. 当a，b是相异的正数时，对于任意的正整数m，有

$$\frac{1}{2}\left(a^m + b^m\right) > \left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

证明 在【定理】18的[系]中，取$n=2$即可.

由于$a \neq b$，故那里的不等号成立. □

例题2 当a，b，c是正数时，有

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

其中等号当且仅当$a = b = c$时成立.

证明 在【定理】18中，令$n=3$，$m=5$，$k=2$，则有

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{3} \geqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

利用【定理】18的[系]，又有

$$\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

又因为$a+b+c\geqslant\sqrt[3]{abc}$，所以

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{3}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\ \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\geqslant abc\ \frac{(a^2+b^2+c^2)}{3},$$

$\therefore\quad b^5+b^5+c^5\geqslant abc(a^2+b^2+c^2).$ □

例题3．当a，b，c是正数时，有

$$27(a^4+b^4+c^4)\geqslant(a+b+c)^4.$$

证明　反复使用【定理】18，有

$$3(a^4+b^4+c^4)\geqslant(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$$

$$\geqslant(a+b+c)\frac{(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2)}{3}$$

$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}\quad\frac{(a+b+c)^2}{3},$$

$\therefore\quad 27(a^4+b^4+c^4)\geqslant(a+b+c)^4.$ □

例题4．当a，b，c是正数时，有

$$3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

证明　应用【定理】18和【定理】12，得

$$3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

$$\geqslant(a+b+c)(ab+bc+ca).$$ □

例题5．$2(^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$\geqslant 6abc.$$

证明　在【定理】18中，令$n=3$，$m=3$，$k=1$，便有

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\quad\frac{a+b+c}{3},$$

$\therefore\quad 3(a^3+b^3+c^3)-a^2(a+b+c)-b^2(a+b+c)-c^2(a+b+c)$

$=2(a^3+b^3+c^3)-a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b)\geqslant 0.$

由此，前半部分得证．

其次，由$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant2\sqrt{bc}$，$c+a\geqslant2\sqrt{ca}$，得

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$\geqslant 2(ab\sqrt{ab}+bc\sqrt{bc}+ca\sqrt{ca})$$
$$\geqslant 6\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}\cdot bc\sqrt{bc}\cdot ca\sqrt{ca}}$$
$$=6abc.$$
□

例题6. 当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数时，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

证明 若 $n=2$，则由【定理】10 有

$$(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_?}\right)\geqslant 2^2.$$

若 $n=3$，则由【定理】11(2)得

$$(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}\right)\geqslant 3^2.$$

同样，对于一般的 n 也可证明. □

例题7. 当 a, b, c 为正数时，有

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

证明 由【定理】12 知

$$ab+bc+ca-c\sqrt{ab}-a\sqrt{bc}-b\sqrt{ca}\geqslant 0.$$

从而，用 abc 除上式两端便得结果. □

例题8. 当 a, b, c 是正数时，有

$$(ab+bc+ca)a^2b^2c^2\leqslant a^8+b^8+c^8.$$

证明 由【定理】18，【定理】11(1)及【定理】12，得

$$3(a^8+b^8+c^8)\geqslant(a^6+b^6+c^6)(a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6}(ab+bc+ca)$$
$$=3a^2b^2c^2(ab+bc+ca).$$
□

【定理】19. 对于 $2n$ 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$，若令

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}=m,$$

$$\max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}\right\}=M,$$

则有

$$m\leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant M. \qquad ①$$

证明 根据 m 的性质，有

$$a_1\geqslant mb_1,\ a_2\geqslant mb_2,\ \cdots,\ a_n\geqslant mb_n,$$

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\geqslant \frac{m(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=m. \qquad ②$$

同样，根据 M 的性质，有

$$a_1\leqslant Mb_1,\ a_2\leqslant Mb_2,\ \cdots,\ a_n\leqslant Mb_n,$$

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant \frac{M(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=M. \qquad ③$$

从②，③两式，定理得证． □

【定理】20． 当 a_1，b_2，…，a_n 是正数时，有

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

证明 当 $n=2$ 时，得

$$(1+a_1)(1+a_2)-(1+a_1+a_2)\geqslant a_1a_2>0.$$

$n=3$ 时，得

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)-(1+a_1+a_2+a_3)$$
$$=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2a_3>0.$$

对于一般的 n，也同样可证． □

【系】 对于正数 a，当 n 是正整数时，有

$$(1+a)^n\geqslant 1+na.$$

其中等号当且仅当 $n=1$ 时成立．

证明 在【定理】20 中令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ 即得证． □

【定理】21． 对于 $0<a_i<1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$有

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-a_1-a_2-\cdots-a_n(n\geqslant 2).$$

证明 当$n=2$ 时，有

$$(1-a_1)(1-a_2)-(1-a_1-a_2)=a_1a_2>0.$$

当 $n=3$ 时，有

$$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)-(1-a_1-a_2-a_3)$$
$$=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1-a_1a_2a_3$$
$$=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1(1-a_2)>0.$$

对一般的 n，也同样可证． □

【系】 对于$0<a<1$，有$(1-a)^n>1-na(n\geqslant 2)$．

证明 在【定理】21 中，令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，即得证． □

5·6 集合的包含关系与不等式

【定义】5.集合.元素 "具有某种特定性质的事物的汇集"，叫做集合.构成集合的各个事物，叫做集合的元素.

【定义】6. 满足关系 $S(x)$的那些元素 x 的集合，用 $\{x|S(x)\}$ 表示.

【定义】7. 并集 至少属于集合 A、B 之一的元素的集合，叫做 A 与 B 的并集，用 $A\cup B$ 表示.

【定义】8. 交集 同时属于两集合 A，B 的元素的集合，叫做 A 与 B 的交集，用 $A\cap B$ 表示.

例1. 当 $A=\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant3\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant2\right\}$时，

$$A\cup B=\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant3,\text{ 或 }0<x\leqslant2\right\}=\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant3\right\}.$$

$$A\cap B=\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant3,\text{ 或 }0<x\leqslant2\right\}=\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant2\right\}.$$

〈运算性质〉

(1) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；(交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；(结合律)

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.(分配律)

例2. 当 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{0, 2, 4, 6\}$，$C=\{5, 6, 7, 8, 9\}$ 时，有

(1) $A\cap B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cap\{0, 2, 4, 6\}$
$=\{2, 4, 6\}=B\cap A.$

(2) $(A\cup B)\cup C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cup\{5, 6, 7, 8, 9\}$
$=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$

$A\cup(B\cup C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cup\{0,2,4,5,6,7,8,9\}$
$=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C).$

又 $(A\cap B)\cap C=\{2, 4, 6\}\cap\{5, 6, 7, 8, 9\}=\{6\}.$

$A\cap(B\cap C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cap\{6\}=\{6\}.$

$\therefore\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$

(3) $(A\cup B)\cap C=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cap\{5, 6, 7, 8, 9\}$

$=\{5,\ 6\}$,

$(A\cap C)\cup(B\cap C)=\{5,\ 6\}\cup\{6\}=\{5,\ 6\}$,

$\therefore\ (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

又 $(A\cap B)\cup C=\{2,\ 4,\ 6\}\cup\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

$(A\cup C)\cap(B\cup C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$\cap\{0,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$=\{2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$,

$\therefore(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

【定义】9. 有限集·无限集 由有限个元素构成的集合，叫做有限集。否则叫做无限集。

【定义】10. 对等 若集合M的元素与集合N的元素之间能建立一一对应关系，则把M与N叫做是对等的，并用$M\sim N$表示。

【定义】11. 子集 当集合M包含在集合N中时，也就是当M的元素都属于N时，M叫做N的子集，用$M\subseteq N$表示

【定义】12. 真子集 若集合M是集合N的子集，且N中有不属于M的元素，则M叫做N的真子集，用$M\subset N$表示。

例 设全体奇数的集合为E，全体偶数的集合为F，全体整数的集合为I，则

(1) $E\sim F$,

(2) $E\subset I$, $F\subset I$.

【定理】22. $A\cup B\supseteq A$, $A\cup B\supseteq B$, $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$.

【定理】23. 设$n(M)$表示有限集合M的元素的个数，则

(1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

(2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$.

例 令 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9\}$, $B=\{3,4,5,9\}$, $C=\{5,6,7,8,9\}$，参照图2-13，则有

$n(A\cup B\cup C)=n\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}=9$,

$n(A)=n\{1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9\}=5$,

$n(B)=n\{3,\ 4,\ 5,\ 9\}=4$,

$n(C)=n\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}=5$,

$n(A\cap B)=n\{3,\ 9\}=2$,

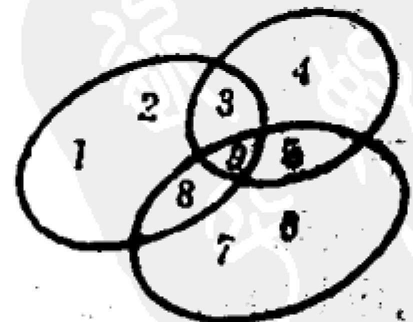


图 2-13

$n(A\cap C)=n\{8,\ 9\}=2,$

$n(B\cap C)=n\{5,\ 9\}=2,$

$n(A\cap B\cap C)=n\{9\}=1,$

$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)=5+4+5-2-2-2+1=9.$

〈集合与不等式〉

【定理】24. 令$M=\{x|f(x)>0\}$，$N=\{x|g(x)>0\}$，则

(1) $M\cup N=\{x|f(x)>0$ 或 $g(x)>0\}$；

(2) $M\cap N=\{x|f(x)>0$ 且 $g(x)>0\}$．

例 若$f(x)=x(x-1)^2(x-2)$，$g(x)=(1-x)(x-2)^3(x+1)$，则

$M=\{x|f(x)>0\}=\{x|x<0$ 或$2<x\}$，

$N=\{x|g(x)>0\}=\{x|x<-1$ 或 $1<x<2\}$，

从而

(1) $M\cup N=\{x|f(x)>0$ 或 $g(x)>0\}$

$=\{x|x<0$ 或 $1<x<2$ 式 $2<x\}$，

(2) $M\cap N=\{x|f(x)>0$ 且 $g(x)>0\}=\{x|x<-1\}$．如图2-14所示。

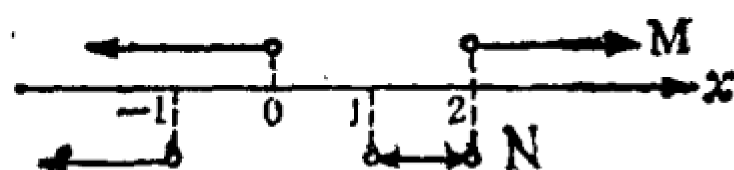


图 2-14

§6. 分式方程·分式不等式

解分式方程的方法，通常有下面两种，不过由这些方法所给出的结果，在多数情况下是一致的，但也有一些情形例外．

(解法Ⅰ)把方程的各项都移项到它的左端，并整理成既约分式，再令分子为0并求解，所得的解即为原分式方程的解．

(解法Ⅱ)用分式方程的全部分母的最小公倍式来乘方程两端，消去分母，由此得到一整式方程，求出此方程的所有根，其中使分母的最小公倍式不为0的根，即为原分式方程的根．

例题1.解下列分式不等式

$$\frac{(x-1)^4(x^4-1)}{x(x-2)^3}>0. \quad ①$$

解　满足不等式①的 x 值，应使①的分母、分子不为0，因而

$$x(x-2)^3\neq 0, \quad \therefore \quad x^2(x-2)^6>0.$$

用 $x^2(x-2)^6$ 乘①的两端，得

$$x(x-2)^3(x-1)^4(x^4-1)>0. \quad ②$$

②与①是同解的，由②得

$$x(x+1)(x-1)^5(x-2)^3(x^2+1)>0. \quad ③$$

但是，x 是实数，因此 $x^2+1>0$，从而③与下式同解．

$$x(x+1)(x-1)^5(x-2)^3>0. \quad ④$$

由　$x(x+1)(x-1)^5(x-2)^3=0$ 得到 $x=0,\ -1,\ 1,\ 2$

从而所求的 x 值的范围是

$x<-1$；

$0<x<1$；

$2<x$.

	$x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x$
$x+1$	−	+	+	+	+
x	−	−	−	+	+
$(x-1)^5$	−	−	−	−	+
$(x-2)^3$	−	−	−	−	+
④的左端	+	−	+	−	+

例题2．求解下列不等式

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}>\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}. \quad ①$$

解　将①移项得

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}-\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}>0. \quad ②$$

②的左端可变为

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-5x+6-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{-3x+5}{(x+1)(x-1)}.$$

所以，①式在 $x+2\neq0$ 的条件下，与下式同解

$$\frac{3x-5}{(x+1)(x-1)}<0.$$

它又与下式同解

$$(x+1)(x-1)(3x-5)<0,\ x+2\neq0. \qquad ③$$

求出 $(x+1)(x-1)(3x-5)=0$ 的根，为

$$x=-1,\quad 1,\quad 5/3.$$

	$x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<x$
$x+1$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$3x-5$	−	−	−	+
③的左端	−	+	−	+

由此及 $x+2\neq0$ 得①的解是

$x<-2$；

$-2<x<-1$；

$1<x<\frac{5}{3}$.

例题3 求解下列不等式

$$\sqrt{3-2x}<x. \qquad ①$$

解 首先，①式根号内的式子非负，所以有

$$3-2x\geqslant0.\quad \therefore\ x\leqslant3/2. \qquad ②$$

其次，在①式中，算术根表示非负值，因而

$$x>0. \qquad ③$$

由②、③，①式变为 $3-2x<x^2$，它的解为

$$x<3,\ 1<x. \qquad ④$$

因此①式的解如图 2-15 所示，所求的 x 值的范围是 $1<x\leqslant 3/2$.

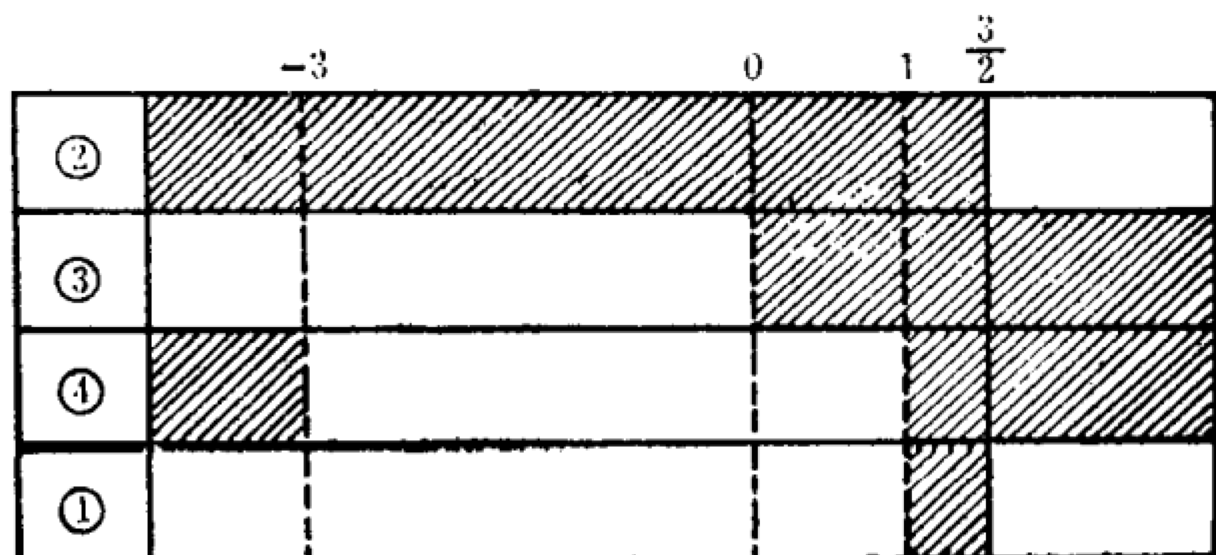


图 2-15

注意 1. 例题 3 的几何意义：

令 $\qquad y_1=\sqrt{3-2x}$. ②

$\qquad\quad y_2=x$ ③

将②的两端平方，经整理得

$$x=-\frac{1}{2}y_1^2+\frac{3}{2}. \qquad ②$$

再令 $y_1=y_2$ 并求解：

$$3-2x=x^2,\quad x^2+2x-3=0,$$

$$\therefore\quad x=-3 \text{ 或 } 1.$$

因而，如图2-16所示，所求的 x 值的范围是

$$1<x\leqslant 3/2.$$

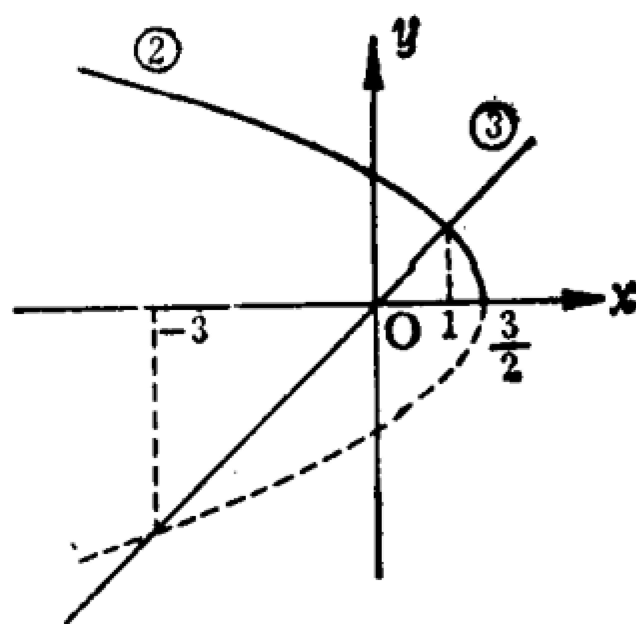


图 2-16

2. 下述解法是错误的，如图2-17所示.

"①的左端根号内的式子非负，从而

$$3-2x\geqslant 0,\quad \therefore\quad x\leqslant 3/2. \qquad ②$$

其次，①的两端各自平方，

$$3-2x<x^2,$$

$$x^2+2x-3>0,$$

$$\therefore\quad x<-3 \text{ 或 } x>1 \qquad ③$$

从而 $\qquad x<-3$ 或 $1<x\leqslant 3/2$."

一般地，当 $A>0$，$B>0$ 时，$A>B$ 才与 $A^2>B^2$ 同解.



图　2-17

第三章　函数与图象

§1. 函　　数

1·1 定　　义

【定义】1. 函数（到内的映射） 给定两个集合 A 和 B. 若对于 A 中的任意元素都有 B 中唯一的一个元素与之对应，则称这种对应关系为从 A 到 B 内的映射或函数.

注意 映射或函数这一用语并不只限于集合 A, B 的元素是实数的情形，它是对于更一般的情形来定义的. 不过在这里，只限于讨论 A, B 的元素都是实数的情形.

【定义】2. 记号 f 我们把由集合 A 到集合B内的映射（函数）写成下面的形式：设 f 代表这个映射，则

$$f: A\rightarrow B \text{ 或 } A\xrightarrow{f}B.$$

注意 除 f 以外，也可以用 g, h, φ, ψ 等中任何一个来表示映射.

【定义】3. 象（函数值）·f(a) 设 $f: A\rightarrow B$. 对属于 A 的元素 a（记为 $a\in A$），由 f 所确定的 B 中的元素记为 $f(a)$，它叫做 a（在 f 下）的象或函数值.

【定义】4. 变数·变域·（变数的）值 若用 x 表示集合 A 的任意元素，则 x 叫做具有变域 A 的变数. 由 x 所表示的每个元素，叫做变数 x 的值.

【定义】5. 记号 f(x) 设 $f: A\rightarrow B$, x 是以 A 为变域的变数，则 x 的值在 f 下的象用记号 $f(x)$ 表示.

注意 在【定义】3 中，a 在 f 下的象 $f(a)$，表示【定义】5 中变数 x 的值为 a 的情形.

例 设 A 是 0 及正数的集合，即 $A=\{x|x\geqslant 0\}$. 又设 R 是一切实数的集合，f 是使 A 的任意元素 x 对应着 R 的元素 $\sqrt{x}+1$ 的函数，则此函

数表示成

$$f: x \longrightarrow \sqrt{x}+1 \quad 或 \quad f(x)=\sqrt{x}+1$$

使用以R为变域的变数y，这个函数可表示成 $y=\sqrt{x}+1$.

注意1. 在上例中，函数f是作为从A到R内的映射来处理的．如果令B是不小于1的实数的集合，便可以把它看成由A到B的映射(参看【定义】10)．

2． 最初使用函数（*function*）这一用语及记号$f(x)$的人是莱布尼茨(1646—1716)．

【定义】6．象的集合 设$f: A \to B$，A_0是A的子集．A_0的所有元素的象的集合

$$\left\{ y \,\middle|\, y=f(x),\ x\in A_0 \right\}.$$

叫做A_0（在f下）的象，用$f(A_0)$表示．

注意 仅仅由一个元素a所组成的集合$\{a\}$，在f下的象就是$f(\{a\})$．这无非就是仅由一个元素$f(a)$ 组成的集合$\{f(a)\}$．

【定义】7．定义域·值域 在$f: A\to B$中，集合A叫做f的定义域，集合$f(A)$叫做f的值域($f(A)\subseteq B$)．

【定义】8．自变数·因变数 在$f: A\to B$中，设x是以A为变域的变数，y是以B为变域的变数，若考察函数$y=f(x)$，则x叫做f的自变数，y叫做因变数．

【定义】9．原象 设$f: A\to B$．对于集合B的元素b，A中象为b的那些元素的集合，即$\left\{ x \,\middle|\, f(x)=b \right\}$，叫做$b$(在$f$下)的原象集．

例 设R为一切实数的集合时，对于从R到R中的函数$f(x)=x^2$，则
实数4在f下的原象集是$\{2,-2\}$；
实数-1在f下的原象集是空集合ϕ．

【定义】10．到上的映射 在$f: A\to B$中，当B的任何元素的原象集都不是空集合时，即B的任何元素至少是A的一个元素的象时，f叫做由A到B上的映射(函数)．

注意 到上的映射，也叫做全射(或满射)．

例 设R是一切实数的集合，A是0及正数的集合：$\left\{ x \,\middle|\, x\geqslant 0 \right\}$，则

函数$f(x)=2x-1$是由R到R上的函数；
函数$f(x)=x^2$是由R到A上的函数；

函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 是由 A 到 A 上的函数.

【定义】11. 单射　对于 A 到 B 的映射 $f: A\to B$，当 B 的每一元素的原象至多是 A 的一个元素时，f 叫做单射.

注意1. f 为单射的条件是:

"若 $f(a)=f(a')$，则 $a=a'$"，或其对偶:"若 $a\neq a'$，则 $f(a)\neq f(a')$."

2. 单射又叫做内射.

【定义】12. 一一对应　在 $f: A\to B$ 中，当 B 的任何元素的原象由且仅由 A 的一个元素构成时，亦即到上的映射同时又是单射时，f 叫做一一对应.

注意　一一对应也叫做双射(全单射).

例　在【定义】10 的例中，$f(x)=2x-1$ 及 $f(x)=\sqrt{x}$ 是一一对应. $f(x)=x^2$，由于 $f(-1)=1$，$f(1)=1$，即不同的两个数的象是相同的，因此不是单射，从而也不是一一对应.

1·2 隐函数·显函数

【定义】13. 隐函数·显函数　自变数 x 与因变数 y 之间的对应，是用 $F(x, y)=0$ 的形式确定的函数，叫做隐函数. 用 $y=f(x)$(或 $x=g(y)$)的形式给出的函数，叫做显函数.

例　$x-y-2=0$ 是隐函数，$y=x-2$ 是显函数。

1·3 单调函数

【定义】14. 增函数·减函数·单调函数　对于函数 f 的定义域中的任意两个数 x_1，x_2，若 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则函数 f 叫做在该域上的增函数。若 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则 f 叫做减函数。这两种函数统称单调函数。

【定义】15. 严格增函数·严格减函数　在【定义】14中，当 $x_1<x_2$ 时若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 f 叫做严格增函数，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 f 叫做严格减函数，这两者统称严格单调函数。

【定理】1. 严格单调函数是单射函数。

证明　对于严格增函数 f，设 x_1，x_2 是其定义域中的任意两个数. 如果 $x_1\neq x_2$，则有 $x_1>x_2$ 或 $x_1<x_2$. 若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$. 总之，$f(x_1)\neq f(x_2)$。因而 f 是单射的。

对于严格减函数，也同样可证。

【定义】16. 区间　对于两个实数 a，

记　　$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a, b]$，

$$\{x|a\leqslant x<b\}=[a, b), \quad \{x|a<x\leqslant b\}=(a, b].$$

$[a, b]$叫做闭区间，(a, b)叫做开区间，$[a, b)$和$(a, b]$叫做半开区间(各称左闭右开、左开右闭区间)。各类区间统称为区间。

注意　同样地，也采用表示下列无限区间的记号。

$$\{x|x\geqslant a\}=[a, \infty), \quad \{x|x>a\}=(a, \infty),$$
$$\{x|x\leqslant a\}=(-\infty, a], \quad \{x|x<a\}=(-\infty, a).$$

当采用这样的记号时，实数全体的集合 R 可表示成$(-\infty, \infty)$.

【定义】17．区间上的单增函数和单减函数　设区间$[a, b]$包含在函数 f 的定义域中，对于$[a, b]$中的任意两个数 x_1, x_2，若 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f 在$[a, b]$上是(严格)单增的；类似地，若 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 f 在$[a, b]$上是(严格)单减的。

注意　在【定义】17中所用的区间，可以是【定义】16及其注意事项中所列的任何区间。

1·4　偶函数·奇函数

【定义】18．偶函数·奇函数　若函数 f 的定义域关于坐标原点 $x=0$ 对称，且对于其定义域中的任意实数 x，有 $f(-x)=f(x)$，则 f 叫做偶函数；类似地若 $f(-x)=-f(x)$，则 f 叫做奇函数。

【定理】2．其定义域关于　$x=0$ 对称的任意函数，可用偶函数与奇函数的和来表示。

证明　对于适合此条件的任意函数 f，当 x 属于 f 的定义域时，恒有

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

如令　$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

那么很明显，$g(x)$是偶函数，$h(x)$是奇函数。因而 f 可用偶函数与奇函数的和来表示。 □

1·5

【定义】19．反函数　当函数 $f: A\to B$ 是一一对应时，对于 B 的任意元素 b，若它的原象集只包含 A 的一个元素，并让这个元素与 b 对应，则可得到由 B 到 A 上的函数，这个函数叫做 f 的反函数，用 f^{-1} 表示。

注意　f^{-1} 也是一一对应的。

例题　求函数 $f: x \mapsto 2x+1$ 的反函数。*

解　令 $y=2x+1$. 在此函数中，若把 y 视作自变数，x 视作因变数，则此函数就是 f^{-1}. 在函数 $y=2x+1$ 中把 x, y 对换，则可改写为 $x=2y+1$.

因而，所求得的反函数是　$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

即　$f^{-1}: x \mapsto \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

§2.　函数的图象

2·1 图象的定义

【定义】　函数的图象　设A为函数f的定义域.以A作变域的变数x的每一值及其在f下的象 $f(x)$ 构成数对 $(x, f(x))$. 当x取A的一切值时，$(x, f(x))$的集合，即

$$\{(x, y) \mid y=f(x),\ x\in A\}$$

叫做函数f的图象.

注意　若把(x, y)视为坐标平面上的点的坐标，那么作为坐标平面上的点$(x, f(x))$的集合所表示的图形，往往也称为函数f的图象。下面就采用这种观点。

2·2　图象的移动

【定理】1. 把函数 $y=f(x)$的图象平行于x轴向右平行移动 $a(a>0)$单位距离(当 $a<0$ 时，向左移动$|a|$单位距离)后的曲线，是函数 $y=f(x-a)$ 的图象。

证明　如图 3-1 所示，设 F 是$y=f(x)$的图象，F'是将 F 在沿 x 轴正方向平行移动 $a(a>0)$单位距离后的曲线. 相对于 F' 上的任意点$P(x, y)$, 点 $Q(x-a, y)$位于 F 上. 因而在 x 和 y 之间，$y=f(x-a)$成立.　□

【系】　把函数 $y=f(x)$的图象，沿 y 轴正方向平行移动 $b(b>0)$后的曲线，是函数 $y=f(x)+b$ 的图象(当 $b<0$ 时，沿 y 轴负方向移动$|b|$).

---

* 记号：$f: a\mapsto b$表示映射$f: A\to B$中A的元素a的象是B中的元素b. ——译注

【定理】2. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 的对称图形是 $y=f(2a-x)$ 的图象.

证明　如图3-2所示，设 F 是 $y=f(x)$ 的图象，F' 是 F 关于直线 $x=a$ 的对称曲线，又设 $P(x, y)$ 是 F' 上的任意一点。则与 P 点（关于直线 $x=a$）处于对称位置的点 $Q(x', y')$ 在 F 上，且 $y'=f(x')$ 成立。但是，

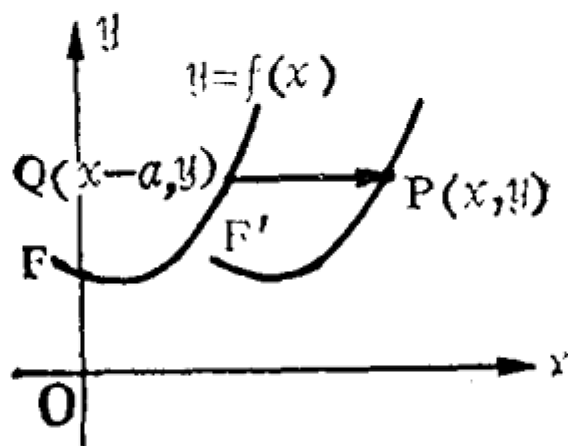


图 3-1

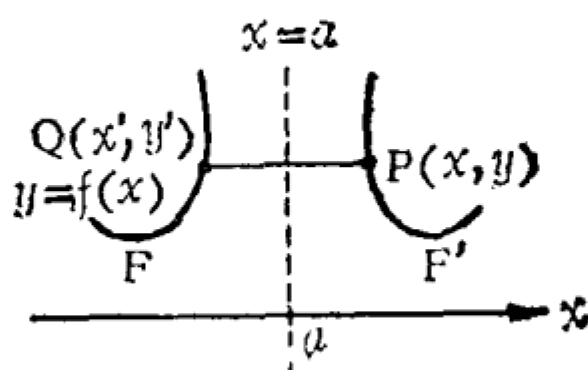


图 3-2

$$\frac{x+x'}{2}=a \qquad \therefore x'=2a-x,\ y'=y$$

因而在 x 与 y 之间，有 $y=f(2a-x)$ 成立. □

【系】1. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的曲线是 $y=f(-x)$ 的图象.

【系】2. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=b$ 对称的曲线是 $2b-y=f(x)$ 的图象. 特别地，$y=f(x)$ 的图象关于 x 轴对称的曲线是 $-y=f(x)$ 的图象.

【定理】3. 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a, b) 对称的是曲线 $2b-y=f(2a-x)$ 的图象.

证明　只要连续地把一个图象作关于直线 $x=a$ 及 $y=b$ 的对称的图象，就可得到它关于点 (a, b) 对称的图象，再根据【定理】2 及【系】2 即可得证. □

【系】　函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称的曲线是 $-y=f(-x)$ 的图形.

【定理】4. 把函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 作对称得到的曲线是 $x=f(y)$ 的图象.

证明　如图 3-3 所示，设 F 是 $y=f(x)$ 的图象，F' 是将 F 关于直线 $y=x$ 作对称得到的曲线，$P(x, y)$ 是 F' 上的任意一点，则与 P 点处于对称位置（关于直线 $y=x$）的点 $Q(x', y')$ 在 F 上。因而有 $y'=f(x')$. P 和 Q 是关于直线 $y=x$ 对称的，因此直线 PQ 的斜率是 -1.

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{x-x'}=-1, \text{ 即}$$

$x'+y'=x+y$. ①

线段 PQ 的中点$\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$

位于直线$y=x$上. 故

$$\frac{y+y'}{2}=\frac{x+x'}{2},$$

$\therefore \quad x'-y'=y-x.$ ②

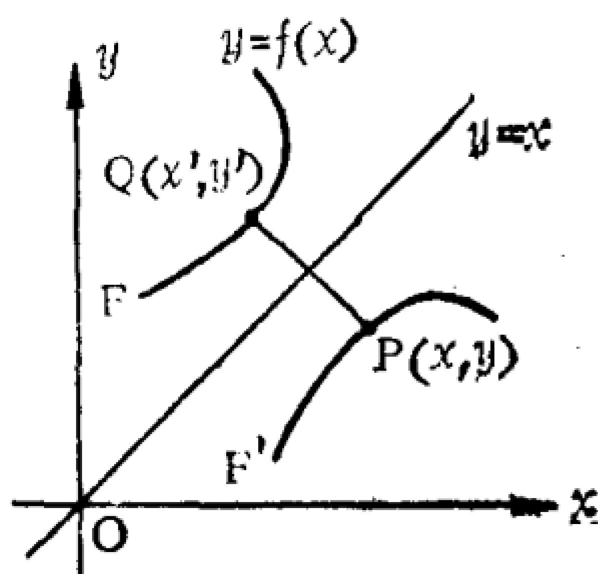


图 3-3

把①, ②对 x', y' 求解, 得 $x'=y$, $y'=x$.

因此在 x 与 y 之间, $x=f(y)$成立. □

注意 关于对直线 $y=ax+b(a\neq0)$作对称, 仿【定理】4, 有

$$\frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{1}{a}, \quad \frac{y+y'}{2}=a\ \frac{x+x'}{2}+b.$$

再通过求解 x', y' 并代入 $y'=f(x')$即可求得所要结果。

【定理】5. 偶函数的图象关于 y 轴对称, 而奇函数的图象则关于原点对称。

证明 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴作对称便可得到 $y=f(-x)$ 的图象. 而若函数 $y=f(x)$是偶函数, 则 $f(-x)=f(x)$成立. 所以这个图象与原先的图象重合。因此, 偶函数的图象是关于 y 轴对称的图形.

对于奇函数的图象也同样可证. □

§3. 线性函数的图象

3·1 线性函数

【定义】1. 线性函数 对于函数 $y=f(x)$, 当 $f(x)$ 能用x的线性式(即 $ax+b$, $a\neq o$)表示时, 就称 $f(x)$为 x 的线性函数.

注意 线性函数的定义域是全体实数的集合.

【定理】1. 若 y_1, y_2 按线性函数 $y=ax+b$ 分别对应于 x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$, 则

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=a$$

证明 由题设有,

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b, \\ y_2 = ax_2 + b, \end{cases}$$

两端分别相减得

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

由于 $x_2 - x_1 \neq 0$，故得

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$ □

【定理】2. 线性函数 $y=ax+b$ 的图象，是通过两点 $(0,\ b)$、$(1,\ a+b)$ 的直线.

证明　很明显，点 $(0,\ b)$ 及点 $(1,\ a+b)$ 都位于 $y=ax+b$ 的图象上，这个图象是直线的证明请参看第七章 § 1【定理】16 的证明. □

3·2　含有绝对值符号的函数

【定义】2. 用绝对值符号表示的函数 $|f(x)|$ 按下列方式定义：

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{对于使 } f(x) \geqslant 0 \text{ 的 } x, \\ -f(x) & \text{对于使 } f(x) < 0 \text{ 的 } x, \end{cases}$$

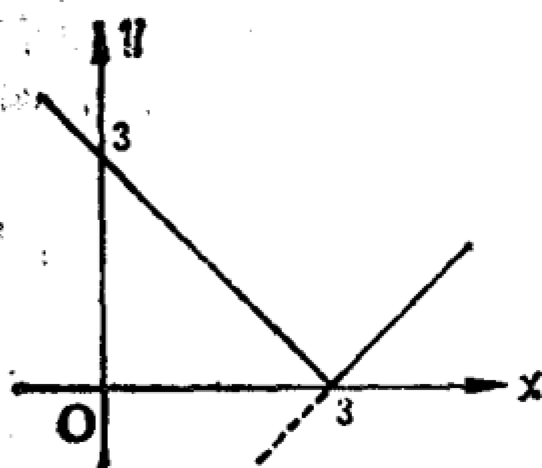


图 3-4

例1. 试求函数 $y=|x-3|$ 的图象.

解　当 $x-3 \geqslant 0$，即 $x \geqslant 3$ 时，

$$y = x - 3.$$

当 $x-3<0$，即 $x<3$ 时，

$$y = -x + 3.$$

其函数图象如图 3-4 的实线所示.

注意　此函数的图象可按下列方式得到，即把直线 $y=x-3$ 的 $x-3<0$ 的部分（虚线部分）关于 x 轴对称地移动（即折迭）而得.*

例2. 试求函数 $y=|x-1|+|x-3|$ 的图象.

解　把定义域分成 $x<1$，$1 \leqslant x<3$，$3 \leqslant x$ 三部分.（这是由绝对值符号内部，使正负变号的点 1、3 来分割的.）

---

* 也可按【定理】1，把 $y=|x|$ 的图象沿 x 轴正向平行移动 3 个单位距离而得.

——译注

对于 $x<1$，有 $x-1<0$，$x-3<0$.

$\therefore\quad y=|x-1|+|x-3|=-(x-1)-(x-3)$

$=-2x+4$.

对于 $1\leqslant x<3$，有 $x-1>0$，$x-3<0$，

$\therefore\quad y=|x-1|+|x-3|=x-1-(x-3)$

$=2$.

对于 $3\leqslant x$，有 $x-1>0$，$x-3\geqslant0$，

$\therefore\quad y=|x-1|+|x-3|$

$=x-1+x-3$

$=2x-4$.

因而，所求的图象如图 3-5 中的实线部分所示.

例3. 不等式 $|x-3|\leqslant2$ 的解法

解 当 $x-3<0$，即 $x<3$ 时，不等式左边为 $-(x-3)$，

$\therefore\quad -x+3\leqslant2$，即 $x\geqslant1$，

故 $1\leqslant x<3$ 是解(的一部分).（$1\leqslant x<3$ 是图 3-6 中使射线 $y=-x+3$ $(x<3)$ 位于直线 $y=2$ 下方的那些 x 值的范围.）

当 $x-3\geqslant0$，即 $x\geqslant3$ 时，原不等式左边为 $x-3$，$\quad\therefore\quad x-3\leqslant2$，即 $x\leqslant5$.

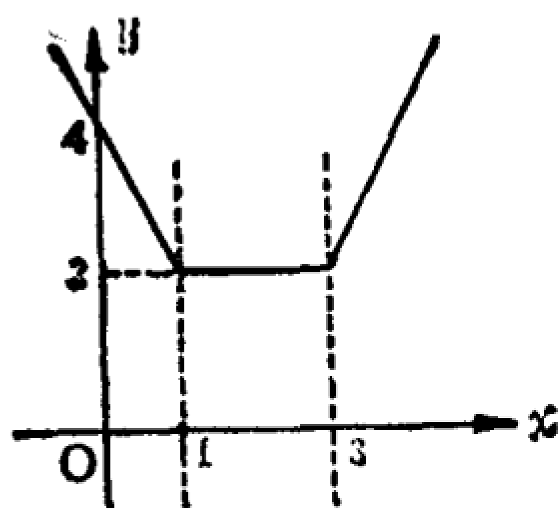


图 3-5

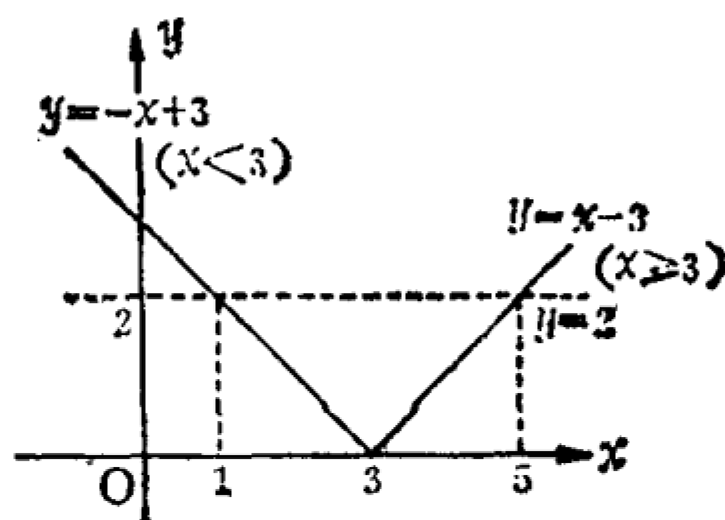


图 3-6

故 $3\leqslant x\leqslant5$ 是解(的另一部分).（这部分是图 3-6 中使射线 $y=x-3$ $(x\geqslant3)$ 位于直线 $y=2$ 下方的那些 x 值的范围).

从而，所求解为由 $1\leqslant x<3$ 及 $3\leqslant x\leqslant5$ 组成的 $1\leqslant x\leqslant5$.

3·3 高斯记号

【定义】3. 高斯记号[ ] 对于实数 x，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大的整

数.也就是说，对于任意的整数 n，当 $n\leqslant x<n+1$ 时，有 $[x]=n$.

注意　根据这个定义采用的记号[　]，叫做高斯记号.

例1. 试求 $y=[x](-3\leqslant x\leqslant 3)$ 的图象.

解　对于 $-3\leqslant x<-2$，$y=[x]=-3$.

对 $-2\leqslant x<-1$，$y=[x]=-2$.

对 $-1\leqslant x<0$，$y=[x]=-1$.

对 $0\leqslant x<1$，$y=[x]=0$.

对 $1\leqslant x<2$，$y=[x]=1$.

对 $2\leqslant x<3$，$y=[x]=2$.

且　$[3]=3$.

因而，其图象如图 3-7 中的实线部分所示.

例2. 试求 $y=x-[x](-3\leqslant x\leqslant 3)$ 的图象.

解　与上例同样地.

对 $-3\leqslant x<-2$，$y=x+3$.

对 $-2\leqslant x<-1$，$y=x+2$.

对 $-1\leqslant x<0$，$y=x+1$.

对 $0\leqslant x<1$，$y=x$.

对 $1\leqslant x$，$y=x-1$.

对 $2\leqslant x<3$，$y=x-2$.

对 $x=3$，$y=0$.

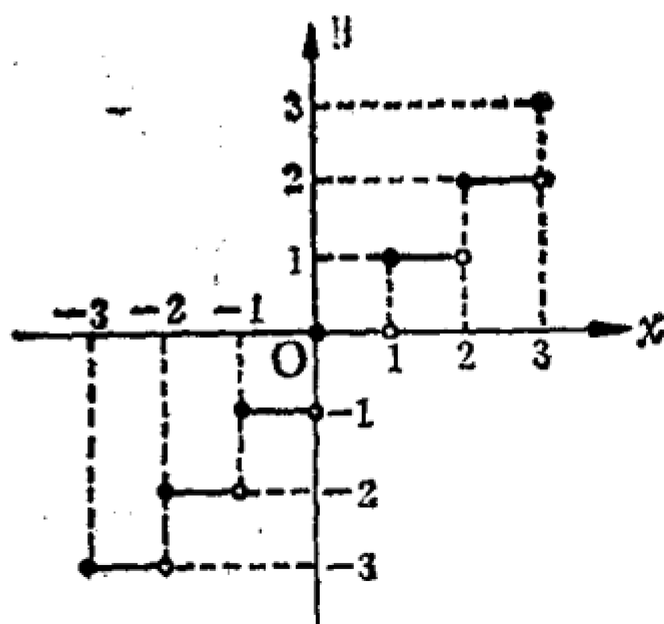


图 3-7

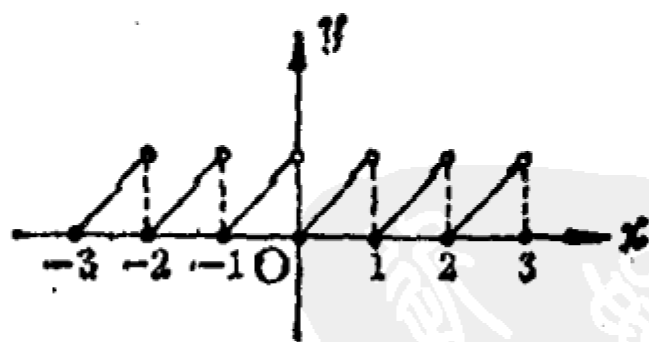


图 3-8

因而，图象如图 3-8 中的实线部分所示.

3·4 最大·最小

【定义】4. 最大值·最小值 当变数 x 取所规定的变化域 A 中的一切值时，若在函数 f 的值的集合 $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ 中，存在最大的值 $f(a)$ $(a\in A)$，则称 f 在 a 处为最大，$f(a)$ 叫做 f 在 A 中的最大值.

对于最小值也可同样定义.

注意 如图 3-9，函数 f 在 A 上的最大值是 f 图象上最高点的 y 坐标，而最小值是其最低点的 y 坐标.

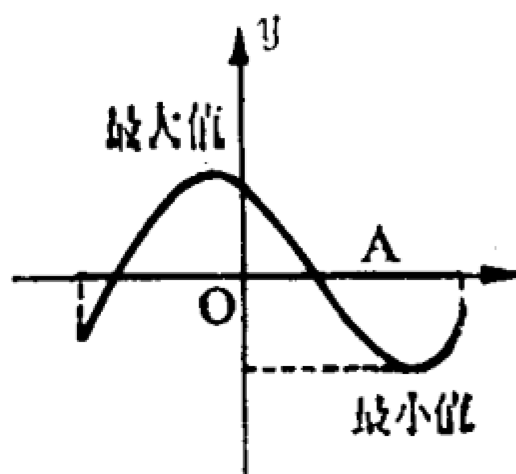


图 3-9

例 线性函数 $f(x)=ax+b(a>0)$

在区间 $[c, d]$ 取最大值 $f(d)$，最小值 $f(c)$；

在区间 (c, ∞) 取最小值 $f(c)$，没有最大值；

在区间 $(-\infty, d)$ 取最大值 $f(d)$，没有最小值.

线性函数 $f(x)=ax+b(a<0)$

在区间 $[c, d]$ 取最大值 $f(c)$，最小值 $f(d)$；

在区间 $[c, \infty)$ 取最大值 $f(c)$，没有最小值；

在区间 $(-\infty, d]$ 取最小值 $f(d)$，没有最大值.

§4. 二次函数的图象

4·1 二次函数

【定义】 二次函数 对于函数 $y=f(x)$，当 $f(x)$ 可用 x 的二次三项式表示时，即是说，一般地能用 $y=ax^2+bx+c(a\neq o)$ 的形式表示时，这样的函数 $f(x)$ 叫做 x 的二次函数.

注意 二次函数的定义域是一切实数的集合

【定理】1. 二次函数 $y=ax^2$ 的图象

当 $a>0$ 时，是向上开着（向下凸）的抛物线，顶点在原点，对称轴是 y 轴.

当 $a<0$ 时，是向下开着（向上凸）的抛物线，顶点在原点，对称轴是 y 轴.

不论 a 是正或是负，$|a|$ 越大则抛物线的开口变得越小.

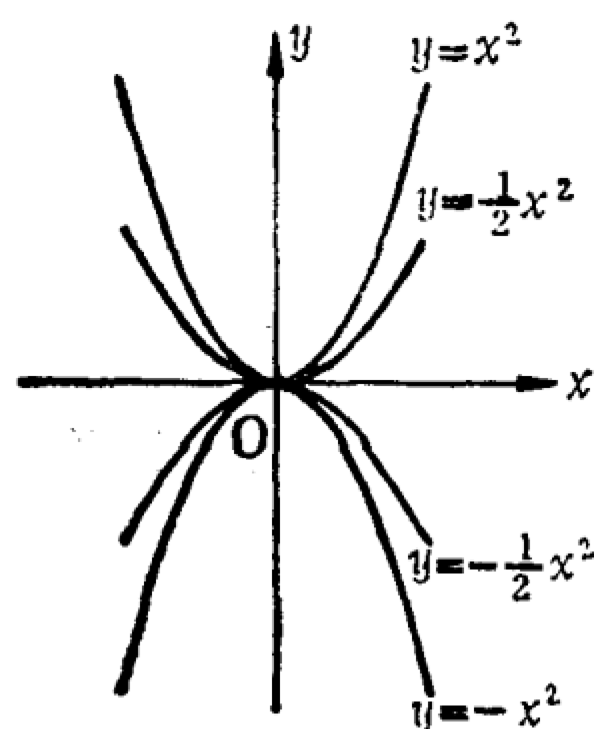


图 3-10

注意　$y=x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象如图 3-10 所示．【定理】1的一般证明可以参看第七章 § 3的【定理】1及其[系]．

【定理】2. 二次函数 $y=a(x-p)^2+q$ 的图象是把 $y=ax^2$ 的图象，沿 x 轴的正向平行移动 p，沿 y 轴的正向平行移动 q 后所得的曲线．

因而，它是顶点在(p,q)、对称轴是直线 $x=p$ 的抛物线，且当 $a>0$时向上开着，当 $a<0$ 时向下开着．

证明　可由 2.2 的【定理】1及其[系]，以及本节的【定理】1证得．　□

【定理】3 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是把 $y=ax^2$ 的图象平移后得到的抛物线．其顶点是$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$．

证明　由于可以把已知函数变形成

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

由【定理】2即可得证．　□

4·2　二次函数的最大值·最小值(1)

【定理】4. 二次函数 $y=a(x-p)^2+q$.

当 $a>0$ 时，在 $x=p$ 处取最小值 q，没有最大值．

当 $a<0$ 时，在 $x=p$ 处取最大值 q，没有最小值．

证明　$a>0$ 时，$a(x-p)^2\geqslant 0$，因此 $a(x-p)^2+q\geqslant q$．其中等号在 $x=p$时成立．因而 y 的值在 $x=p$ 时为最小值 q．因为 $a(x-p)^2$ 能变得任意大，所以y 没有最大值．

$a<0$ 时，$a(x-p)^2\leqslant 0$．因此$a(x-p)^2+q\leqslant q$．其中等号在 $x=p$时成立．因而 y 的值在 $x=p$ 时为最大值 q．因 $a(x-p)^2$ 能变得任意小（其绝对值任意大），故 y 没有最小值．　□

注意　事实上根据【定理】2，考察 $y=a(x-p)^2+q$ 的图象，由 3·4 中【定

义】4的"注意"，【定理】4自然就明白了.

【定理】5. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$，

当 $a>0$ 时，在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最小值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$，没有最大值.

当 $a<0$ 时，在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取得最大值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$，没有最小值.

证明 由于可以把原来的函数变形成

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$ 因此，由【定理】3得证. □

4·3 二次函数的最大值·最小值(2)

例1. 试求二次函数 $y=x^2-4x+3$ 在 $1\leqslant x\leqslant 4$ 的最大值，最小值.

解 由于 $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，所以这个二次函数的图象如图3-11所示.

考察一下在 $1\leqslant x\leqslant 4$ 中 y 的值，根据 3·4 中【定义】4的"注意"，有

当 $x=4$ 时，得到最大值3.

当 $x=2$ 时，得到最小值 -1.

例2. 试求二次函数 $y=x^2-4x+3$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 的最大值，最小值.

解 令 $f(x)=x^2-4x+3$，这个二次函数的图象如图 3-12 所示。根据 3·4

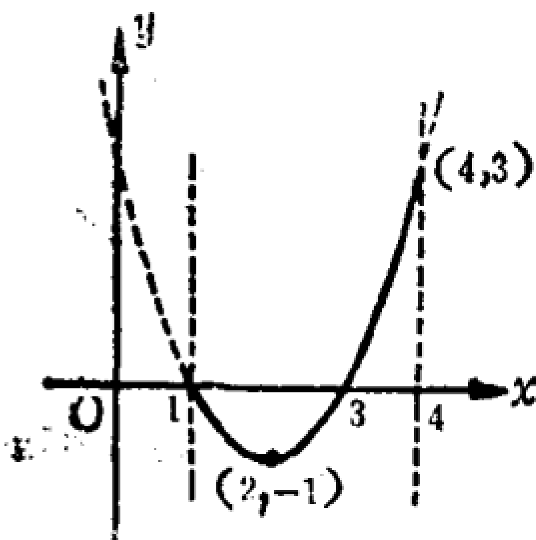


图 3-11

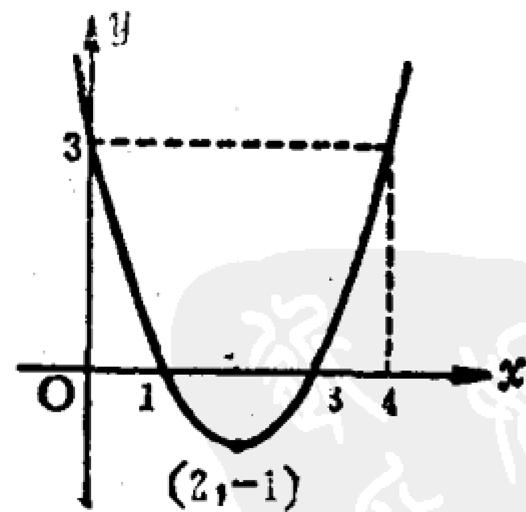


图 3-12

中【定义】4的"注意"，有

当 $0\leqslant a<2$ 时,

最大值为 $f(0)=3$,

最小值为 $f(a)=a^2-4a+3$.

当 $2\leqslant a<4$ 时,

最大值为 $f(0)=3$,

最小值为 $f(2)=-1$.

当 $4\leqslant a$ 时,

最大值为 $f(a)=a^2-4a+3$, 最小值为 $f(2)=-1$.

例3. 试求二次函数 $y=x^2-2ax$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的最大值和最小值.

解 令 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$. 这个二次函数的图象, 是向下凸、顶点在 $(a, -a^2)$ 且通过原点的抛物线.

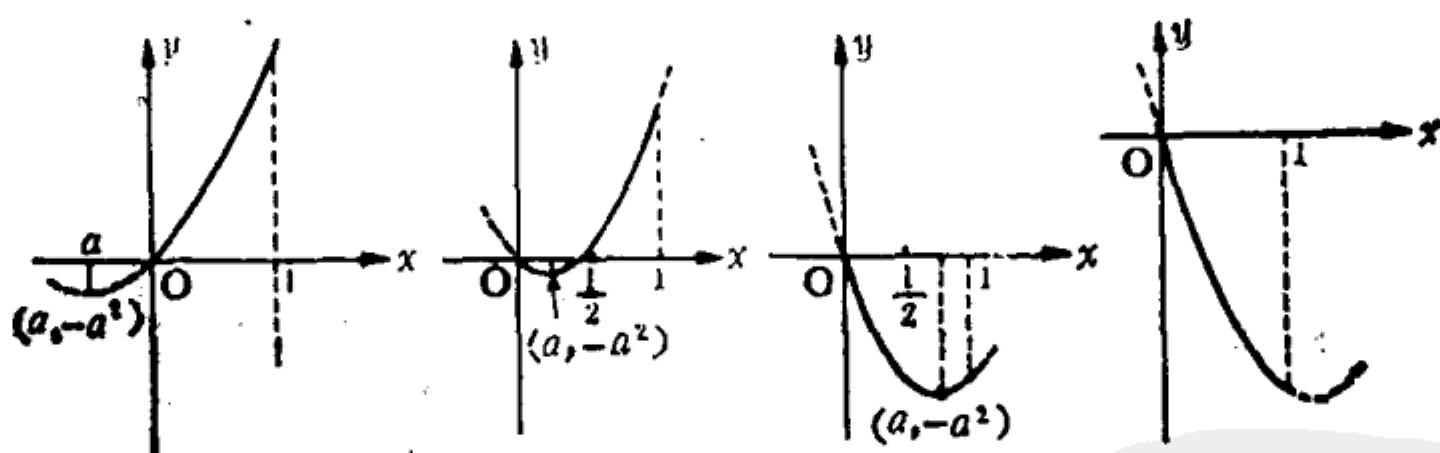
为了弄清在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的最大、最小, 我们把 a 的取值分成如图 3-13 所示的几种情形.

(1) $a<0$, 最大值 $f(1)=1-2a$, 最小值 $f(0)=0$.

(2) $0\leqslant a<\frac{1}{2}$, 最大值 $f(1)=1-2a$, 最小值 $f(a)=-a^2$.

(3) $\frac{1}{2}\leqslant a<1$, 最大值 $f(0)=0$, 最小值 $f(a)=-a^2$.

(4) $1\leqslant a$, 最大值 $f(0)=0$, 最小值 $f(1)=1-2a$.



(1) $a<0$　(2) $0\leqslant a<\frac{1}{2}$　(3) $\frac{1}{2}\leqslant a<1$　(4) $1\leqslant a$

图 3-13

例4. 试求 $x^2+2y^2=1$ 成立时, x^2+y 的最大值, 最小值.

解 由于 $x^2=1-2y^2$, 所以 $x^2+y=-2y^2+y+1$. 又由 $x^2\geqslant 0$ 得 $1-2y^2\geqslant 0$.

因而$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

应用 $z=-2y^2+y+1=-2(y-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$ 的图象如图 3-14 来求 x^2+y 在$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$的最大值、最小值.

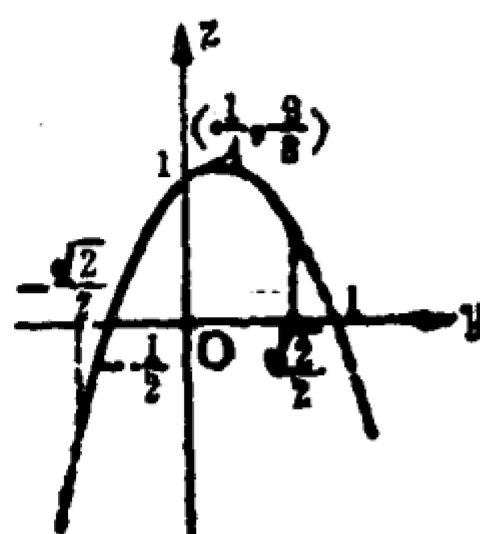


图 3-14

当 $y=\frac{1}{4}$时，得最大值$\frac{9}{8}$.这时，$x^2=\frac{7}{8}$，

$\therefore\quad x=\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$.

当 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，得最小值$-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

这时的 $x=0$.

§5. 分式函数·无理函数的图象

5·1 分式函数的图象

【定义】1. 分式函数 对于函数 $y=f(x)$，当 $f(x)$ 能用 x 的分式表示时，则称函数 $f(x)$叫做 x 的分式函数.

注意 分式函数 $y=\frac{h(x)}{g(x)}$ 的定义域，是满足 $g(x)\neq 0$ 的全体实数 x的集合.

【定理】1. 分式函数$y=\frac{a}{x}(a\neq 0)$的图象是等轴双曲线. 其渐近线是 x 轴和 y轴.

$a>0$ 时，其图象位于第一、第三象限.

$a<0$ 时，其图象位于第二、第四象限.

【定理】2. 分式函数$y=\frac{a}{x-m}+l(a\neq o)$的图象，是把 $y=\frac{a}{x}$的图象沿 x 轴方向平移 m，再沿 y 轴方向平移 l 所得的图象. 也就是说，它是以两条直线 $x=m$，$y=l$ 作渐近线的等轴双曲线.

证明 由本节【定理】1，2·2的【定理】1及其【系】 可证. □

【定理】3. 分式函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq o,\ ad-bc\neq o)$ 的图象，是以两条直线 $x=-\frac{d}{c}$，$y=\frac{a}{c}$ 作渐近线的等轴双曲线.

证明 由于可以把已知函数变形成

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{bc-ad}{c^2(x+\frac{d}{c})}+\frac{a}{c},$$

故由【定理】2得证. □

5·2 图象的合成

例1. 试求分式函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象.

解 令 $y_1=x$，$y_2=\frac{1}{x}$. ①

对于同一个 x 值，下式成立

$$y=y_1+y_2. \quad ②$$

先分别画出①中两函数的图象，把关系式②视为坐标平面上垂直于 x 轴，且以 x 轴为基准具有正、负向的二线段的和。作出尽可能多的点并把这样得到的所有的点平滑地连接起来，就得到所求的图象。如图 3-15 所示.

注意 利用象②那样的关系式，由两个（或两个以上的）函数图象来作出一个函数图象，这叫做图象的合成.

例2. 试求分式函数 $y=\frac{x^3-1}{x}$ 的图象.

解 把原来的函数变形为

$$y=x^2-\frac{1}{x},$$

而令 $y_1=x^2$，$y_2=-\frac{1}{x}$. ①

因为 $y=y_1+y_2$，所以分别作出①中两个函数的图象，再把它们合成就得到所求的图象，如图 3-16 所示.

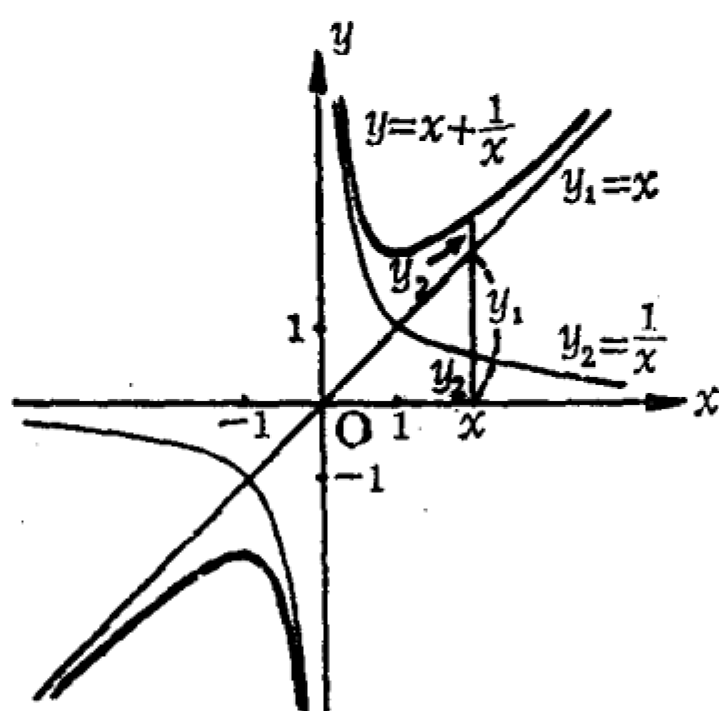


图 3-15

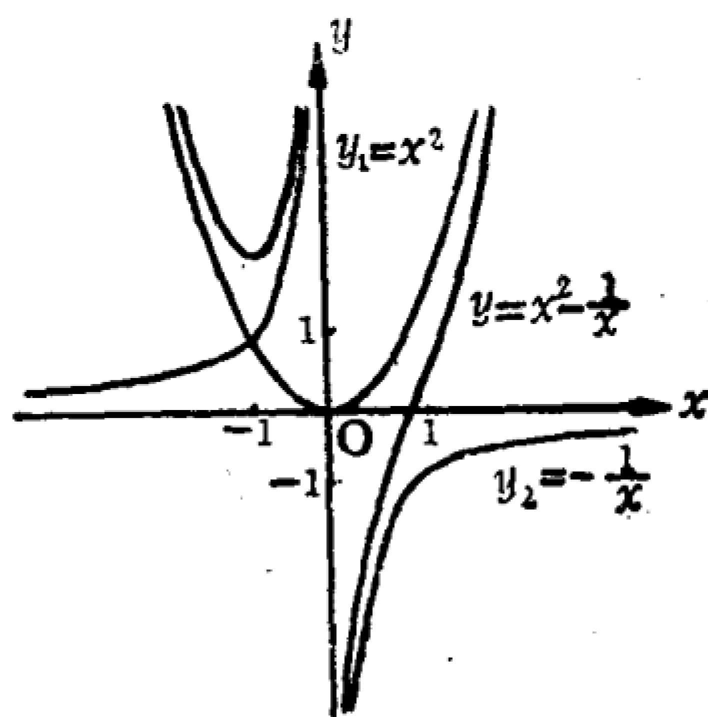


图 3-16

5·3 分式函数的最大值、最小值

例1. 试求分式函数 $y=ax+\frac{b}{x}(a>0,\ b>0)$在 $x>0$ 的最小值.

解 将原式化成 $ax^2-yx+b=0$ ①

由于 x 是实数，故

$$D=y^2-4ab\geqslant 0,$$

$$\therefore y\leqslant -2\sqrt{ab}\text{ 或 }y\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

由 $x>0$ 时的图象(图 3-17)可知，最小值是 $2\sqrt{ab}$.

这时的 x 值是 $y=2\sqrt{ab}$ 时①的重根. 所以

$$x=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

注意1. 对于 $x>0$，有 $ax>0$，$\frac{b}{x}>0$，

因此

$$ax+\frac{b}{x}\geqslant 2\sqrt{ax\cdot\frac{b}{x}}=2\sqrt{ab}.$$

因而，最小值是 $2\sqrt{ab}$. 又，此时的 x 值由

$$ax=\frac{b}{x}\ (x>0),\text{ 得 }x=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

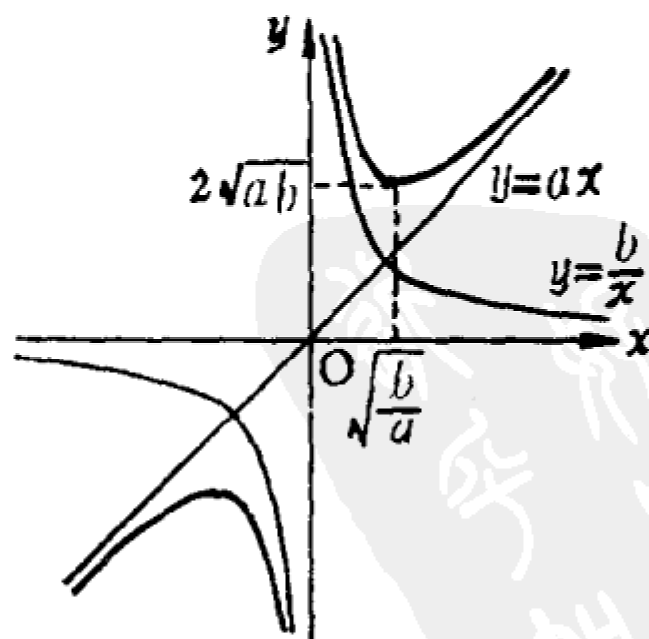


图 3-17

2．在上例中，$x<0$ 时的最大值是 $-2\sqrt{ab}$．此时的x值是 $-\sqrt{\frac{b}{a}}$．（注意，原来的函数是在区间$(-\infty,\ 0)$及$(0,\ +\infty)$上的奇函数．）

例2． 试求分式函数 $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+3}$ 的最大值和最小值．

解 分母：$x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 对于一切实数值都不为 0．去分母并整理后得

$$(y-1)x^2-2(y+1)x+3(y+1)=0. \quad ①$$

当 $x=\frac{3}{2}$ 时，得 $y=1$．

当 $y\neq1$ 时，①中的 x 是实数，因此

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-3(y-1)(y+1)\geqslant0,$$

$$\therefore\ y^2-y-2\leqslant0 \quad \therefore\ -1\leqslant y\leqslant2.$$

因为 $y=1$ 包含在 $-1\leqslant y\leqslant2$ 中，所以 y 的最大值是 2，最小值是 -1．

例3． 试求分式函数 $y=\frac{1}{x-2}+1$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 的最大值和最小值．

解 函数图象如图 3-18 所示．

当 $0\leqslant a<2$ 时，最大值是 $\frac{1}{2}$（$x=0$ 时）．

最小值是 $\frac{1}{a-2}+1$（$x=a$ 时）．

当 $a=2$ 时，最大值是 $\frac{1}{2}$（$x=0$ 时），

没有最小值．

当 $a>2$ 时，既没有最大值，

也没有最小值．

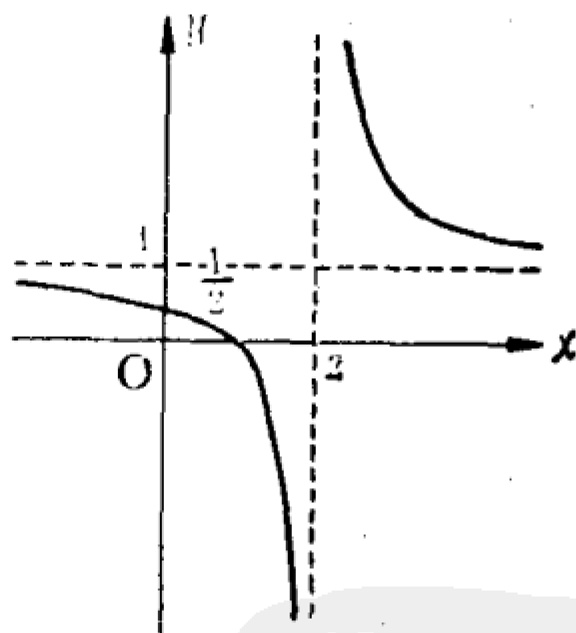


图 3-18

5·4 无理函数的图象

【定义】2．无理函数 对函数 $y=f(x)$，当 $f(x)$ 可用 x 的无理式表示时，此

函数叫做 x 的无理函数.

注意　无理函数 $y=\sqrt{g(x)}$ 的定义域，是使 $g(x)\geqslant 0$ 的所有实数 x 的集合.

【定理】4. 无理函数 $y=\sqrt{ax}$ 的图象，是抛物线 $y^2=ax$ 在 $y\geqslant 0$ 的部分.

证明　无理式 $y=\sqrt{ax}$ 的图形是 $y^2=ax$ 的图形的一部分(对应于 $y\geqslant 0$).而 $y^2=ax$ 的图象是抛物线.　□

【系】　无理函数 $y=-\sqrt{ax}$ 的图象，是抛物线 $y^2=ax$ 在 $y\leqslant 0$ 的部分.

注意　无理函数 $y=\sqrt{ax}$，$y=-\sqrt{ax}$ 的图形，如图 3-19 所示.

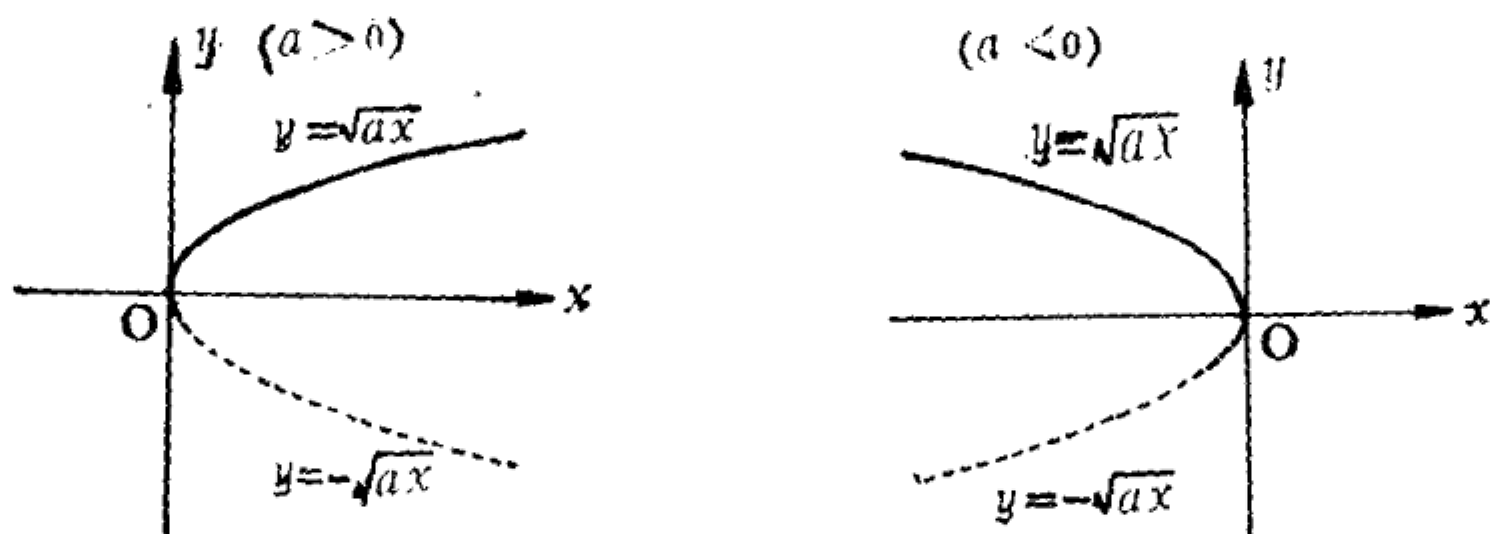


图 3-19

【定理】5. 无理函数 $y=\sqrt{ax+b}+c(a\neq 0)$ 的图象，是把 $y=\sqrt{ax}$ 的图象沿 x 轴方向平移 $-\dfrac{b}{a}$，沿 y 轴方向平移 c 后所得的曲线.

证明　原来的函数可以变形成

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

因此，根据【定理】1 及其【系】，可得证.　□

例1. 试求无理函数 $y=\sqrt{-x^2+2x+3}+1$ 的图象.

解　$y\geqslant 1$，因而下式成立：

$$(y-1)^2=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4,$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-1)^2=4(y\geqslant 1).$$

图象如图 3-20 所示.

例2. 试求无理函数 $y=\sqrt{x^2+2x+2}+1$ 的图象.

解　$y\geqslant 1$，故下式成立：

$(y-1)^2=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$,

$\therefore \quad (x+1)^2-(y-1)^2=-1(y\geqslant 1)$.

图象如图 3-21 所示.

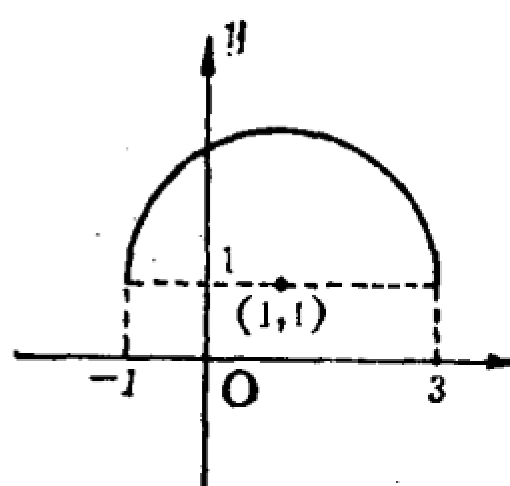


图 3-20

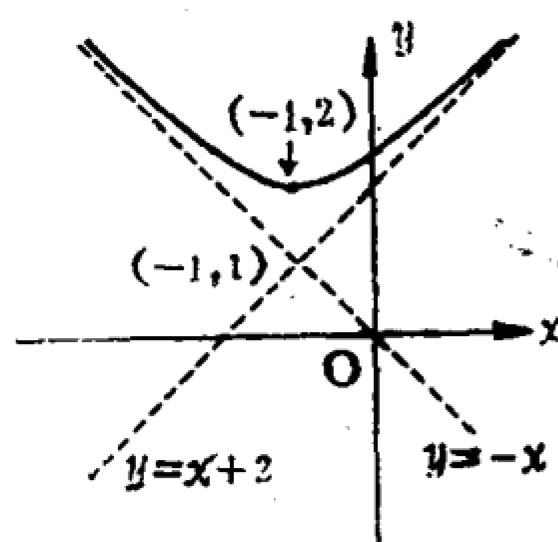


图 3-21

例3. 试求无理函数，$y=\sqrt{x^2+2x}+1$ 的图象.

解 $y\geqslant 1$，故下式成立：

$(y-1)^2=x^2+2x=(x+1)^2-1$,

$\therefore \quad (x+1)^2-(y-1)^2=1(y\geqslant 1)$.

其图象如图 3-22所示.

例4. 试求无理函数 $y=\sqrt{x^2+2x+1}+1$ 的图象.

解 $y=\sqrt{x^2+2x+1}+1$

$=\sqrt{(x+1)^2}+1$

$=|x+1|+1$.

其图象如图 3-23 所示.

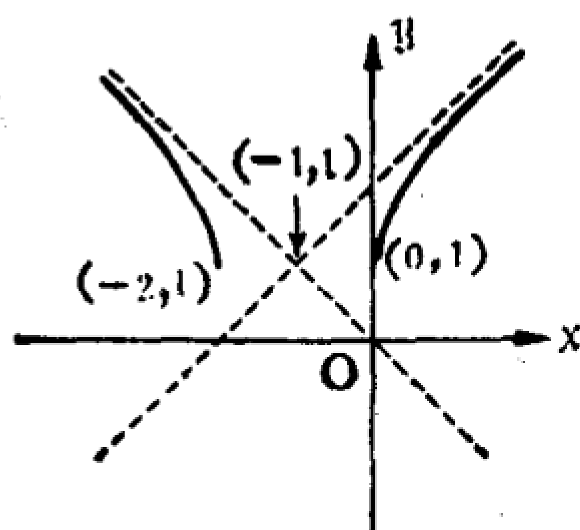


图 3-22

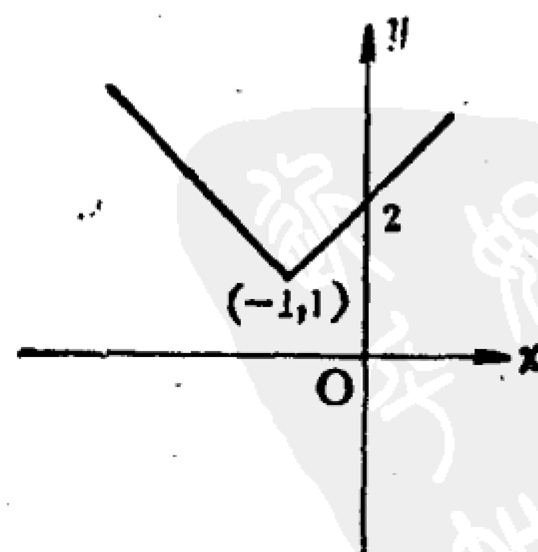


图 3-23

5·5 无理函数的最大值、最小值

例 试求无理函数 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ 的最大值与最小值.

解 这个函数的定义域是 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 关于其函数图象，只要把 $y=x$ 和 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的图象合成，便得到 $y=x+\sqrt{4-x^2}$ 的图象，如图 3-24 中的实(曲)线所示.

由图可知，函数的最小值是 -2 ($x=-2$时).

又由 $(y-x)^2=4-x^2$，得

$$2x^2-2yx+y^2-4=0.$$

而 x 是实数，因此

$$\frac{D}{4}=y^2-2(y^2-4)\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad -2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 2\sqrt{2}.$$

因而由图象知，最大值是 $2\sqrt{2}$.

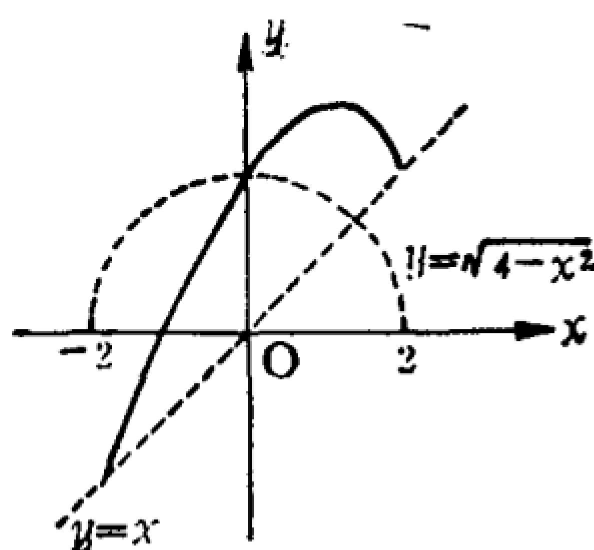


图 3-24

第四章　指数与对数

§1.　对数的历史

对数是由苏格兰男爵耐普尔(1550—1617)首先发现的．1614年出版了他的《奇妙的对数规则的说明》一书，此书向全世界阐明了对数的性质，并作出了在第一象限内以一分为间隔的角的正弦的自然对数表．1618年出版了《说明》的英译本(译者为爱德华·芮特)，附录中首次出现了以e为底的，略去了小数的一般自然对数表．

对数的发现带来了计算方法上的革命，拉普拉斯赞美道："对数的发现减轻了人们的辛劳，使天文学家的生命倍增"．常用对数表出现于1620年．是由耐普尔和英国剑桥大学教授布立斯(1556—1631)编制成的．在这个十四位对数表中，包括从1到20000及从90000到100000的对数．

§2.　指数法则的推广

2·1　指数法则

有必要把$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$这类"在指数之间成立的关系"，由m,n是自然数的场合扩张到取一切实数的场合．

【定义】　乘幂的指数　把n个a相乘的积写成a^n．这时的n叫做乘幂的指数．

注意　在这个阶段，a可以是任何数，n是自然数．不言而喻，在本章中只处理实数，因而，如果没有事先特别说明，a就是实数．

【定理】1.（指数法则）　设a，b是正数，m，n是正整数，则下列等式成立．

(1)　$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；　　(2)　$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ (m>n)$；

(3)　$(a^m)^n=a^{mn}$；　　(4)　$(ab)^n=a^nb^n$；

(5)　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

上述五个公式叫做指数法则．

证明　(1)　$a^m\cdot a^n=(\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{m个})\cdot(\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n个})$

$$=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{m+n个}=a^{m+n}$$

注意　(2)～(5)　都可按上述方法证明．　□

为了把指数 m，n 由正的整数扩张到有理数范围，作为准备，有必要先整理出下列关于方根的法则．

【定理】2．（方根和运算法则）

设 a，b 是正数，m，n，p 是正整数，则下列等式成立．

(1)　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$；　　(2)　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$；

(3)　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$；　　(4)　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$；

(5)　$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$.

（在 $\sqrt[m]{\quad}$，$\sqrt[n]{\quad}$ 等根号中，设 m，n 是不小于 2 的整数.）

证明　(1)　$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n$

$$=ab.\ (指数法则(4))$$

因为 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$，$ab>0$，所以由 n 次方根的定义得

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}；\qquad ①$$

(2)　$\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\dfrac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\dfrac{a}{b}$，　　（指数法则(5)）

从而　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

(3)　$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{m个}=\sqrt[n]{a^m}$；　　（根据①）

(4)　$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left\{\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})^n}\right\}^m=(\sqrt[n]{a})^n=a$，（根据指数法则(3)）

$$\therefore\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}，$$

(5) $(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$,

$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=(a^m)^p=a^{mp}$, （根据指数法则(3)）

$\therefore\ \sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$. □

注意 关于方根，可定义如下：

(i) 当 n 为奇数时，满足 $a^n=A$ 的 a 值（实数值）有一个。把这个 a 值叫做 A 的 n 次方根，用 $\sqrt[n]{A}$ 表示。若 $A>0$，则 $a>0$；若 $A<0$，则 $a<0$.

当 n 为偶数时，若 $A>0$，则满足 $a^n=A$ 的 a 值有两个，一个是正数，另一个是负数。a 值是正的一个用 $\sqrt[n]{A}$ 表示.

（当 $A<0$ 时，满足 $a^n=A$ 的 a 不存在.）

(ii) 按 $\sqrt[n]{A}$ 的上述定义，有

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}\rightleftarrows A=B.$$

2.2 指数的推广

设指数法则(2)在 $m=n$ 时也成立，则

(i) $1=\dfrac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0$，亦即应规定

$$a^0=1.$$

若(2) 在 $m<n$ 时也成立，则令 $m+p=n$，有

(ii) $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a^m}{a^{m+p}}=a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$，亦即应规定

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

又设指数法则(3)在 m 是分数时也成立，则当 $m=\dfrac{1}{n}$ 时，

(iii) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a^{\frac{1}{n}\cdot n}=a$.亦即应规定

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$$

从而有

(iv) $a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. 亦即应规定

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

可以把上述结果再进一步推广到负的有理数。例如

$$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}},\quad a^{-\frac{2}{3}}=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}=\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^{-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

于是，指数是0，负数，分数的场合都作了定义。也就是说指数概念被推广到了全部有理数。对于这个推广了的指数，为了说明上述五个指数法则也成立，只要证明下面的定理就行了。

【定理】3．$a>0$，r，s 是正（或负）有理数时，下列指数法则成立：

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s},\quad (a^r)^s=a^{rs}.$$

证明　设 $r=\frac{m}{n}$，$s=\frac{p}{q}$，m，p 是正（或负）整数，n，q 是正整数。

由于 $r=\frac{m}{n}=\frac{mq}{nq}$，$s=\frac{p}{q}=\frac{np}{nq}$，所以

$$a^ra^s=\sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}}$$

$$=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s},$$

$$(a^r)^s=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p=\left(\sqrt[nq]{a^m}\right)^p$$

$$=\sqrt[nq]{(a^m)^p}=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{rs}.$$ □

注意　把 a 取为正数的原因是，当 a 是负数时，$a^{\frac{1}{2}}$变为虚数，处理也就变得困难了。例如，若 $a=-16$，则 $a^{\frac{1}{2}}=4i$，　$a^{\frac{2}{4}}=\sqrt[4]{(-16)^2}=\sqrt[4]{2^8}=4$，∴　$a^{\frac{1}{2}}\neq a^{\frac{2}{4}}$．上述定理不再成立。当 a 是正数时，$a^{\frac{1}{n}}$在 n 是奇数时取实数，n 是偶数时取正数值．因此在其中任何一种场合$a^{\frac{1}{n}}$都取正值。

当 a 是正数，n 是正整数（$n\geq2$）时，$a^{\frac{1}{n}}$值是正数($\sqrt[n]{a}$)．

当 a 是负数时，若限于 n 是奇数($n\geq3$)的场合，则 $a^{\frac{1}{n}}$取实数值，此值是负数。a 是负数，n 是偶数时，$a^{\frac{1}{n}}$不存在(不存在这样的实数值)．例如，$(-8)^{\frac{1}{3}}\sqrt{(-8)}=-2$，而$(-8)^{\frac{1}{6}}$这个数则不存在．

例　$(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\left\{(-8)^2\right\}^{\frac{1}{6}}=64^{\frac{1}{6}}=2.$

这是错误的．这是因为$(-8)^{\frac{1}{6}}$不存在，所以$(-8)^{\frac{2}{6}}$也不存在的缘故．

再者，在指数的推广中，a 仅限于取正数．这一点对实际计算没有什么影响．这是因为，对任何底数的幂都可以归结成 $a^m(a>0)$ 的形式来计算．例如，

$$(-8)^2=+(+8)^2,\ (-8)^3=-(+8)^3,\ (-8)^{\frac{1}{3}}=-(8^{\frac{1}{3}}).$$

于是，指数被推广成了有理数．作为一个例子，列出 2^r 的数表：

r	2^r	2^{-r}	r	2^r	2^{-r}
.001	1.000 693 4	0.999 307 1	.40	1.319 51	0.757 86
.005	1.003 471 7	0.996 540 2	.45	1.366 04	0.732 04
.01	1.006 955 6	0.993 092 5	.50	1.414 21	0.707 11
.02	1.013 96	0.986 23	.55	1.464 08	0.683 02
.03	1.021 01	0.979 42	.60	1.515 72	0.659 75
.04	1.028 11	0.972 66	.65	1.569 17	0.637 28
.05	1.035 26	0.965 94	.70	1.624 50	0.615 57
.10	1.071 77	0.933 03	.75	1.681 79	0.594 60
.15	1.109 57	0.901 25	.80	1.741 10	0.574 35
.20	1.148 70	0.870 55	.85	1.802 50	0.554 78
.25	1.189 21	0.840 90	.90	1.866 07	0.535 89
.30	1.231 14	0.812 25	.95	1.931 87	0.517 63
.35	1.274 56	0.784 58	1.00	2.000 00	0.500 00

使用此数表按下列方式作计算：

$$2^{1.68}=2^{1+0.65+0.03}=2^1\cdot 2^{0.65}\cdot 2^{0.03}$$
$$=2(1.569)(1.021)=3.204,$$
$$2^{-0.37}=2^{-1+0.63}=2^{0.60+0.03-1}=2^{0.60}\cdot 2^{0.03}/2$$
$$=\frac{1.516\times 1.021}{2}=0.774.$$

为了把指数再推广到实数，试考察收敛于 r 的序列 $r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n,\ \cdots$，而把 a^r 定义为 $a^{r_1},\ a^{r_2},\ \cdots,\ a^{r_n},\ \cdots$的极限。也就是说，设

$$a^r=\lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

作为一例，我们来定义$2^{\sqrt{2}}$．因为

$$1.4<\sqrt{2}<1.5,$$
$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$
$$1.414<\sqrt{2}<1.415,$$
$$1.4142<\sqrt{2}<1.4143,$$
$$1.41421<\sqrt{2}<1.41422,$$

所以

$$2^{1.4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.5},$$

$$2^{1.41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.42},$$
$$2^{1.414}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.415},$$
$$2^{1.4142}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.4143},$$
$$2^{1.41421}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.41422}.$$

亦即

$$2.639<2^{1.4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.5}<2.829,$$
$$2.657<2^{1.41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.42}<2.676,$$
$$2.664<2^{1.414}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.415}<2.667,$$
$$2.665<2^{1.4142}<2^{\sqrt{2}}<2^{1.4143}<2.666.$$

由此得

$$2^{\sqrt{2}}=2.665\cdots$$

把这个过程用图形表示就如图 4-1 所示.

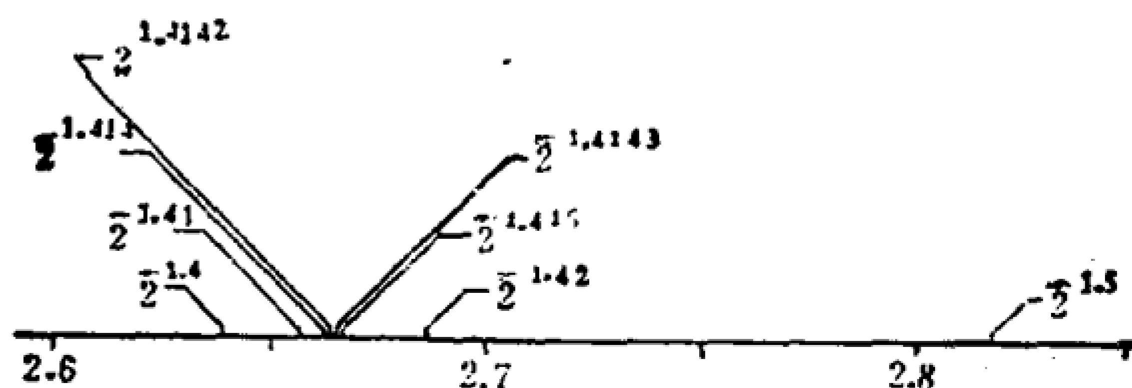


图 4-1

为了使上述定义成为可能，必须证明下列两个定理.

【定理】4. 若有理数序列 $\{r_n\}$ 收敛，则 a^{r_n} 也收敛.

证明　当 $a=1$ 时，是很显然的.

$a>1$ 的情形.

若 $r_1<r_2$，则 $a^{r_1}<a^{r_2}$.

事实上，由 $r_2-r_1>0$，有 $a^{r_2-r_1}>1^{r_2-r_1}=1$，$a^{r_2}=a^{r_1}\cdot a^{r_2-r_1}>a^{r_1}$.

其次，设 q 是任意的正整数，则由于 r_n 收敛，故可适当地决定一自然数 N，当 $n\geqslant N$，$m\geqslant N$ 时，有

$$-\frac{1}{q}<r_m-r_n<\frac{1}{q}.$$

当 r 是有理数时，a^r 单调增加，所以

$$a^{-1/q}<a^{r_m-r_n}<a^{1/q}.$$

若令 $a=1+d(d>0)$，则

$$a^{1/q}=(1+d)^{\frac{1}{q}}<1+\frac{d}{q},$$

从而

$$a^{-\frac{1}{q}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{q}}}>\frac{1}{1+\frac{d}{q}}>1-\frac{d}{q},$$

$$\therefore\quad 1-\frac{d}{q}<a^{r_m-r_n}<1+\frac{d}{q},$$

$$\left|a^{r_m-r_n}-1\right|<\frac{a-1}{q}$$

若取 R 满足 $r_n\leqslant R$，则 $a^{r_n}\leqslant a^R$，

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|=|a^{r_n}a^{r_m-r_n}-a^{r_n}|=a^{r_n}|a^{r_m-r_n}-1|$$

$$<a^R\frac{a-1}{q}.$$

由于 q 是任意的，若取得足够大，则可使

$$|a^{r_m}-a^{r_n}|<\varepsilon,$$

因而 $\{a^{r_n}\}$ 收敛.

$a<1$的情形，

若令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$，由于 $\{-r_n\}$ 收敛，所以 $\{b^{-r_n}\}$ 也收敛.

$$b^{-r_n}=\frac{1}{b^{r_n}}=\left(\frac{1}{b}\right)^{r_n}=a^{r_n},$$

从而 a^{r_n} 收敛. □

由这个定理，也可以定义（例如）$a^{\sqrt{2}}(a>0)$的意义. 也就是说，若收敛的有理数序列 $\{r_n\}$ 的极限值是$\sqrt{2}$，则a^{r_n} 也收敛，其极限值定义为 $a^{\sqrt{2}}$.

【定理】5. 对于以 r 作为极限值的两个有理数序列 $\{r_n\}$，$\{r'_n\}$，实数序列 $\{a^{r_n}\}$，$\{a^{r'_n}\}$ 也具有相同的极限值 a^r.

证明 若把两个有理数序列 $\{r_n\}$，$\{r'_n\}$ 合并而组成一新序列：

$$r_1,\ r_1',\ r_2,\ r_2',\ \cdots$$

则此序列收敛于 r. 从而，a^{r_1}，$a^{r_1'}$，a^{r_2}，$a^{r_2'}$，…收敛于 a^r. □

当 r 是实数时，a^r 是正数，由于 $\{r_n\}$ 是有界的，所以 $g<r_n<G$. 因而，当 $a>1$ 时，$a^{r_n}>a^g>0$；当 $a<1$ 时，

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-r_n}>\left(\frac{1}{a}\right)^{-G}$, $\therefore$ $a^{r_n}>a^G>0$，在其中任何一种情形下，都有 $a^r>0$。

这样一来，指数概念被推广到了实数。且指数法则仍然成立。

【定理】6．当 $a>0$ 时，对于任意的实数 x，y，下列等式成立：

$$a^x.a^y=a^{x+y},$$
$$(a^x)^y=a^{xy}.$$

证明 令 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$($x_n$，$y_n$ 是有理数)，则

$$a^{x_n}\cdot a^{y_n}=a^{x_n+y_n}$$

取其极限得 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$.

其次，若 y 是正有理数，则令

$$y=\frac{p}{q},(a^x)^{\frac{p}{q}}=\xi,\quad a^{\frac{xp}{q}}=\eta\ (p,\ q\ 是自然数),有$$

$$\xi^q=(a^x)^p=a^x.a^x\cdots a^x=a^{x+x+\cdots+x}=a^{px}.$$

$$\eta^q=\left(a^{\frac{xp}{q}}\right)^q=a^{\frac{xp}{q}}.a^{\frac{xp}{q}}\cdots a^{\frac{xp}{q}}=a^{\frac{xp}{q}+\frac{xp}{q}+\cdots+\frac{xp}{q}}$$

$$=a^{q\cdot\frac{xp}{q}}=a^{xp},$$

从而 $\xi=\eta$.

y 是负有理数的情形，只要令 $y=-z$ 即可.

进一步，当 y 为实数且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$ 而 y_n 是有理数时，有

$$(a^x)^{y_n}=a^{xy_n},$$

两端取极限值，由【定理】5 知，左端是 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=(a^x)^y$；

而右端，由指数函数连续性，得 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}$，

$\therefore\ (a^x)^y=a^{xy}$. □

注意 象这样进行指数的推广是困难的．因而也可以采用把指数函数定义为对数函数的反函数的方式来推广指数，从注重理论的角度上看，这种方法是合适的．但在此，我们是按传统的顺序作推广的。

§ 3. 指数函数

3·1 指数函数

在 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq1)$中，给 x 以任意的实数，与此对应，a^x 的值都是确定的．函数 a^x 叫做**以 a 为底的指数函数**．指数函数的定义域是全体实数的集合，值域是全体正实数，且是一一对应的．

【定理】1．若 $a>1$，r 是正有理数，则 $a^r>1$．

证明 (i) r 是正整数时，

$$a^r=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{r\text{个}}>\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{r\text{个}}=1.$$

(ii) $r=\dfrac{m}{n}$（m，n 是正整数）时，

若 $a^r=a^{\frac{m}{n}}\leqslant1$，则两端 n 次乘方以后得$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\leqslant1$，$a^m\leqslant1$，这与

(i)矛盾，因而$a^r=a^{\frac{m}{n}}>1$． □

【定理】2．若 $0<a<1$，r 是正有理数，则 $0<a^r<1$．

证明 $a^r=(a^{-1})^{-r}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-r}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^r}$，

由于 $0<a<1$，所以$\dfrac{1}{a}>1$．再由【定理】1，$\left(\dfrac{1}{a}\right)^r>1$，故其倒数小于1，

∴ $0<a^r<1$． □

【定理】3．若 $a>1$，r，s 是有理数，且 $r<s$，则 $a^r<a^s$．

证明 $\dfrac{a^s}{a^r}=a^{s-r}>1$．由于 $a^r>0$，所以两端乘以 a^r 后得 $a^s>a^r$． □

【定理】4．设 $a>1$，r 是正有理数．当使 r 无限变大时，a^r 也无限变大．

证明 因 $a>1$，故可设 $a=1+b$，$b>0$，$a^n=(1+b)^n>1+nb$．

若 $n+1>r\geqslant n$，则 $a^r\geqslant a^n>1+nb$．

从这个式子可以看出，若 n 无限变大，则 nb 也无限变大，a^r 也无限变大． □

注意　如上所述，指数意义的推广是看成有理数序列的极限来实现的．上面所列举的诸定理，对于 x 取任何实数值的函数 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$ 也成立．由这些定理可得指数函数的单调性，即当 $a>1$ 时，若 x 增加，则 $y=a^x$ 也增加．当 $1>a>0$ 时，若 x 增加，则 y 减少．总之，具有单调增加或者单调减少的性质．当 $a>1$ 时，若 x 从 $-\infty$ 增加到 $+\infty$，则 y 从 0 增加到 $+\infty$．而当 $1>a>0$ 时，y 从 $+\infty$ 减少到 0．

3·2　指数函数的性质

下面列出了指数函数 $f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的基本性质．最好与指数函数的图象对照起来认识它们（图 4-2）．

指数函数的性质　$f(x)=a^x\ (a>1)$：

(1) 对于 x 的一切值，$f(x)>0$；

(2) $f(0)=1$；

(3) 若 x 增加，则 $f(x)$ 单调增加；

(4) $x\to\infty$ 时，$f(x)\to\infty$；

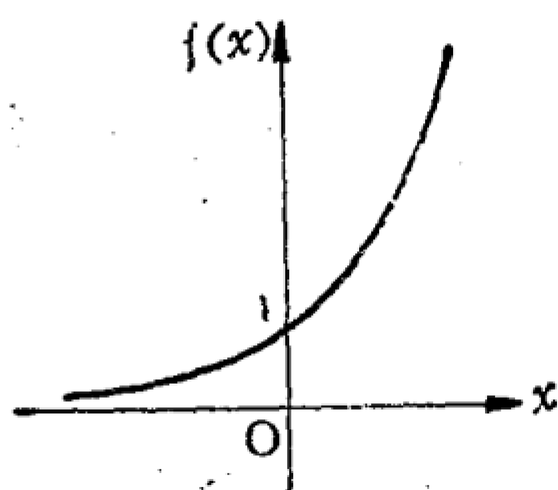
(5) $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$；

(6) $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，

$f(x_1-x_2)=f(x_1)/f(x_2)$，

$f(mx)=\{f(x)\}^m$；

(A) $a>1$



(B) $a<1$

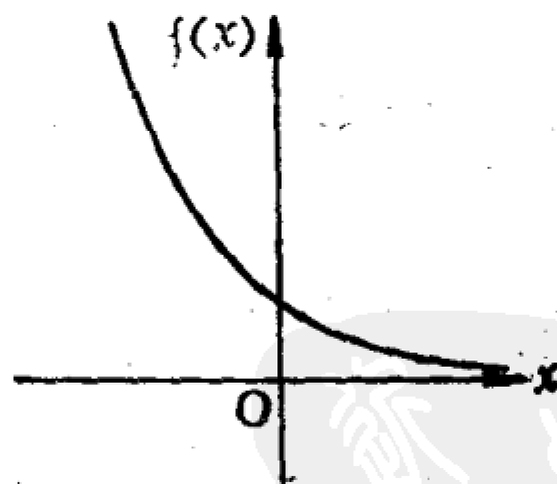


图 4-2

(7) 图形是向上凹的．

证明　(6) $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=f(x_1)\cdot f(x_2)$．

$$f(x_1-x_2)=a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=f(x_1)/f(x_2).$$

$$f(mx)=a^{mx}=(a^x)^m=\{f(x)\}^m.$$

(7) 设 $y_1=a^{x_1}$，$y_2=a^{x_2}$，则

$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\sqrt{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}=\sqrt{y_1y_2},$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}>\sqrt{y_1y_2},$$

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}>a^{\frac{x_1+x_2}{2}},$$

也就是说，图形是向上方凹的。 □

例 令$f(x)=\frac{e^x+e^x}{2}$，$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}(e>0)$，

则 $$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\frac{1}{4}\{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^x\cdot e^{-x}=1$$

∴ $$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1.$$

注意 $f(x)$，$g(x)$分别叫做双曲线余弦（ch$x$），双曲线正弦(sh$x$)．(参看本章§7【定义】2.)

【定理】5. $y=a^x$ $(a>0)$在$-\infty<x<\infty$上是连续的．

证明 $a=1$ 时是很明显的．

$a>1$ 时，设q是任意大的正整数，则可确定某个自然数 N，使得当$n>N$时，有

$$-\frac{1}{q}<x_n-x<\frac{1}{q}.$$

因此由a^x的单增性有

$$a^{-\frac{1}{q}}<a^{x_n-x}<a^{\frac{1}{q}}.$$

若令$a=1+d(d>0)$，则

$$|a^{x_n-x}-1|<\frac{d}{q}=\frac{a-1}{q}.$$

因而，对于任意的正数 ε，取自然数 q 使满足$\frac{a-1}{q}<\varepsilon$，此后确定 N，当 $n>N$ 时有

$$|a^{x_n-x}-1|<\varepsilon \text{ 即 } \lim_{n\to\infty} a^{x_n-x}=1.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n}=\lim_{n\to\infty}(a^x a^{x_n-x})=a^x\cdot 1=a^x.$$

$a<1$ 时，若令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$，归结为前述情形。

也就是说，$y=a^x$ 在任意点 x 是连续的。 □

§4. 对数及其基本性质

对于指数函数 $y=a^x$，若 $a>1$，则当 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 增加时，y 从 0 单调地增加，变为 $+\infty$. 由此可知：

对于正实数 a，$b(a\neq1)$，满足 $a^x=b$ 的实数 x 仅有一个. 当 $0<a<1$ 时，函数 a^x 的值从 $+\infty$ 单调地减少到 0，因此完全同样地，满足 $a^x=b$ 的实数 x 也仅有一个.

【定义】 对数 设 a 是不等于 1 的正数，对于正实数 p，满足 $a^r=p$ 的实数 r，叫做 p 的以 a 为底的对数，写成

$$r=\log_a p.$$

这个 p 叫做 r 的真数. 由【定义】显然 $p>0$.

又由 $a^0=1$, $a^1=a$, $a^r=a^r$,

知 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $\log_a a^r=r$.

【定理】1. 设 $a>0$，$a\neq1$，$p>0$，$q>0$，α 是实数. 则

(1) $\log_a pq=\log_a p+\log_a q$;

(2) $\log_a \frac{p}{q}=\log_a p-\log_a q$;

(3) $\log_a p^\alpha=\alpha\log_a p$.

证明 令 $r=\log_a p$, $s=\log_a q$, 则 $p=a^r$, $q=a^s$.

$$pq=a^r a^s=a^{r+s},\quad \frac{p}{q}=\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s},$$

$$\therefore\quad \log_a pq=r+s=\log_a p+\log_a q.$$

$$\log_a \frac{p}{q}=r-s=\log_a p-\log_a q,$$

$$p^\alpha=(a^r)^\alpha=a^{r\alpha},$$

$$\therefore\quad \log_a p^\alpha=r\alpha=\alpha\log_a p.$$ □

【定理】2. $\log_a p=\log_a b\cdot\log_b p$, 即 $\log_b p=\dfrac{\log_a p}{\log_a b}$.

证明 令 $\log_b p=r$, 则$b^r=p$.

$\therefore\quad \log_a p=\log_a b^r=r\log_a b=\log_a b\cdot\log_b p.$ □

【系】 $\log_a b\cdot\log_b c\cdots\cdots\log_p a=1$.

【定理】3. $\log_{\frac{1}{a}} p=-\log_a p$.

证明 令 $\log_{\frac{1}{a}} p=r$, 则$\left(\dfrac{1}{a}\right)^r=p$, $a^r=\dfrac{1}{p}$.

$$\therefore\quad r=\log_a \frac{1}{p}=\log_a 1-\log_a p=-\log_a p.$$

$$\log_{\frac{1}{a}} p=-\log_a p.$$ □

注意 把 $\log_a p+\log_a q$ 变形时，得 $\log_a pq$. 但其相反的变形不能是无条件的. 这是因为对于 $\log_a pq$, 其真数的条件是 $pq>0$, 但并不一定意味着 $p>0$ 和 $q>0$. 所以只能有

$$\log_a pq=\log_a |p|+\log_a |q|.$$

例 $\log_a x^2=2\log_a |x|$.

当 $x>0$ 时, $\log_a x^2=2\log_a x$;

当 $x<0$ 时, $\log_a x^2=2\log_a(-x)$.



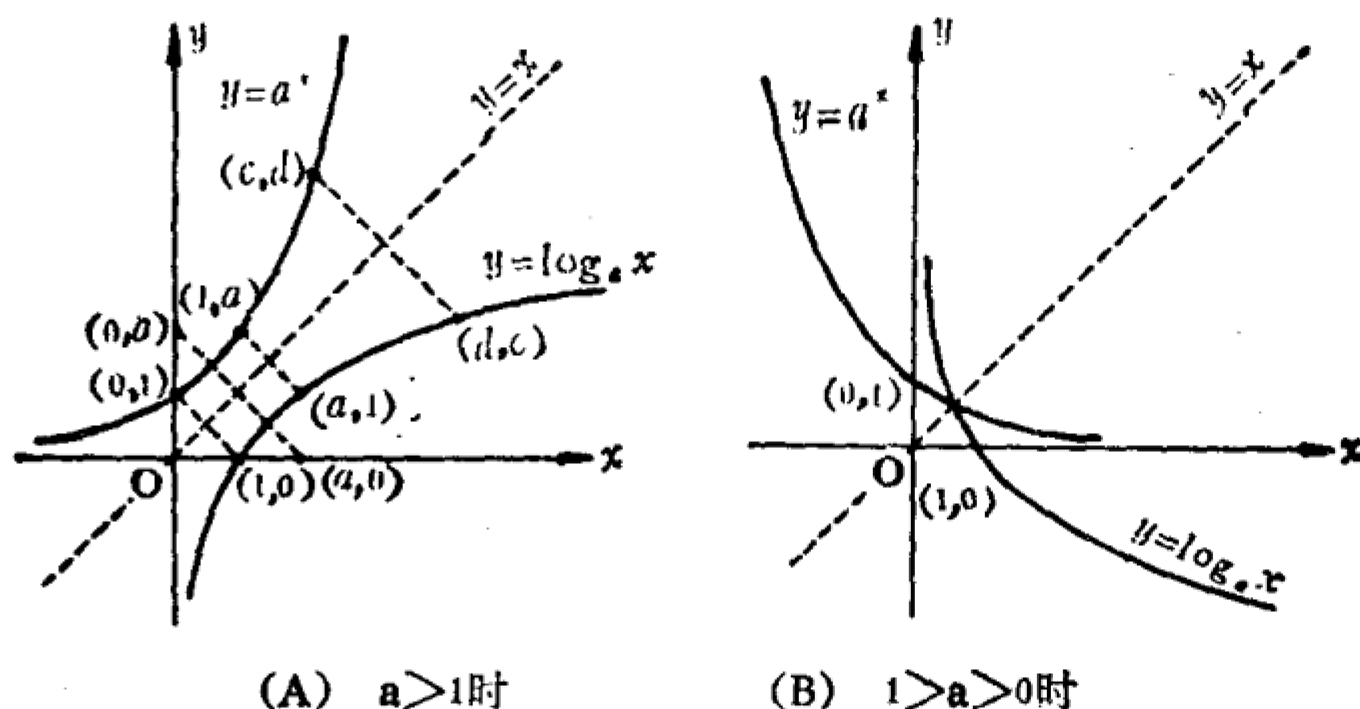
§5. 对数函数

[定义]1. 对数函数 设 a 为不等于 1 的正实数，与任意的正实数 x 对应的 y 是 $\log_a x$，则

$$y=\log_a x$$

叫做以 a 为底的对数函数.

由此定义知，对数函数的定义域是全部正实数的集合．值域是全部实数的集合．把函数 $y=a^x$ 中的 x 与 y 交换，改写成 $x=a^y$，便得到 $y=\log_a x$，因此对数函数与指数函数互为反函数．从而，对数函数 $y=\log_a x$ 的图象与指数函数 $y=a^x$ 的图象，关于直线 $y=x$ 对称．对数函数的图象如图 4-3 所示.



(A) a>1时　　(B) 1>a>0时

图 4-3

【定理】 若 $a>1$，$p>q$，则 $\log_a p>\log_a q$；

若 $1>a>0$，$p>q$，则 $\log_a p<\log_a q$.

证明 令 $\log_a p=x$，$\log_a q=y$，则 $p=a^x$，$q=a^y$．由于 $p>q$，所以 $a^x>a^y$.

由§3诸定理知，$a>1$ 时 $x>y$，即 $\log_a p>\log_a q$；

$1>a>0$ 时，$x<y$，即 $\log_a p<\log_a q$.

因此，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $a>1$ 时是单调增加的，假如 x 变为无限大，则 y 也变为无限大；假如 x 无限趋近于 0，则 y 为负且绝对值变为无限大.

假如$0<a<1$，则$y=\log_a x$单调减少．如果x变为无限大，则y为负且绝对值变为无限大．如果x无限趋近于0，则y变为无限大． □

【定义】2．指数方程式 在指数上含有未知数的方程式，叫做指数方程式．

例1． $3^x+3^{-x}=2.\left(\text{若令 } 3^x=X\text{，则 } 3^{-x}=\frac{1}{X}.\right)$

例2． $|a|<1$时，解$\frac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}=a$．

(令$10^x=X$，利用$X>0$.)

例3． 试求$10^x=x^{10}$的负根．

(令$x=-t$，$-\frac{t}{10}=\log_{10}t$，再利用数学用表.)

【定义】3．对数方程式 对数的真数或底数（或同时）含有未知数的方程式，叫做对数方程式．

例1． $\log_{10}x+\log_{10}(6x+11)=1$（注意$x>0$，$6x+11>0$）．

例2． $\log_{(x-1)^2}(x+1)=\log_{x+1}(x-1)^2$．

(因为对数的真数是正，底是不等于1的正数，所以$x>-1$，$x\neq0$，1，2.)

例3． $\log_2 x+\log_4 y=\log_3 y+\log_9 x=\log_z(xy)^3=\frac{3}{2}$．

(在例2和例3中，具有不同底的对数都要换成以10为底的对数.)

【定义】4．对数不等式 在对数的真数中含有未知数的不等式，叫做对数不等式．

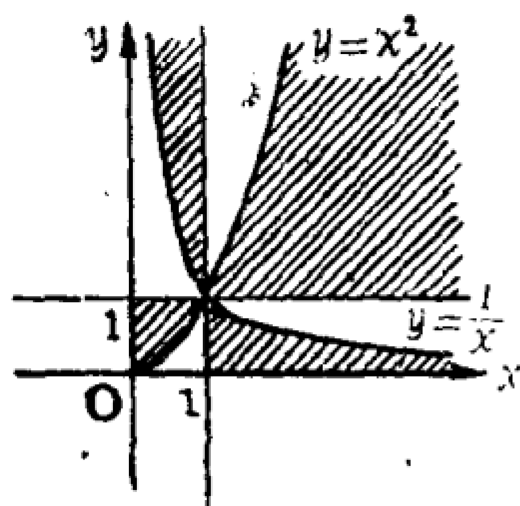
例1． 试求满足$\log_a\frac{2x-7}{x-3}\leqslant1$ $(a>1)$的x值的范围(必须按a的不同取值进行讨论.)

例2． 试把满足$\log_x y-2\log_y x<1$的点(x,y)的存在范围图示出来．

解 令$\log_x y=X$，则

$$X-\frac{2}{X}<1.$$

其解为 $X<-1$，或$0<X<2$．



因而当 $0<x<1$ 时，$y>\frac{1}{x}$ 或 $1>y>x^2$.

$x>1$ 时，$y<\frac{1}{x}$ 或 $1<y<x^2$.

图 4-4

图 4-4 中带阴影的部分（不包括边界）就表示了上述范围.

§6. 常用对数

【定义】1. 常用对数　以 10 为底的对数叫做常用对数. 通常，把 $\log_{10} p$ 写成 $\lg p$，而把底 10 省去.

【定义】2. 对数表　这是把许多数的常用对数的近似值依次汇集而便于查阅的数表. 例如从 1.00 到 9.99 每隔 0.01 取一个数的常用对数，并按四舍五入法求到小数第四位，那么这样构成的数表叫做四位对数表.

【定理】　当真数的增加很小时，与此对应的常用对数的增加与真数的增加成正比例.

证明　设真数为 a.　$\varepsilon=\lg(a+h)-\lg a-h[\lg(a+1)-\lg a]$

$$=\lg\left(1+\frac{h}{a}\right)-h\lg\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\lg e\left[\log e\left(1+\frac{h}{a}\right)-h\log e\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$<\lg e\left[\frac{h}{a}-\frac{h^2}{2a^2}-\frac{h}{a}+\frac{h}{2a^2}\right]$$

$$=(\lg e)\ \frac{h(1-h)}{2a^2}<\frac{0.43429\cdots}{8a^2}<\frac{1}{16a^2}\quad\square$$

在四位对数表中，$a\geqslant 10^2$，因而 $\varepsilon<\frac{1}{16\times 10^4}<\frac{1}{10^5}$. 误差很小.

【定义】3. 首数与尾数　通常把常用对数的值表示成整数与小于 1 的纯小

数两部分的和。这时，整数部分叫做首数，小数部分叫做尾数。尾数一般是正的.

例 若 $\lg N=3.1014$，则 $\lg N$ 的首数是 3，若 $\lg N=\bar{2}.1014$，则 $\lg N$ 的首数是 -2，而两者的尾数都是 0.1014.

注意 当 $\lg N=n+\alpha$（n 是整数，而 $0\leqslant\alpha<1$）时，n 是 $\lg N$ 的首数，α 是 $\lg N$ 的尾数。因而尾数（不是近似值）是：$\alpha=-n+\lg N$.

例如，在 $\lg 300$ 中，首数是 2，因此

$$\lg 300=2+\alpha,\quad \alpha=-2+\lg 300=\lg 3.$$

首数的求法

(1) 大于 1 的真数，其对数的首数 k 为正，其值比真数的整数部分的位数 m 小 1.

$$k=m-1.$$

(2) 小于 1 的真数，其对数的首数 k 为负；它的绝对值等于真数首位有效数字左边"0"的个数 m（包括小数点前的那个零）：

$$k=-m.$$

尾数的求法

若两个正数只是小数点的位置不同，而数字的排列方式完全相同，则这两个数的对数具有相同的尾数.

例题 试求 $\lg x$ 与 $\lg\frac{1}{x}$ 的首数的和及尾数的和.

解 令 $\lg x=m+\alpha$，$\lg\frac{1}{x}=n+\beta$（m，n 是首数，α，β 是尾数），则

$$\lg x+\lg\frac{1}{x}=(m+n)+(\alpha+\beta),$$

$$\therefore\quad (m+n)+(\alpha+\beta)=0.$$

由此得 $\alpha+\beta=-(m+n)$.

但是 $0\leqslant\alpha<1$，$0\leqslant\beta<1$，m，n 是整数，故

$$\alpha+\beta=0 \text{ 或 } 1.$$

当 $\alpha+\beta=0$ 时，必有 $\alpha=\beta=0$，这时 $m+n=0$.

当 $\alpha+\beta=1$ 时，得 $m+n=-1$.

从而，首数的和是 -1，尾数的和是 1；或首数的和是 0，尾数的和也是 0.

§7. 自然对数

【定义】1. 自然对数 以 $e=2.7182818\cdots$ 作为底的对数叫做自然对数．e是按下列方式定义的数．

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

因为
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

而
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

如果比较一下这两个式子，就会看出，后一等式右端的各项大于或等于前一等式右端的对应项，且项数多一项，故有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

并且

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

也就是说，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调增加且有上界，因此具有极限值。这个极限值就

用 e 表示.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

另一方面，若使 p 满足 $p<n$ 且固定，则

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right).$$

令$n\to\infty$，则

$$e\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}.$$

因为 p 是任意的自然数，所以

$$e\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

从而

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

计算出数字得 $e=2.7182818\cdots$

【定义】2. 双曲函数 下列形式的指数函数的组合，叫做双曲函数.

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\qquad \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$$

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x};\qquad \mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}.$$

它们具有与三角函数类似的性质。下列各公式是容易检验的。

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1;\qquad 1-\mathrm{th}^2x=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x};$$

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{sh}y;$$
$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\cdot\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{sh}y;$$
$$\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\cdot\mathrm{ch}x;$$
$$\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x;$$

$$\text{th}(x+y)=\frac{\text{th}x+\text{th}y}{1+\text{th}x\cdot\text{th}y};$$

$$\text{th}2x=\frac{2\text{th}x}{1+\text{th}^2x};$$

$$(\text{sh}x)'=\text{ch}x,\ (\text{ch}x)'=\text{sh}x;$$

$$(\text{th}x)'=\frac{1}{\text{ch}^2x}.$$

【定义】3. 反双曲函数　双曲函数的反函数叫做反双曲函数。

$$\text{sh}^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1});$$

$$\text{ch}^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant1);$$

$$\text{th}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (|x|<1).$$

说明　$x=\text{sh}y=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$，

若对 e^y 求解，则

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}.$$

因为 $e^y>0$，所以

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

$x=\text{ch}y=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$，

若对 e^y 求解，则

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}\ (x\geqslant1).$$

$$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=1;$$

$$\therefore\ y=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

把　$x=\text{th}y=\frac{e^y-e^{-y}}{e^y+e^{-y}}$ 就 e^y 求解，

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x},\ \text{因此}\ \text{th}^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

§8.　函数尺·对数尺和计算尺

假设给定变数 x 的函数 $f(x)$，则对于变数 x 的值，函数 $f(x)$ 的相应值由下表给出：

x	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$f(x)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	…

若在一条给定的直线上作好分划，使在原点刻度为0，并规定单位长度为m，在这条直线上刻下点$f(1)m$，$f(2)m$，$f(3)m$，…，并在这些点各自标记1，2，3，…，如图4-5所示。那么，这样得到的尺子叫做函数尺。用$f(x)=\lg x$制作的函数尺，叫做对数尺。**计算尺是由对数尺组合起来的。**

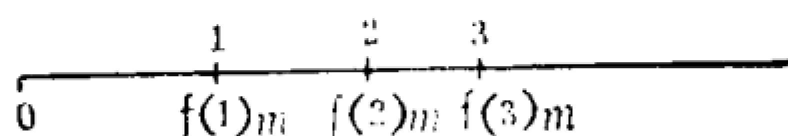


图 4-5

计算尺

计算尺是把两个对数尺组合起来，进行乘法、除法等运算的工具。图4-6是由A尺、B尺、C尺、D尺及CI尺组成的计算尺。在这些尺子的刻度间具有如下关系：

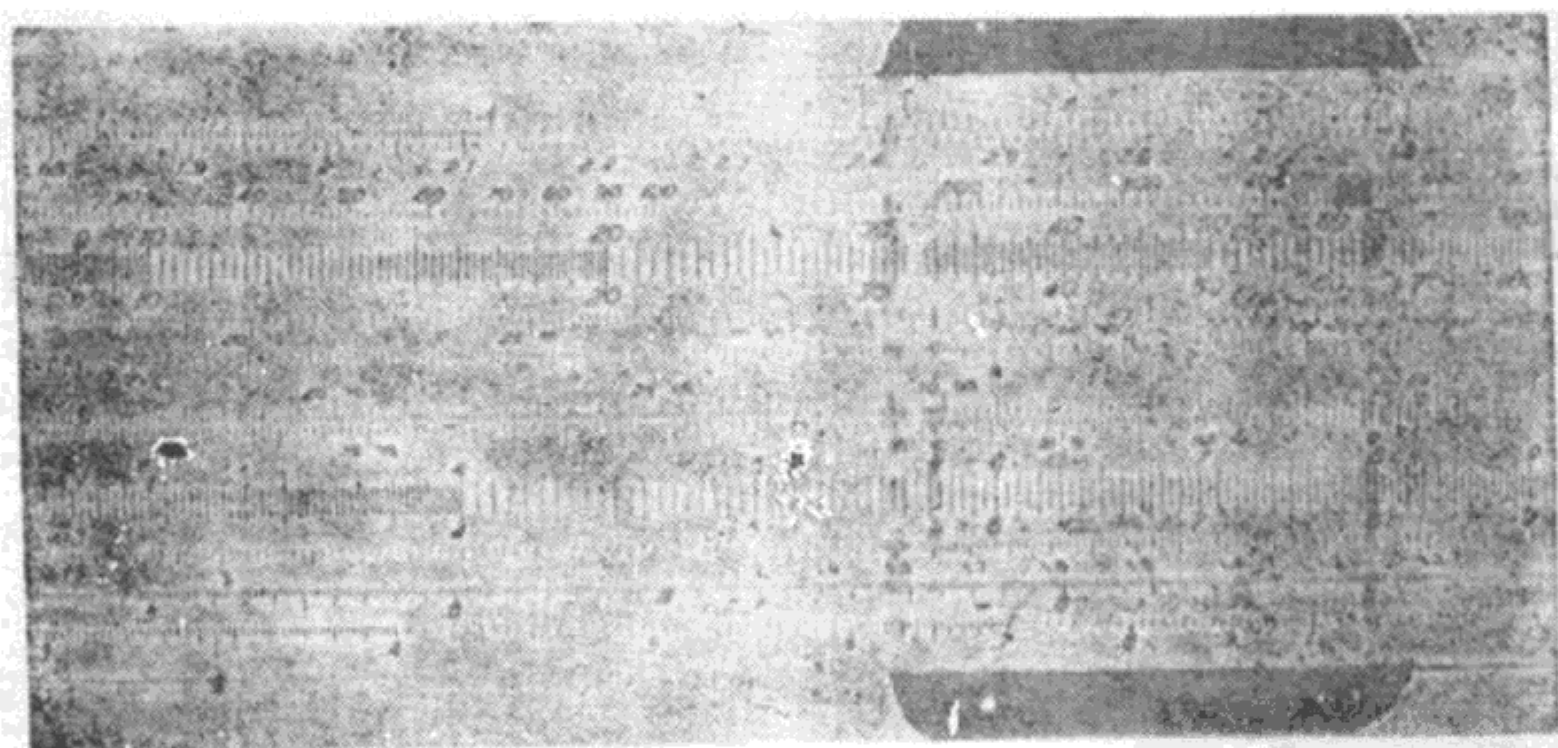


图 4-6

(1) C尺和D尺是相同的对数尺，刻度从1到10。

(2) CI尺也叫做反C尺，它是和C尺反方向刻度的对数尺。

(3) A尺与B尺是相同的对数尺，其单位长度是C尺、D尺单位长度的$\frac{1}{2}$。

C尺和D尺

如图4-7所示，置C尺、D尺使刻度a和b，c和d重合．因为重合的两个刻度间的长度相等，所以

$$\lg c-\lg a=\lg d-\lg b,$$

移项得

$$\lg a-\lg b=\lg c-\lg d,$$

$$\lg\frac{a}{b}=\lg\frac{c}{d}.$$

从而　$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

特别是，令$a=1$，则得$d=bc$，$b=d/c$．

CI尺和D尺

如图4-8所示，置CI尺和D尺，使刻度a和b，c和d重合．重合的两个刻度之间的长度相等，从而

$$\lg a-\lg c=\lg d-\lg b,$$
$$\lg a+\lg b=\lg c+\lg d,$$
$$\lg ab=\lg cd,\quad ab=cd.$$

这两个尺子用于作乘法和除法．

A尺和D尺

如图4-9所示，在指示线上读出刻度a，b，则A尺的单位长度是$\frac{1}{2}$，且

$$\frac{1}{2}\lg a=\lg b,\quad a=b^2.$$

这两个尺子用来求数的平方与平方根．

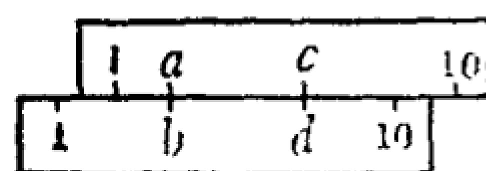


图 4-7

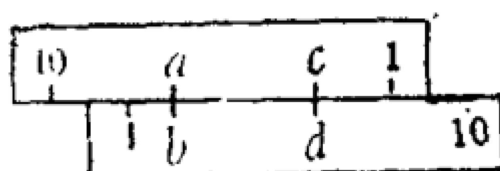


图 4-8



图 4-9

§9. 全对数坐标纸·半对数坐标纸和计算图表

全对数坐标纸 这是在横轴和纵轴上都具有对数刻度的坐标纸。如图4—10所示，若对下列各式

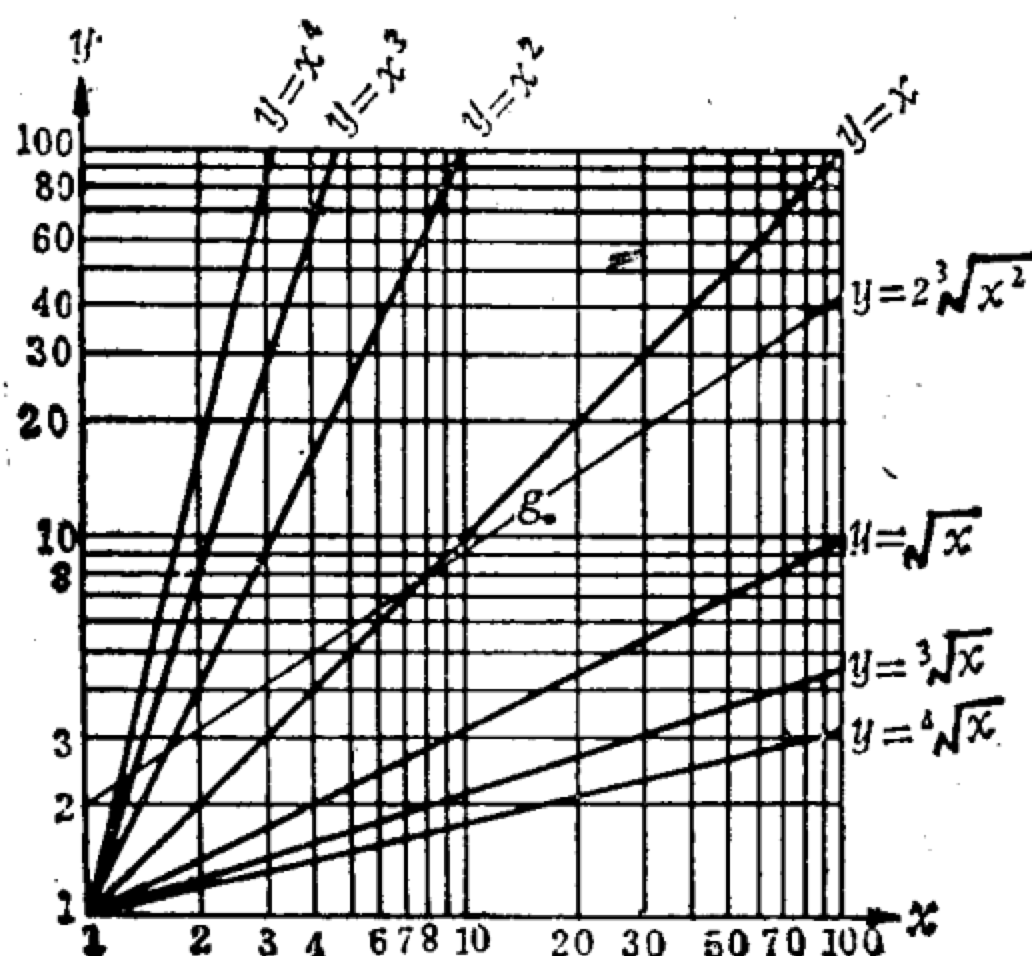


图 4-10

$y=x^2$,

$y=\sqrt[3]{x}$,

$y=2x^4$

两端取对数，则有

$\lg y=2\lg x$,

$\lg y=\frac{1}{3}\lg x$,

$\lg y=\lg 2+4\lg x$.

从而，若令 $\lg x=X$, $\lg y=Y$, 则

$$Y=2X,\quad Y=\frac{1}{3}X,\quad Y=4X+\log 2.$$

于是其中每一条都成了直线．

半对数坐标纸 这种坐标纸的横轴具有一般的刻度，纵轴具有对数刻度，如图 4-11 所示．若对下列各式

$$y=2^x,$$
$$y=ka^x\ (a>0,\ k>0)$$

两端取对数，则有

$$\lg y=x\log 2,$$
$$\lg y=\lg k+x\lg a.$$

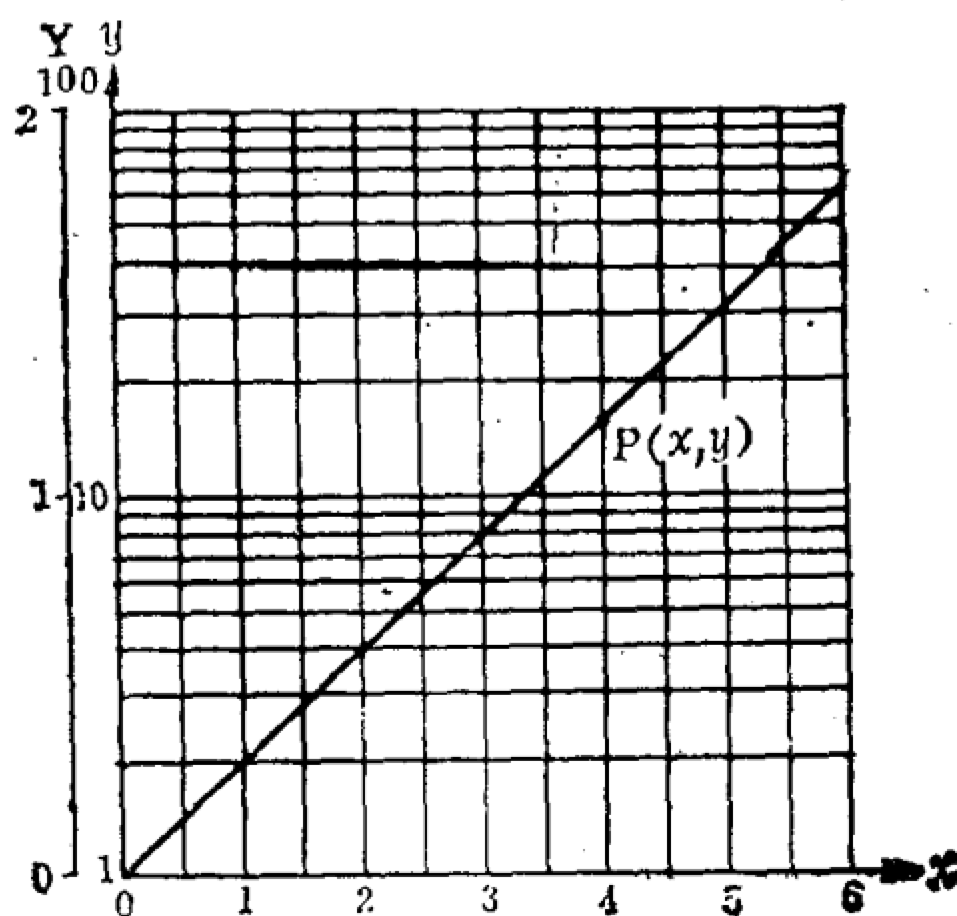


图 4-11

从而，若令 $\lg y=Y$，则

$$Y=(\lg 2)x,$$
$$Y=(\lg a)x+\lg k$$

于是它们都成了直线．

计算图表 如图 4-12 所示．令 AB 的中点为 C，Ax，By，Cz 是平行线．假定另有一条任意的直线，与 Ax，By，Cz 各相交于 P，Q，R，则有关

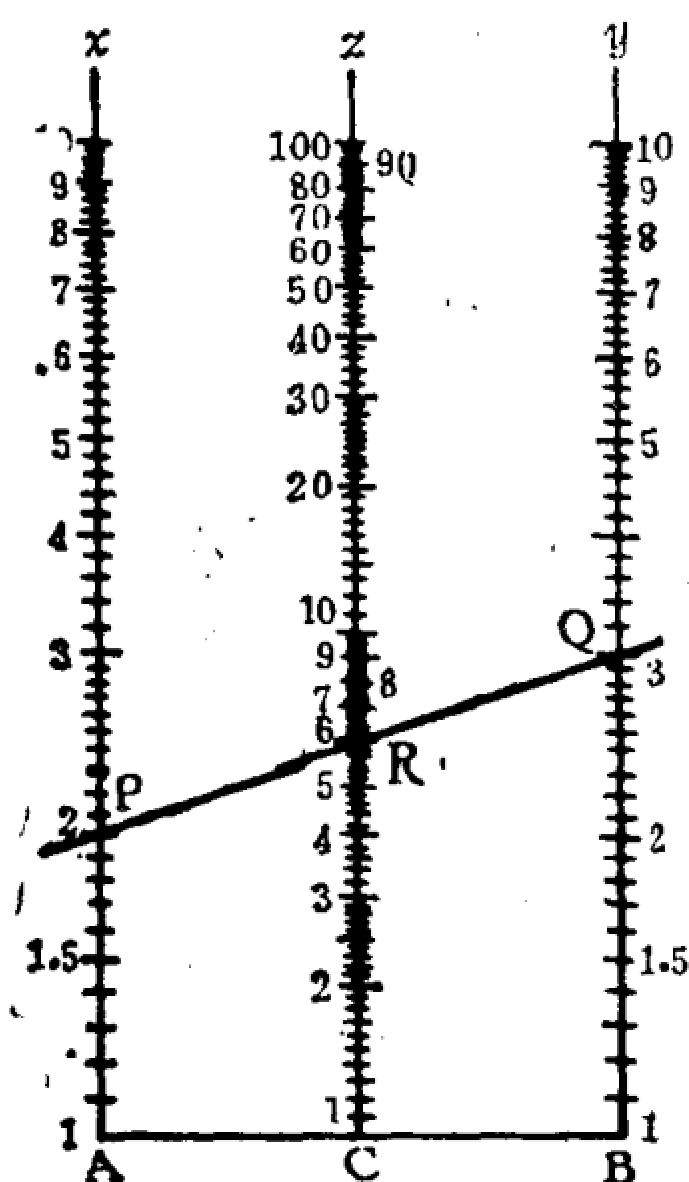


图 4-12

系式

$$2CR=AP+BQ.$$

另外，以A,B,C作基准刻出对数尺，且让Ax和By的单位长度相等，而Cz的单位长度是前者的一半．令P,Q,R的刻度为x,y,z,则

$$AP=\lg x,$$

$$BQ=\lg y,$$

$$CR=\frac{1}{2}\lg z.$$

因此

$$\log z=\lg x+\lg y,$$

即得 $z=xy$.

为了求xy的积，只要在AP，BQ上分别读出x，y的刻度，再把直尺的边沿与PQ直线重合，在直尺与Cz尺的交点处读出R的刻度即可．当z与x给定时，为了求y，只要读出CR，AP的刻度，再用直尺读BQ的刻度即可．象这样，P，Q，R位于同一直线上的计算图表，叫做**共线图表**．

在图4-13中，由$u=4$，$v=5$，可以设法读得$\omega=uv=20$．办法是：在$xy=z$两端取对数，

$$\lg x+\lg y=\lg z.$$

其中，若令

$$u=\lg x,\quad v=\lg y,\quad \omega=\lg z,$$

则得

$$u+v=\omega.$$

把$\omega=2,3,4,\cdots10,\cdots$代入，在图形上画出

$$u+v=2,\quad u+v=3,\cdots$$

由此便可直接读出两个数的积，某数用另一数除后所得的商．

由于$u=u_0$，$u=v_0$，$\omega=\omega_0$三条直线交于一点，因而叫做**共点图表**．

注意 在这里，仅对共线图表和共点图表各举了一个简单的例子．但这两者是图算法(Nomography)的两个重要内容．共线图表是法国数学家多卡

组，共点图表是比利时工程学者马索发明的．两者都产生于1884年．

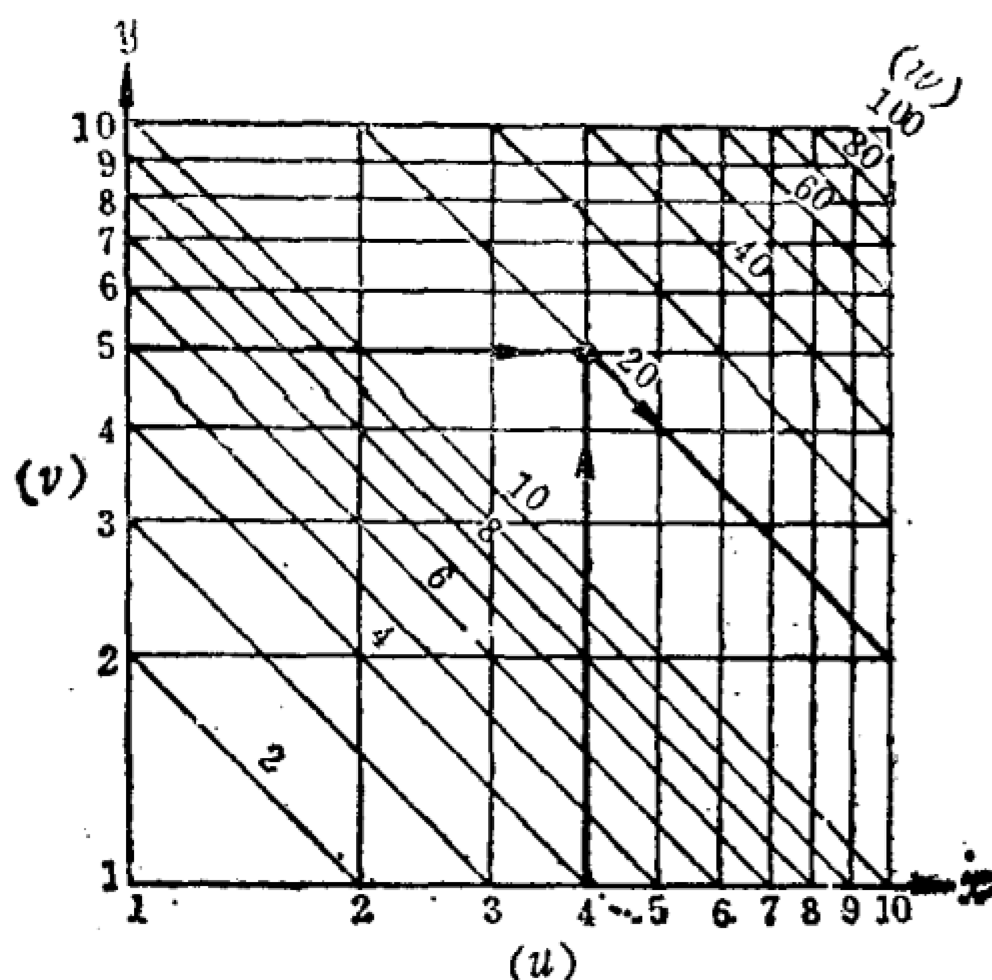


图 4-13

§10．函数方程式

$$f(x+y)=f(x)f(y) \text{和} f(x,y)=f(x)+f(y).$$

我们知道，生物生长、繁殖或放射性物质的减少等在一定时间内，增长率或减少率是一定的，这叫做生长法则．

在具有一定生长率的情形下，因为从 x 时刻到 $x+y$ 时刻的生长率与从 u 时刻到 $u+y$ 时刻的生长率相等，所以

$$\frac{A(x+y)}{A(x)}=\frac{A(u+y)}{A(u)}$$

成立。在时刻 y 的生长率变为时刻 $x=0$ 时的2倍的情形下，令 $u=y$，得

$$\frac{A(y)}{A(0)}=2=\frac{A(2y)}{A(y)}.$$

由此得到

$$A(y)=2A(0),$$
$$A(2y)=2A(y)=4A(0)=2^2A(0),$$

$$A(3y)=8A(0)=2^3A(0),$$

$$\vdots$$

$$A(ky)=2^kA(0).$$

由 $$\frac{A(x+y)}{A(x)}=\frac{A(y)}{A(0)},$$

得 $$A(x+y)=\frac{A(x)\,A(y)}{A(0)}.$$

两端用 $A(0)$除

$$\frac{A(x+y)}{A(0)}=\frac{A(x)}{A(0)}\cdot\frac{A(y)}{A(0)}.$$

若令 $f(x)=\dfrac{A(x)}{A(0)}$，则得下列函数方程

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$$

现在来考察由此方程所决定的连续函数 $f(x)$。我们有

$$f(x+x)=f(2x)=[f(x)]^2$$

及 $$f(x+0)=f(x)\cdot f(0),$$

或 $$f(x)=f(x)\cdot f(0).$$

若 $f(x)\neq0$，则

$$f(0)=1,$$

$$f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x),\quad f(0)=f(x)\cdot f(-x).$$

从而

$$f(-x)=1/f(x).$$

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2>0,$$

当 m 是整数时，有

$$f(mx)=[f(x)]^m,$$

$$f\left(m\cdot\frac{y}{m}\right)=\left[f\left(\frac{y}{m}\right)\right]^m.$$

由此得

$$f(x)=\left[f\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m,\quad 即\ f\left(\frac{x}{m}\right)=\left[f(x)\right]^{\frac{1}{m}}.$$

用 nx 代替 x，得

$$f\left(\frac{nx}{m}\right)=\left[f(nx)\right]^{\frac{1}{m}}=\left\{\left[f(x)\right]^{n}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left[f(x)\right]^{\frac{n}{m}}.$$

若令 $\frac{n}{m}=r$，则

$$f(rx)=[f(x)]^{r}.$$

由 $f(x)$的连续性知，r 是实数时上式成立.

若令 $x=1$，$f(1)=a$，则

$$f(r)=[f(1)]^{r}=a^{r}，即\ f(x)=a^{x}.$$

当 $f(x)=0$ 时，对于任意的 y，下式成立.

$$f(x+y)=f(x)f(y)=0.$$

因此　$f(x)\equiv 0$.

其次，在 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ 中，若把 f 的反函数记为 f^{-1}，且令 $f(x)=X$，$f(y)=Y$，则

$$f^{-1}[f(x+y)]=f^{-1}[f(x)\cdot f(y)],$$
$$x+y=f^{-1}(XY),$$
$$f^{-1}(X)+f^{-1}(Y)=f^{-1}(XY).$$

若记 $f^{-1}=g$，则得

$$g(XY)=g(X)+g(Y).$$

满足上述方程式的 $g(X)$是 a^{x} 的反函数，即 $\log_a X$.

也就是说，满足函数方程式

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

的 $f(x)$是

$$f(x)=\log_a x\ 或\ f(x)\equiv 0.$$

另解　(1) 设 f 可导.

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y),$$

若令 $y=0$，则 $f(x)=f(x)\,f(0)$

若 $f(x)\neq 0$，则 $f(0)=1$.

两端对 x 求导

$$f'(x+y)=f'(x)\cdot f(y).$$

令 $x=0$，则

$$f'(y)=f'(0)\cdot f(y),\qquad \frac{f'(y)}{f(y)}=f'(0).$$

对 y 积分

$$\ln f(y)=f'(0)y+c_1,\quad f(y)=ce^{f'(0)y}.$$

若令 $y=0$，则 $c=1$.

若令 $e^{f'(0)}=a$，则 $f(y)=a^y$，

即　$f(x)=a^x$ 或 $f(x)\equiv 0$.

(2) 设 f 可导.

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

若令 $x=1$，则 $f(1)=0$.

两端对 x 求导，

$$yf'_-(xy)=f'(x).$$

若令 $x=1$，则

$$yf'(y)=f'_-(1)\ (令\ f'_-(1)=a).$$

若 $y\neq 0$，则

$$f'_-(y)=\frac{a}{y},\quad f(y)=\int\frac{a}{y}dy+c=a\ln y+c.$$

若令 $y=1$，则 $f(1)=c=0$.

从而　$f(y)=a\ln y$,

即　$f(x)=a\ln x$.



第五章 三 角 学

§1. 概　　述

1·1 角的测定方法

【定义】1. 角度制 以度(°),分(′),秒(″)为单位来测量角度的方法,叫做角度制.

1个直角=90度(90°).

1度=60分(60′)

1分=60秒(60″)

【定义】2. 弧度·弧度制 我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角,叫做1弧度的角,如图5—1所示.以弧度作单位来度量角的方法叫做弧度制.

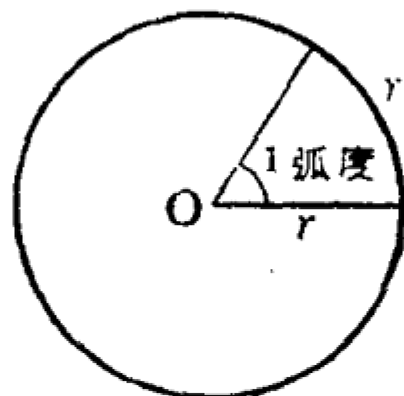


图 5-1

注意 角度制常出现于实际应用中,而弧度制多用于理论研究中.

【定理】1. 角的弧度数与圆的半径无关.

证明 假设所考察的圆的半径为 r, 1 弧度是角度制的 α 度,则这个角所对的圆弧长为 r, 而整个圆周所对的圆心角是360°,所以

$$\alpha:360=r:2\pi r,$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{180}{\pi}(=57.295779\cdots).$$

也就是说,角的弧度数是恒定的,与圆的半径无关.

注意 角度单位的数值换算

1弧度≈57.29578度≈3437.747分≈206265秒,

1度≈0.017453弧度

1分≈0.00029089弧度

1秒≈0.0000048481弧度.

【系】 假设在角度制中的 x^0 角，用弧度制表示时是 y 弧度，则下列等式成立.

$$x=\frac{180}{\pi}y, \qquad y=\frac{\pi}{180}x.$$

证明 正如在【定理】1 的证明中所见到的那样，1 弧度是$\frac{180}{\pi}$度，又 y 与 x 成比例，因此容易得证. □

注意 利用此关系式，当某角用弧度制(或角度制)给定时，可以把它换算成角度制(或弧度制)的角. 按照弧度制表示角时，通常将单位名称略去. 以下照此处理.

【定理】2. 在半径为 r 的圆中，长度为 l 的弧所对的圆心角是 l/r.

证明 设长度为 l 的弧所对的圆心角为 θ，则长度为 r 的弧所对应的圆心角是 1，因此

$$\theta:l=1:r, \qquad \therefore \quad \theta=l/r.$$ □

【定义】3. 始边. 终边. 角 α 的终边 如图 5—2 所示，一条有向半直线(射线) OX 绕O 点旋转后得到半直线 OP 时，OX 叫做始边，OP 叫做终边. 当 OP 只转过 α 角时，把它叫做角 α 的终边或动径.

【定义】4. 正角. 负角. 任意角 仍如图 5—2 所示. 动径反时针方向旋转(左旋转)所形成的角叫做正角，顺时针方向旋转(右旋转)所形成的角叫做负角. 不把角限于 0° 到 360° 之间，一般地，动径绕 O 点旋转而得的角称为任意角(见下述"注意")

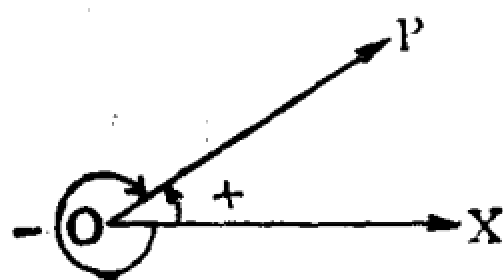


图 5-2

【定理】3. 设 OX 为角 α 的始边，OP 为角 α 的终边，这时以始边、终边作成的所有角，可用 $\alpha+2n\pi$ (n 是整数) 表示.

证明 由[定义] 3 和 4，很明显可证. □

注意 这些角 $\alpha+2n\pi$，叫做属于终边 OP 的角，或叫做终边 OP 的任意角

1·2 扇　　形

【定理】4. 如图 5—3 所示，设在半径为 r 的圆中有一扇形，其圆心角为θ，弧长为 l，面积为 s. 则下列等式成立.

$$l=r\theta,\qquad s=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr.$$

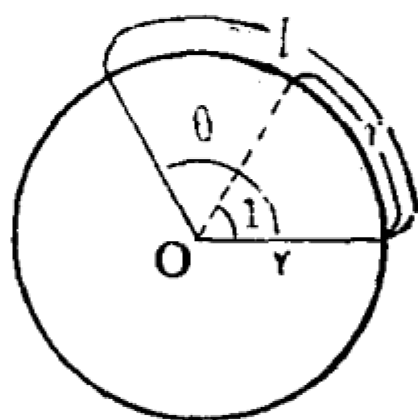


图 5-3

证明 从【定理】2立即得到 $l=r\theta$. 当半径一定时，扇形的面积与它的圆心角成正比，所以

$$s:\pi r^2=\theta:2\pi,$$

$$\therefore\quad s=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr.\qquad\square$$

§2. 任意角的三角函数

2·1 三角函数的定义

【定义】1. 三角函数 如图5—4所示，在平面上取直角坐标系，假设以角 θ 的顶点为坐标轴的原点 O，它的始边 OX 为 X 轴的正半轴，而终边的位置为 OP. 又设在直线 OP 上且到原点 O 的距离是 $r(>0)$ 的点为 P，其坐标为 (x,y)，则六个比值

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x},\ \frac{x}{y},\ \frac{r}{x},\ \frac{r}{y}$$

都与 r 的值无关，仅仅由 θ 值决定. 也就是说，都是 θ 的函数. 这些函数统称为三角函数. 各表示为：

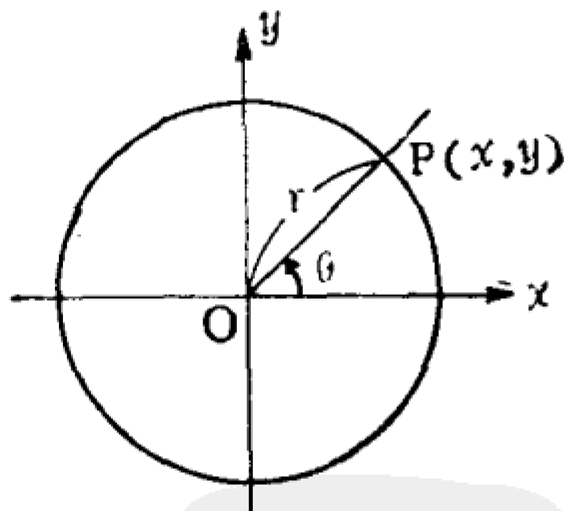


图 5-4

$$\sin\theta=\frac{y}{r};\qquad \cos\theta=\frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x};\qquad \operatorname{ctg}\theta=\frac{x}{y};$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x};\qquad \csc\theta=\frac{r}{y}.$$

它们分别叫做 θ 的正弦(sine)、余弦(cosine)、正切(tangent)、余切(cotangent)、正割(secant)、余割(cosecant). 其中，$\operatorname{tg}\theta$，$\sec\theta$ 在 $x\neq0$ 时，$\operatorname{ctg}\theta$，$\csc\theta$ 在 $y\neq0$ 时才有定义.

【定理】1. 三角函数值的符号，根据角 θ 的终边所在的象限确定如下：

三角函数 \ 象限	1	2	3	4
$\sin\theta$, $\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$, $\sec\theta$	+	−	−	+
$\mathrm{tg}\,\theta$, $\mathrm{ctg}\,\theta$	+	−	+	−

证明 由三角函数的定义显然可证. □

注意 当角 θ 的终边位于第四象限时. θ 叫做第四象限角. 对位于第一、二、三象限的角也类似称呼.

【定义】2. 周期函数. 周期. 基本周期 若函数 $f(x)$ 对其定义域内的全部 x 及常数 $a\neq0$ 都满足 $f(x+a)=f(x)$, 则 $f(x)$ 叫做周期函数. a 叫做它的周期. 而所有周期中最小的正周期叫做基本周期.

【定理】2. 三角函数都是周期函数.

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\csc\theta$ 的基本周期为 2π.

$\mathrm{tg}\,\theta$, $\mathrm{ctg}\,\theta$ 的基本周期为 π.

证明 由 2.3 的【定理】6 中的 (1), (5) 容易得证. □

系 设 $a(\neq0)$, b 为常数, 角 $a\theta+b$ 的三角函数

$\sin(a\theta+b)$, $\cos(a\theta+b)$, $\sec(a\theta+b)$, $\csc\theta(a\theta+b)$ 的基本周期为 $\dfrac{2\pi}{|a|}$

$\mathrm{tg}\,(a\theta+b)$, $\mathrm{ctg}(a\theta+b)$ 的基本周期为 $\dfrac{\pi}{|a|}$.

证明 $a\theta+b$ 的三角函数的基本周期, 与 $a\theta$ 的三角函数的基本周期一致. 由此及上述【定理】2 便容易证明.

【定理】3. 三角函数不是偶函数就是奇函数.

即 $\sin\theta$, $\mathrm{tg}\,\theta$, $\mathrm{ctg}\,\theta$, $\csc\theta$ 是奇函数.

$\cos\theta$, $\sec\theta$ 是偶函数.

证明 由 2.3 的【定理】6 中的 (2), 立即得证. □

2.2 特殊角的三角函数值

【定理】4. 角 0 及 $\frac{\pi}{n}$ $(n=6,4,3,2,1)$ 的三角函数值按下表给出:

角 三角函数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0
ctg	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	不存在

证明 等腰直角三角形的三边的长度比是$1:1:\sqrt{2}$；锐角为$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$的直角三角形的三边的长度比是$1:2:\sqrt{3}$；因此，$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{3}$的三角函数值如上表所示．至于0，$\frac{\pi}{2}$，π的三角函数值，容易由三角函数的定义直接得到．而$\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}$，ctg 0，ctg π 没有定义，这是不言而喻的． □

注意 为了避免繁琐以及由于实用上的原因，在上表中，sec，csc 略去未写．下面也采用这种方便的办法．

2·3 三角函数间的关系

【定理】5． 在同角的三角函数之间，下列关系成立．

(1) $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$，　$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$，　$\mathrm{ctg}\,\theta=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}$；

(2) $\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　$\mathrm{ctg}\,\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$；

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，　$1+\mathrm{tg}^2\theta=\sec^2\theta$，　$1+\mathrm{ctg}^2\theta=\csc^2\theta$．

证明 (1)，(2) 可由三角函数的定义立即得出．

(3) 设 θ 角的始边是 OX，终边是 OP，OP 上 P 点的坐标是 (x,y)，OP 的长度是 $r(>0)$．则有

$$x^2+y^2=r^2$$

上式两端各用 r^2, x^2, y^2 除，得

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,\quad 1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{r}{x}\right)^2,\quad \left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{r}{y}\right)^2.$$

由此得(3)中各式. □

注意 【定理】5 中的各公式，在求三角函数值或将三角函数式变形时，是经常用到的重要公式. 除了 $n=-1$ 的情形外，通常把 $(\sin\theta)^n$ 表示成 $\sin^n\theta$.

【定理】6. 在两个特殊角的三角函数之间，下列各等式成立.

(1) $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$,
$\operatorname{tg}(2n\pi+\theta)=\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}(2n\pi+\theta)=\operatorname{ctg}\theta$.
(n 为任意整数)；

(2) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$,
$\operatorname{tg}(-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}(-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta$;

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$,
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{ctg}\theta$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{tg}\theta$;

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$,
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{ctg}\theta$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{tg}\theta$;

(5) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$,
$\operatorname{tg}(\pi+\theta)=\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}(\pi+\theta)=\operatorname{ctg}\theta$;

(6) $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$,
$\operatorname{tg}(\pi-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}(\pi-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta$.

证明 (1) 由于 θ 和 $\theta+2n\pi$（n是整数）的终边是一致的，故立即得证.

(2) θ 及 $(-\theta)$ 的终边与单位圆（以原点为中心、半径为 1 的圆）的交点 P, P' 的坐标各是 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$, 而且 P, P' 相对于 x 轴是对称的，如图 5—5(A) 所示. 因此

$\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$,
$\operatorname{tg}(-\theta)=-\operatorname{tg}\theta$, $\operatorname{ctg}(-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta$.

(3) 设 θ 的终边与单位圆的交点为 P，OP 绕 O 点旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，P 的新位置为 P'，则 OP' 变成 $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ 的终边，而且 P，P' 的坐标各是 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$(-\sin\theta,\ \cos\theta)$，如图 5—5(B) 所示．因此

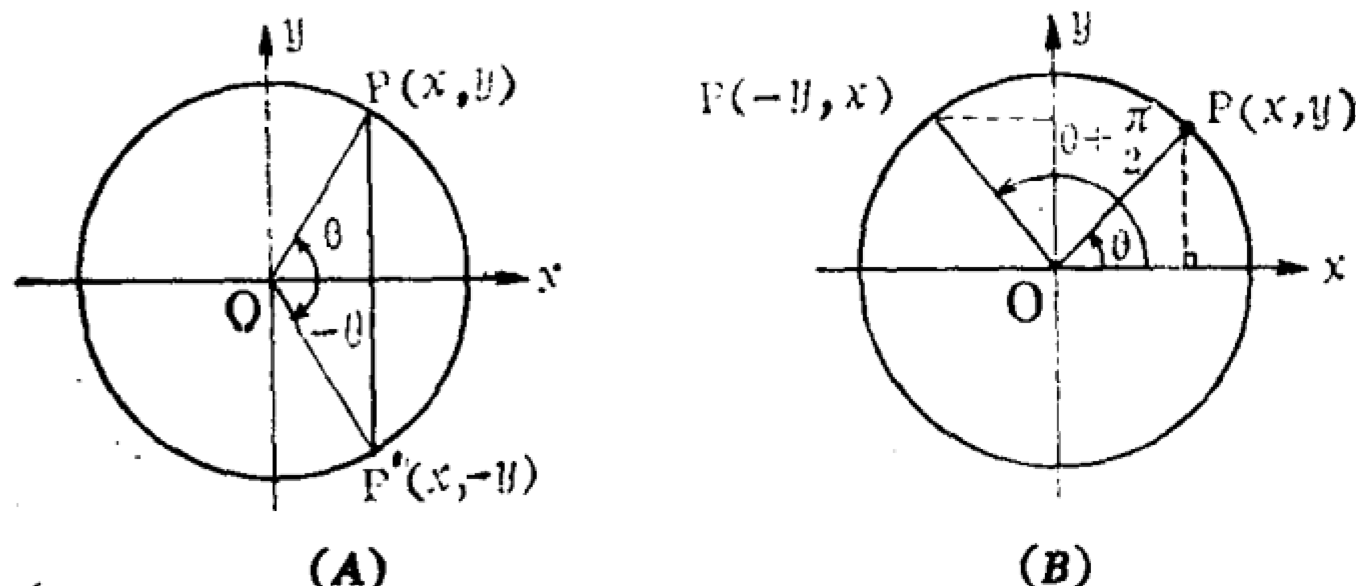


图 5-5

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta,$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{ctg}\theta,\qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{tg}\theta.$$

(4) 在 (3) 中，θ 用 $-\theta$ 代换，再应用 (2)，便容易得证．

(5) 两次应用 (3) 便得

$$\sin(\pi+\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta.$$

其余各式也同样可得．

(6) 应用(3)，(4)，得

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta.$$

其余各式也同样可得．　□

注意　若任意两角的和是 $\frac{\pi}{2}$ 或 π，则这两角分别叫做是互余或互补．(4) 是把某角的余角的三角函数用原角的三角函数来表示的公式．(6) 是把某角的补角的三角函数用原角的三角函数来表示的公式．

2·4　三角函数的图象

【定理】7. 假设单位圆与 x，y 轴正半轴的交点各为 A，B；角 θ 的顶点在原点 O，始边与 x 轴正半轴一致，终边与单位圆的交点为 P，由 P 向 x 轴所引垂线的垂足为 M；又，在 A，B 点作单位圆的切线，与 OP 的延长线的交点各是 S，T；在 P 点作单位圆的切线，与 x，y 轴的交点各是 Q，R，如图 5—6所示．则下列各式成立．

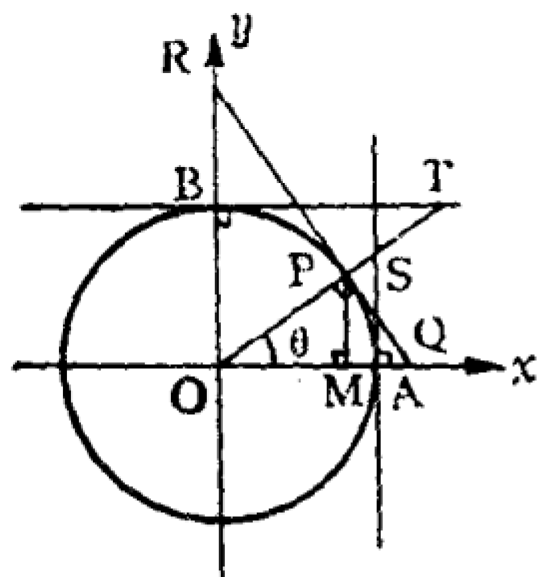


图 5-6

$$\sin\theta=MP,\qquad \cos\theta=OM,$$
$$\operatorname{tg}\theta=AS,\qquad \operatorname{ctg}\theta=BT,$$
$$\sec\theta=OQ,\qquad \csc\theta=OR.$$

其中，OM，BT，OQ（MP，AS，OR）的符号，当其指向与 x 轴（y轴）的正方向一致时认为是正的，相反时为负．

证明　从图 5—6 上看出：

$$OR\sin\theta=OQ\cos\theta=MP\csc\theta=OM\sec\theta=OP=1,$$
$$AS\operatorname{ctg}\theta=OA=1,\qquad BT\operatorname{tg}\theta=OB=1,$$
$$\therefore\ \sin\theta=MP,\qquad \cos\theta=OM,\qquad \operatorname{tg}\theta=AS,$$
$$\operatorname{ctg}\theta=BT,\qquad \sec\theta=OQ,\qquad \csc\theta=OR.$$
□

【定理】8. $y=\cos\theta$，$y=\sec\theta$ 的图象，分别是把 $y=\sin\theta$，$y=\csc\theta$ 的图象沿横轴的负方向平移$\frac{\pi}{2}$后所得的图象． 又 $y=\operatorname{ctg}\theta$ 的图象是把 $y=\operatorname{tg}\theta$ 的图象关于纵轴作对称，然后再沿横轴的正方向平移$\frac{\pi}{2}$后所得的图象．

证明　关于 $y=\cos\theta$，$y=\sec\theta$的图象，由 2.3 的【定理】6 的（3）款容易得到． 而对于 $y=\operatorname{ctg}\theta$ 的图象，由 $y=\operatorname{ctg}\theta=-\operatorname{tg}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$ 便容易得到． □

【定理】9. 各三角函数的图象按图 5—7 至图 5—9 中的各图给定．

（1）$y=\sin\theta$及$y=\cos\theta$ 的图形（图 5—7）；

（2）$y=\operatorname{tg}\theta$及$y=\operatorname{ctg}\theta$ 的图形(图 5—8)；

（3）$y=\sec\theta$及$y=\csc\theta$ 的图形(图 5—9)．

证明　由【定理】7 容易得到． □

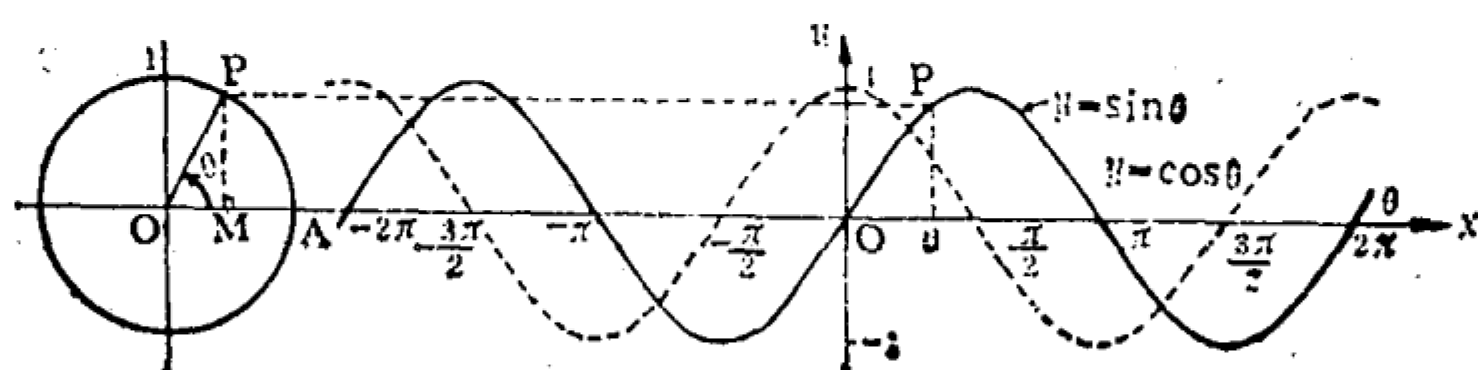


图 5-7

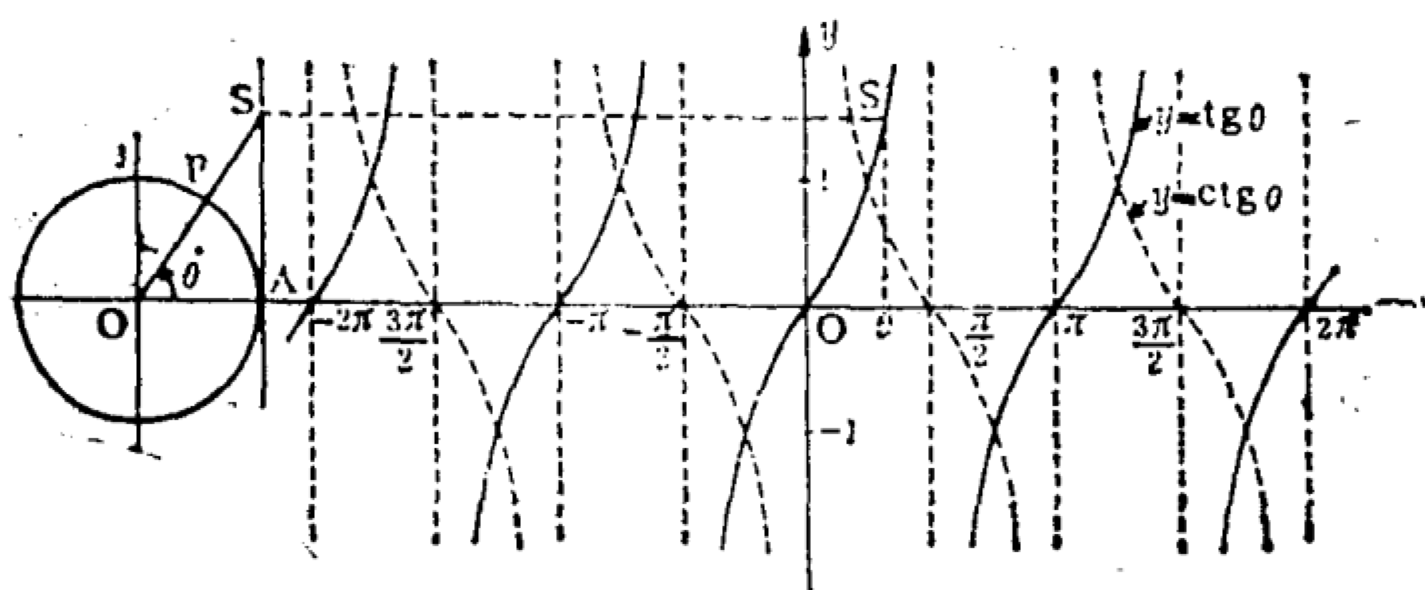


图 5-8

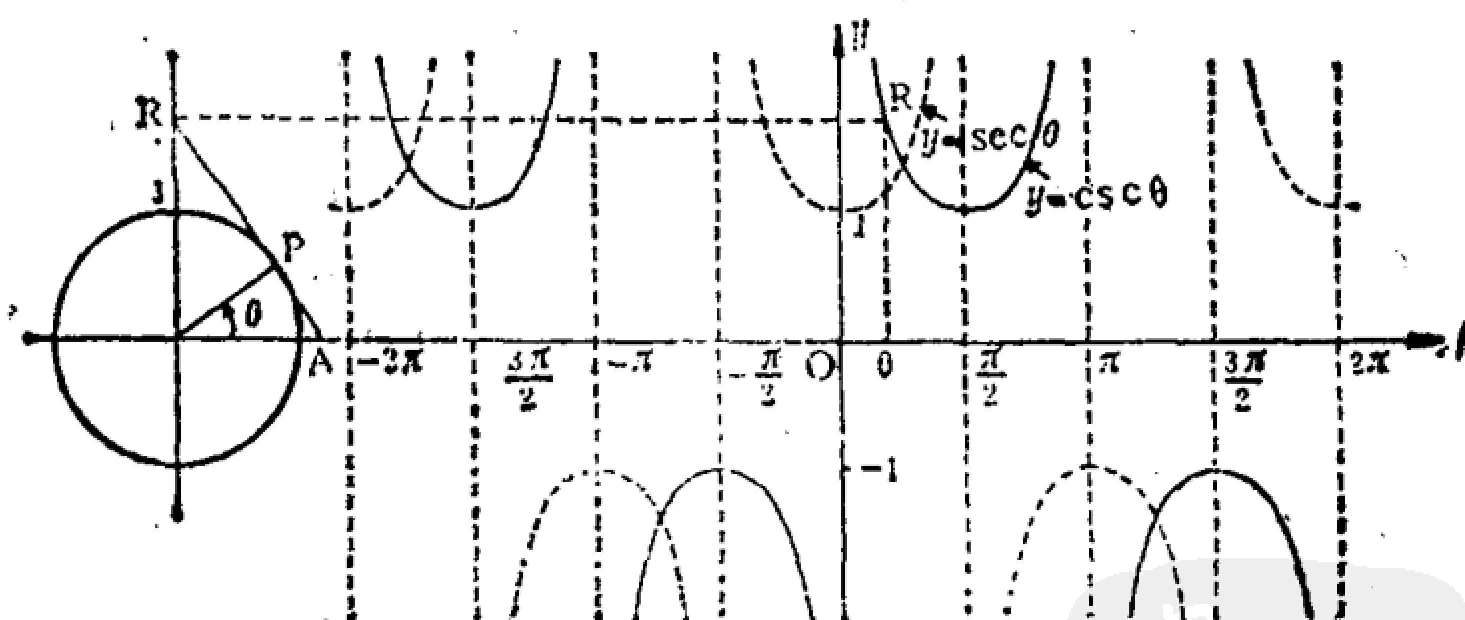


图 5-9

注意 上面的 $\sin\theta$, $\text{tg}\,\theta$, $\csc\theta$ 的图象(分别叫做正弦曲线，正切曲线，余割曲线)是应用【定理】7 画出的，而 $\cos\theta$, $\text{ctg}\,\theta$, $\sec\theta$ 的图象(分别叫做余弦曲线，余切曲线，正割曲线)则由 $\sin\theta$、$\text{tg}\,\theta$、$\csc\theta$ 的图象并应用【定理】8 得到.

【定理】10． 设 $y=f(\theta)$ 是 θ 的三角函数．这时，$y=f(\theta-a)+b$ 的图象，是把 $y=f(\theta)$ 的图象沿横轴的正方向平移 a，再沿纵轴的正方向平移 b 后所得的图象．又 $y=cf(d\theta)$ 的图象，是把 $y=f(\theta)$ 的图象在横轴方向压缩到 $\frac{1}{d}$，再在纵轴方向增加到 c 倍后所得的图象．反过来也对．其中，a,b,c,d 都是非零常数．

证明 从略．

例题 试应用 $y=\sin\theta$ 的图象，画出 $y=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象．

解 因为 $$y=2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\left(\theta-\frac{\pi}{8}\right)\right),$$

所以要求的图象③见图 5—10，是把 $y=\sin\theta$ 的图象①沿横轴的正方向平移 $\frac{\pi}{8}$ 后得到的曲线②，再在横轴方向压缩一半(而纵坐标不变)，然后在纵轴方向扩大到 2 倍（横坐标不变）而求得．如图5—10 所示．

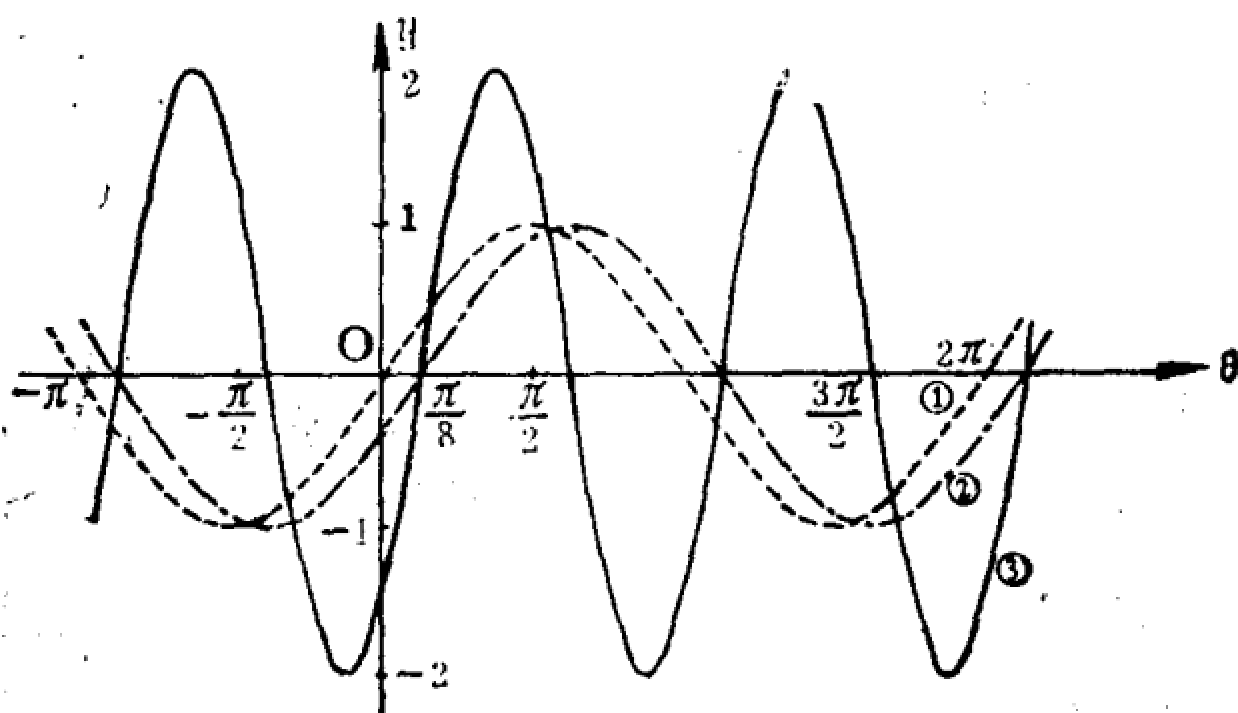


图 5-10

§3．加法定理

3·1 加法定理

【定理】1． 对于两个角 α,β 的和及差的正弦，余弦、正切、余切，有下列等式成立：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$,

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

(3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$,

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;

(4) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$,

$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}$.

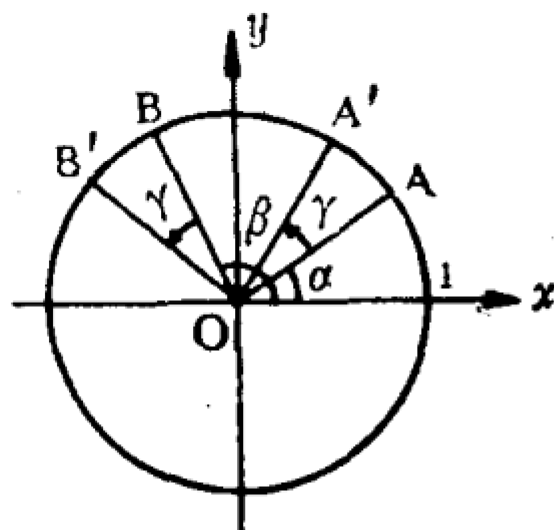


图 5-11

证明 (2) 设单位圆O与角α，β的终边的交点各为 A,B，如图 5-11 所示。因为A,B的坐标分别是$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$(\cos\beta,\ \sin\beta)$，所以有

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

现在把 A,B 绕O点旋转过r角，设旋转后得到的点为A',B'，同样地有

$$A'B'^2=2-2\ \{\cos(\alpha+r)\cos(\beta+r)+\sin(\alpha+r)\sin(\beta+r)\},$$

显然，$AB^2=A'B'^2$，因此

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+r)\cos(\beta+r)+\sin(\alpha+r)\sin(\beta+r)$$

式中，特别是令$r=-\beta$时，有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

再将β换成$-\beta$时，得

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

(1) 在(2)的公式中，将α换成$\alpha+\dfrac{\pi}{2}$时，便可得到(1)中各式。

(3),(4) 应用(1),(2)有

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}.$$

再分别用 $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ 除第一、第二式的分母、分子，立即可得(3)，(4)．其中，符号±取相同的顺序． □

注意 (1)，(2)，(3)，(4)分别叫做正弦、余弦、正切、余切的加法定理．这些定理在三角学中起着重要的作用．

3·2 同角正弦、余弦的合成公式

【定理】2． 设 a,b 是不同时为 0 的任意的实数，取点 $P(a,b)$，并设属于终边 OP（O是原点）的一个角为 α，则下列等式成立．

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

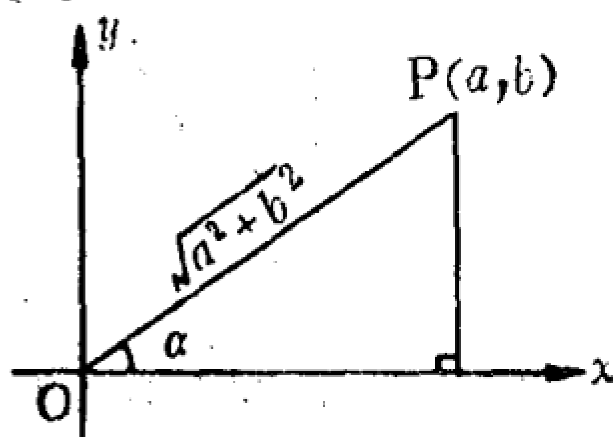


图 5-12

证明 如图 5-12 所示，显然有

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

所以

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\times\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$ □

3·3 三个角的和的三角函数

【定理】3． 关于三个角 α,β,ν的和的正弦、余弦、正切、余切，下列各等式成立．

(1) $\sin(\alpha+\beta+\nu)=\sin\alpha\cos\beta\cos\nu+\cos\alpha\sin\beta\cos\nu+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$；

(2) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$；

(3) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$；

(4) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\gamma-\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\gamma}{\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\gamma+\mathrm{ctg}\gamma\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta-1}$,

证明 (1) $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma$

$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

(2) 用与(1)同样的方法可得.

(3),(4) 先把(1),(2)分别改写成.

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma)$,

$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(1-\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma-\mathrm{tg}\gamma\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta)$,

由此便容易得证. □

3·4 倍角、半角的三角函数

【定理】4. 关于角 α 的二倍角的正弦、余弦、正切和余切，下列各等式成立.

(1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

(2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$;

(3) $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$;

(4) $\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$.

证明 在关于 $\alpha+\beta$ 的正弦、余弦、正切和余切的加法定理中，令 $\alpha=\beta$，便可立即得证. □

注意 (1)～(4)叫做二倍角公式．由(2)可得

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}.$$

这两个公式也是经常应用的重要公式.

【定理】5. 关于角 α 的三倍角的正弦、余弦、正切和余切，下列各等式成立.

(1) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

(2) $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;

(3) $\operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

(4) $\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

证明 (1) 如果在 3·3 的【定理】3中，令 $\alpha=\beta=\gamma$，则得

$$\begin{aligned}\sin3\alpha&=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha\\&=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\end{aligned}$$

(2) 与(1)同样地可得

$$\begin{aligned}\cos3\alpha&=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha\\&=\cos^3\alpha-3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\\&=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;\end{aligned}$$

(3),(4) 由(1),(2)容易得证. □

注意 (1)～(4)叫做三倍角公式.由(1),(2)可得

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4},\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos3\alpha}{4}.$$

这两公式也是重要的公式.

【定理】6. 关于角 α 的半角的正弦、余弦、正切和余切，下列各式成立.

(1) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$;

(2) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$;

(3) $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$;

(4) $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

证明 (1) 在3·4的【定义】4 第(2)款中，若将 α 换成 $\dfrac{\alpha}{2}$，则有

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

由比得

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

(2) 与(1)同样地可证.

(3),(4) 由(1),(2)立即可得. □

注意 (1)~(4)叫做半角公式.

【定理】7. 角 α 的正弦、余弦、正切，都可用 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的有理式表示. 也就是说，若令 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=t$，则

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\mathrm{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2}.$$

其中 $\alpha\neq(2n+1)\pi$(n 是整数).

证明 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

显然有

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{2t}{1-t^2}.$$ □

注意 由此定理可知，角 α 的三角函数的有理函数都是 $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=t$ 的有理函数. 这是一个极其重要的结果，应用很广，特别是可以有效地用于三角函数的有理函数的积分计算中（俗称万能代换）.

3·5 三角函数的和、差、积的变换公式

【定理】8. 两个角 α，β 的正弦、余弦的积，可按下列方式表示成 $\alpha+\beta$,

$\alpha-\beta$ 的正弦、余弦的和或差

(1) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$;

(2) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$;

(3) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$;

(4) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$.

证明 根据正弦、余弦的加法定理，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$ □

由此可立即得证.

【定理】9. 两个角 α,β 的正弦、余弦的和，可按下列方式表示成

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad \frac{\alpha-\beta}{2}$$

的正弦、余弦的积.

(1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

(4) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

证明 在前面【定理】8 的各式中，令 $\alpha+\beta=\theta$，$\alpha-\beta=\varphi$，且用 θ，φ 表示 α，β，即

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2}, \qquad \beta=\frac{\theta-\varphi}{2},$$

两端乘 2，再把 θ,φ 分别换成 α,β，便可得证. □

注意　前面【定理】8,9 的各公式是十分重要的公式，它们在三角函数式的变形中起着重要的作用.

3·6　三角恒等式

【定义】1. 三角恒等式、三角方程式、条件三角恒等式　若三角函数的等式对于包含在其中的角的一切值（有时，要除掉某些特殊值）都成立，则此等式叫做三角恒等式，否则叫做三角方程式.

有关三角函数的等式分成 $\begin{cases}\text{三角恒等式,}\\ \text{三角方程式,}\end{cases}$

例如

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1, \qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

是三角恒等式，前者对全部 θ 值都成立，后者除了 $\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$（$n$ 是任意整数）外，对一切 θ 值都成立. 再有，在下面【定理】10 中所见到的恒等式，对于满足 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 的一切 α,β,γ 都成立，这类恒等式叫做条件恒等式.

【定理】10. 对于满足 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 的一切 α,β,γ，下列等式成立.

(1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$;

(4) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

(5) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1$;

(6) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

(7) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

证明　(1)　$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

(2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}$

$$=1+2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2};$$

(3) 根据 3·3 的【定理】3 中第(3)款，立即可得证。

(4) $\text{sih}2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$

$$=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma$$

$$=2\sin\gamma(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma)$$

$$=4\sin\gamma\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

(5) $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma$

$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2\gamma-1$$

$$=-1+2\cos\gamma(\cos\gamma-\cos(\alpha-\beta))$$

$$=-1-4\cos\gamma\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

$$=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma;$$

(6) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$

$$=\frac{1}{2}\left\{3-(\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma)\right\}$$

$$=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma; \qquad \text{(根据(5))}$$

(7) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$

$$=\frac{1}{2}\left\{3+(\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma)\right\}$$

$$=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \qquad \text{(根据(5))}$$ □

注意 为了证明三角恒等式，可以象在上述【定理】10 的证明中见到的那样，由三角函数的基本公式，加法定理，以及和、差与积的变换公式等等直接导出；或者利用这些公式，从待证明的恒等式的一端出发导出另一端；或者将左右两端各自变形，导出相同的表达式.

【定理】2. 简谐振动，振幅、初相、周期、频率 质点在一条曲线上作往复的周期运动(每经过一定时间重复同一的运动)，叫做振动.特别是，如质点 P 在一条直线(令为 y 轴)上，在定点 O(设为原点)的上下作振动，且在任意时刻 t，P 点的坐标用下式给定

$$y=\bar{r}\sin(\omega t+\alpha) \quad (\bar{r}>0),$$

则此振动叫做简谐振动，式中，r,ω,α 都是常数，$\bar{r},\alpha,\tau=\frac{2\pi}{|\omega|}$ 和 $\gamma=\frac{|\omega|}{2\pi}$ 分别叫做此简谐振动的振幅，初相，周期和频率.

【定理】11. 以原点 O 为中心，$\bar{r}$ 为半径作一圆，由此圆周上的一点 $A(\bar{r}\cos\alpha,\bar{r}\sin\alpha)$ 出发，以恒定的角速度 ω 转动，则动点 Q 在 y 轴上的投影 P 的运动是简谐运动，且

$$y=\bar{r}\sin(\omega t+\alpha) \quad (\bar{r}>0).$$

反过来说也对.

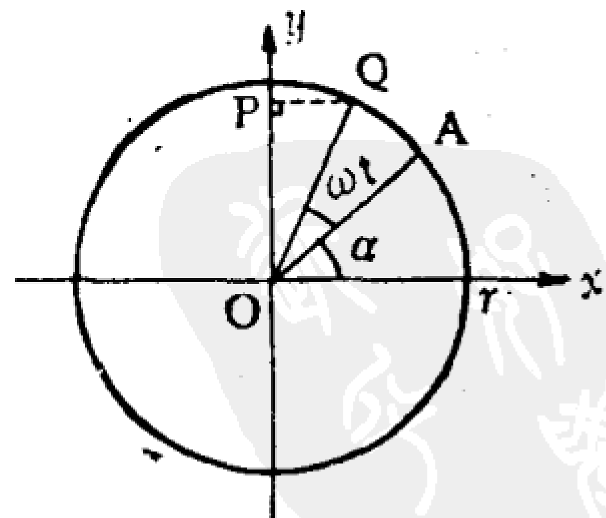


图 5-13

证明 如图 5-13所示.设在运动 t 秒钟后，动点 Q 的坐标为 (x,y)，则此时 P 点的坐标变为 $(0,y)$. 另一方面，终边 OQ 的角是 $\omega t+\alpha$，因此有

$$y=\bar{r}\sin(\omega t+\alpha).$$

从而 P 点作简谐振动

$$y=\bar{r}\sin(\omega t+\alpha).$$

反之，若P点作简谐振动，

$$y=r\sin(\omega t+\alpha) \quad (r>0).$$

那末，当考察以原点为中心、$\bar{r}$为半径的圆周时，$t=0$所对应的P点的位置P_0变为此圆周上的点$A(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$在$y$轴上的投影.同样，$t=t$时P点的位置P变为此圆周上的点$Q(r\cos(\omega t+\alpha), r\sin(\omega t+\alpha))$在$y$轴上的投影.此时，动径$OQ$的角速度是

$$\frac{d(\omega t+\alpha)}{dt}=\omega(\text{常数}).$$

从而，P点的运动与圆周上从A点出发以匀角速度ω运动的Q点在y轴上的投影P的运动是一致的. □

注意 (1) 点Q在x轴上的投影P'的运动也是简谐运动，

$$x=r\sin\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \quad (\bar{r}>0).$$

(2) 动径OQ绕原点回转一周所需要的时间是$\frac{2\pi}{|\omega|}$，这与作简谐振动的点P，P'，的周期一致.

(3) 简谐振动的周期与其振幅无关．这个性质叫做简谐振动的等时性.

【定理】3．同一直线上的简谐振动的合成 假设在一条直线y轴上有两个质点，都以原点为中心作简谐振动，它们在任意时刻t的y坐标各是y_1，y_2，那么在y轴上，y坐标为y_1+y_2的点的运动，叫做（此直线上的）这两个简谐运动的合成.

【定理】12. 同周期、同直线上的简谐振动的合成运动，也是简谐运动，其振动周期与原来的周期相等.

证明 在y轴上取两个质点P_1，P_2，它们都以原点为中心作同周期的简谐振动，在任意时刻t的y坐标各为y_1，y_2，令

$$y_1=r_1\sin(\omega t+\alpha_1) \quad (r_1>0),$$
$$y_2=r_2\sin(\omega t+\alpha_2) \quad (r_2>0),$$

这时，$y=y_1+y_2=r_1\sin(\omega t+\alpha_1)+r_2\sin(\omega t+\alpha_2)$

$=\sin\omega t(\bar{r}_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2)+\cos\omega t(\bar{r}_1\sin\alpha_1+r_2\sin\alpha_2)$.

由于$\bar{r}_1$，$\bar{r}_2$，α_1，α_2都是已知常数，所以上式两个括号内的量也是常数，它们可以用两个另外的常数r，α来表示，其间满足如下的关系：

$$r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2=r\cos\alpha,$$

$$r_1\sin\alpha_1+r_2\sin\alpha_2=r\sin\alpha.$$

这样表示之所以可能，是因为我们可以从上两式把 r,α 确定出来．由上两式平方相加，及求二式之比，可得

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\alpha_1-\alpha_2)},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{r_1\sin\alpha_1+r_2\sin\alpha_2}{r_1\cos\alpha_1+r_2\cos\alpha_2}.$$

从而，$y=y_1+y_2=r\sin\omega t\cos\alpha+r\cos\omega t\sin\alpha$

$\quad=r\sin(\omega t+\alpha)$.

也就是说，P_1,P_2的合成运动仍然是相同周期的简谐振动．□

注意　合成运动的振幅 r 和初相 α，可以由最初的两个分运动的振幅r_1，r_2 和初相 α_1,α_2，按下列几何方法求得，如图 5-14 所示．此法在处理三个以上的(同直线上的)简谐振动的合成时也适用．

在图5-14中，令

$\angle SOP=\alpha_1$，$OP=r_1$，

$\angle RPQ=\alpha_2$，$PQ=r_2$，

则　$\angle SOQ=\alpha$，$OQ=r$.

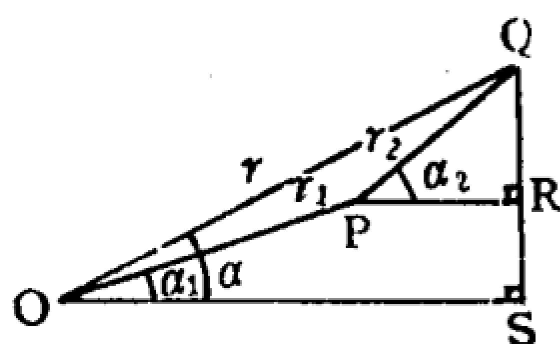


图 5-14

3·7　三角级数的和

【定理】13． 对于正整数 n，下列等式成立：

(1) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+(n-1)\beta)$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}} & (\beta\neq 2m\pi,m\text{是整数时}),\\ n\sin\alpha & (\beta=2m\pi,m\text{是整数时}).\end{cases}$$

(2) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+(n-1)\beta)$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}} & (\beta\neq 2m\pi,m\text{是整数时}),\\ n\cos\alpha & (\beta=2m\pi,m\text{是整数时})\end{cases}$$

证明 (1)(i) $\beta\neq 2m\pi$ 的情形 令左端的和为S_n.假设k是任意的正整数，则

$$2\sin(\alpha+k\beta)\sin\frac{\beta}{2}=\cos\left\{\alpha+\left(k-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}-\cos\left\{\alpha+\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta\right\}.$$

令$k=0,1,\cdots,n-1$,再把两端分别相加得

$$2\sin\frac{\beta}{2}\cdot S_n=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left\{\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right\}$$

$$=2\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}.$$

因为 $\beta\neq 2m\pi$,所以$\sin\frac{\beta}{2}\neq 0$,从而有

$$S_n=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

(ii) $\beta=2m\pi$ 的情形 设 k 是任意的整数，这时只要注意到

$$\sin(\alpha+k\beta)=\sin\alpha,$$

便可立即得证.

(2) 在(1)的公式中,若将 α 换成 $\alpha+\frac{\pi}{2}$,便可立即得证. □

【系】 对于正整数n,下列等式成立:

(1) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} & (\alpha\neq 2m\pi,m\text{是整数时}),\\ 0 & (\alpha=2m\pi,m\text{是整数时}).\end{cases}$$

(2) $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha$

$$=\begin{cases}\dfrac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} & (\alpha\neq 2m\pi,\ m\text{是整数时}),\\ n & (\alpha=2m\pi,\ m\text{是整数时}),\end{cases}$$

证明 在前面的【定理】13中，若令 $\beta=\alpha$ 便可立即得证. □

例题1. 连接正 n 边形的外接圆周上的任意一点，与各顶点的弦的长度的平方和是 $2nR^2$，其中 R 是外接圆的半径.

解 如图 5—15 所示，设正 n 边形的顶点为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，其外接圆的中心为O，在弧 P_1P_n 上，任意选取 P 点，设与弧 PP_1 对应的圆心角为 2α，令 $\frac{\pi}{n}=\beta$，则与弧 $\widehat{PP_1}$，$\widehat{PP_1P_2}$，$\widehat{PP_1P_3}$，…，$\widehat{PP_1P_n}$ 对应的圆心角分别为

2α，$2(\alpha+\beta)$，$2(\alpha+2\beta)$，…，$2(\alpha+(n-1)\beta$. 因此，弦 PP_1，PP_2，PP_3，…，PP_n 的长度的平方和是

$$S=(2R)^2\,[\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin^2(\alpha+(n-1)\beta)].$$

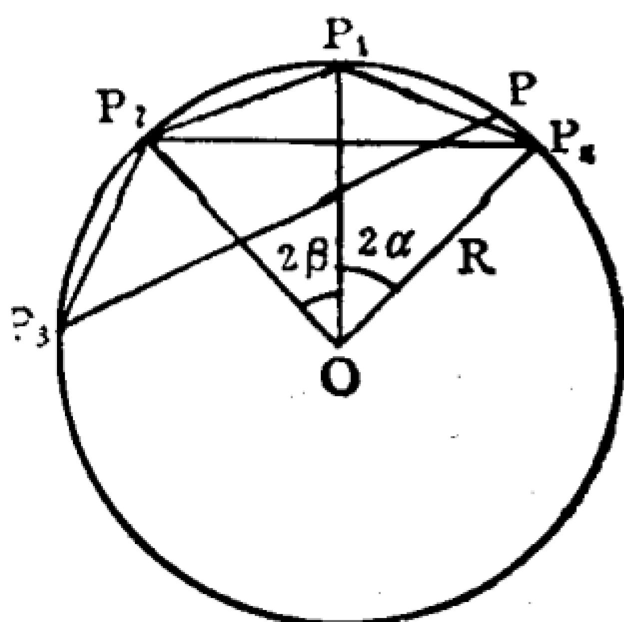


图 5-15

可是，因为

$$2\sin^2\theta=1-\cos2\theta,\quad 所以$$

$$S=2nR^2-2R^2[\cos2\alpha+\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha+4\beta)+\cdots+\cos(2\alpha+2(n-1)\beta)].$$

应用【定理】13中的第 (2) 款，并注意到

$$\sin n\beta=\sin\pi=0,$$

则得 $\quad S=2nR^2.$

例题2 设以点 O 为中心画一个半径为 $\frac{1}{2}\csc\frac{\beta}{2}$ 的圆. 由此圆周上的一点 P_0 依次作长度为 1 的弦 P_0P_1，P_1P_2，P_2P_3，…，$P_{n-1}P_n$. 过 P_0 引一直线 l，它与弦 P_0P_1 构成 α 角，再过P_0引一垂直于 l 的直线 l'. 试求折线$P_0P_1P_2\cdots P_n$ 在直线 l，l' 上的投影的长度.

解 如图 5—16 所示. 因为与弧 P_0P_1，P_1P_2，P_2P_3，…，$P_{n-1}P_n$ 对应的圆心角都是 β，直线 l 与弦 P_0P_1，P_1P_2，P_2P_3，…，$P_{n-1}P_n$ 的夹角分别是 α，$\alpha+\beta$，$\alpha+2\beta$，…，$\alpha+(n-1)\beta$，因此，若令折线 $P_0P_1P_2\cdots P_n$ 在直线 l，l' 上的投影的长度各为 L，L'，则有

$$L=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$L^{\prime} = \sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$= \frac{\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

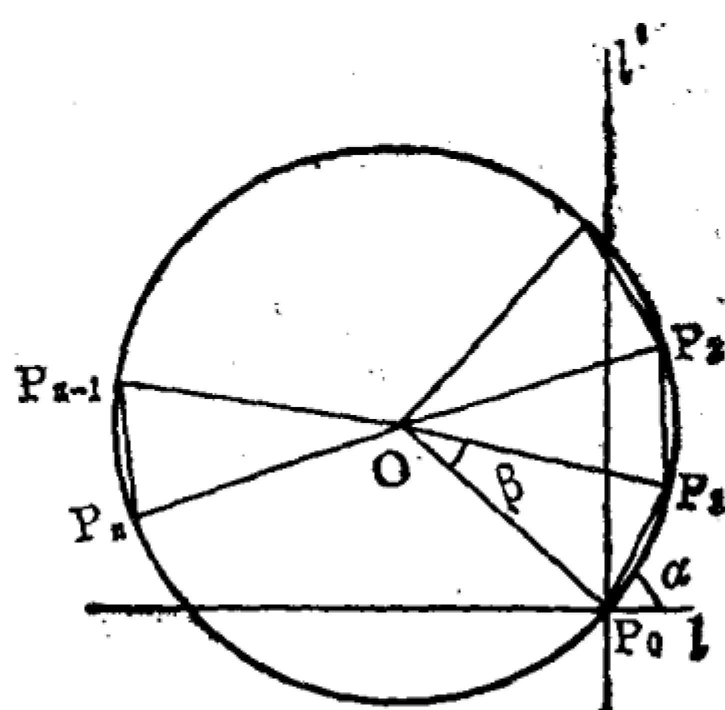


图 5-16

§4. 三角方程·三角不等式

4·1 三角方程

【定义】1. 三角方程的解、特解、通解 满足三角方程的未知角的值，叫做这个方程的根或解．求根的过程叫做解方程．如果知道三角方程一个特殊的解，则常常就能求得满足此方程的其他一切解．这个特殊的解叫做特解．包含全部特解的解，叫做通解(或一般解)。

【定理】1. 设下列三角方程的一个特解为 α，则其通解 x 可按下列方式给定：

(1) $\sin x=a$ $(|a|\leqslant 1)$，　$x=n\pi+(-1)^n\alpha$；

(2) $\cos x=a$ $(|a|\leqslant 1)$，　$x=2n\pi\pm\alpha$；

(3) $\operatorname{tg} x=a$，　$x=n\pi+\alpha$.

其中，n 是任意整数．

证明 (1) 如图5—17(A)所示．设直线 $y=a$ 与单位圆的交点为 P, P'，这时若设终边为 OP 的一个角为 α，则终边为 OP' 的一个角就是 $\pi-\alpha$，因此终边为 OP，OP' 的一般角分别是

$$2m\pi+\alpha,\quad 2m\pi+\pi-\alpha \qquad (m \text{ 是任意整数}).$$

显然，这些角的正弦值都等于 a，因而将上面两式归结在一起，所求的一般解就是

$$n\pi+(-1)^n\alpha \qquad (n \text{ 是任意整数}).$$

(2) 如图 5—17(B)所示，设直线 $x=a$ 与单位圆的交点各为 P, P' 这时若设终边为 OP 的一个角为α，则终边为 OP'的一个角便是 $-\alpha$．因此，终边为 OP，OP'的一般角分别是

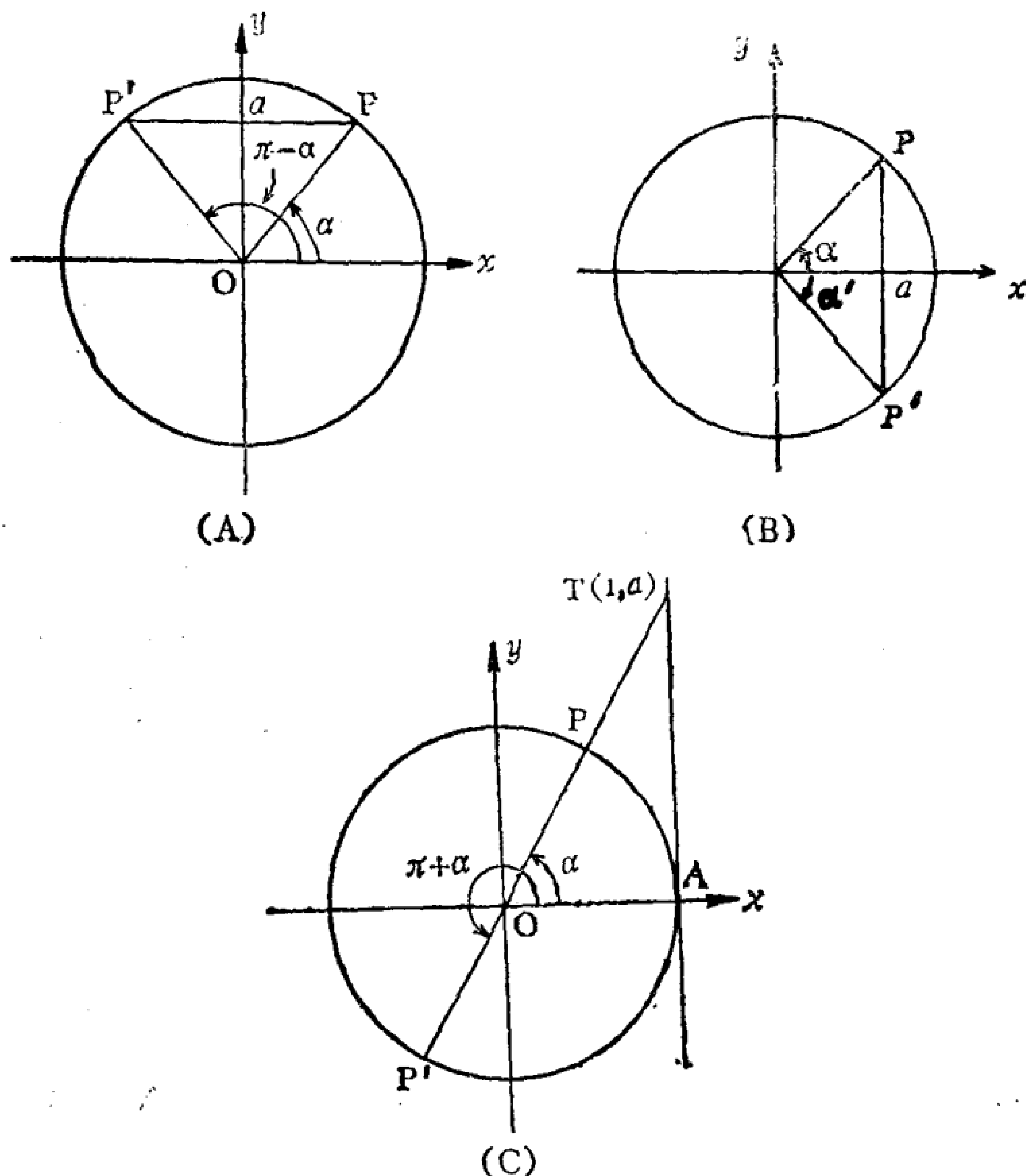


图 5-17

$$2n\pi+\alpha,\quad 2n\pi-\alpha\qquad(n\text{ 是任意整数}).$$

很明显,这些角的余弦值都等于 a,因而所求的一般解是

$$2n\pi\pm\alpha\quad(n\text{是任意整数}).$$

(3) 如图 5—17(c) 所示,假设连接点 $T(1,a)$ 与原点 O 的直线 OT 与单位圆的交点为 P,P',这时若令终边为 OP 的一个角为 α,则终边为 OP' 的一个角便为 $\pi+\alpha$.因此,终边为 OP,OP' 的一般角分别是

$$m\pi+\alpha,\qquad m\pi+\pi+\alpha\quad(m\text{是任意整数}).$$

很明显，这些角的正切值都等于a，因而所求的一般解是

$n\pi+a$　(n是任意整数)．　□

注意　(1)，(2)，(3)这三类方程，叫做基本三角方程．

【系】　两个角α,β的正弦、余弦和正切值分别相等的充分必要条件如下：

(1) $\sin\alpha=\sin\beta$，　$\alpha=2n\pi+\beta$ 或 $\alpha=(2n+1)\pi-\beta$；

(2) $\cos\alpha=\cos\beta$，　$\alpha=2n\pi+\beta$ 或 $\alpha=2n\pi-\beta$；

(3) $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\beta$，　$\alpha=2n\pi+\beta$ 或 $\alpha=(2n+1)\pi+\beta$．

证明　根据前面的【定理】1，是很明显的．

□

例题1. 解下列三角方程

(1) $\cos 2x=\cos x$；

(2) $\sin 3x=\cos 2x$；

(3) $a\sin x+b\cos x=c$．

解　(1) 由前面的【系】可知，$2x=2n\pi\pm x$，从而 $x=2n\pi,\dfrac{2n\pi}{3}$(n是任意整数)；

(2) $\sin 3x=\cos 2x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$，从而由前面的【系】可知，

$$3x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-2x\right).$$

由此，当$n=2m$时，$3x=2m\pi+\dfrac{\pi}{2}-2x$，

$$\therefore\quad x=\frac{2m\pi}{5}+\frac{\pi}{10}.\qquad ①$$

当$n=2m+1$时，$3x=(2m+1)\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$，

$$\therefore\quad x=2m\pi+\frac{\pi}{2}.\qquad ②$$

因为②包含在①中，所以，所求的解是

$$\frac{2m\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\quad(m\text{是任意整数})$$

(3)(i) $a\neq0$的情形 用$\sqrt{a^2+b^2}$除原式两端，

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

其中，若令

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha_0,\quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha_0,$$

则前式变为

$$\sin x\cos\alpha_0+\cos x\sin\alpha_0=\sin(x+\alpha_0)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

从而得到

① 当$a^2+b^2<c^2$时，无解.

② 当$a^2+b^2\geqslant c^2$时，$x=n\pi+(-1)^n\alpha-\alpha_0$

(其中，n是任意整数，α是$\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$的一个特解).

(ii) $a=0$的情形

① $b\neq0$时，若$c^2>b^2$，无解；

若$c^2\leqslant b^2$，$x=2n\pi\pm\alpha$

(其中，n是任意整数，α是$\cos x=\frac{c}{b}$的一个特解).

② $b=0$时，若$c\neq0$，无解；

若$c=0$，则解的值为任意实数.

注意 如上例所示，为了解给定的三角方程，只要把它归结为解基本三角方程就行了.为此，对于给定的方程，可以

(甲) 变形为仅含某一个三角函数的表达式；

(乙) 应用加法定理；

(丙) 应用同角的正弦、余弦的合成公式(3·2【定理】2)；

(丁) 应用正弦、余弦的和、差与积的变换公式；

(戊) 用$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$的有理式表示等等，导致(数个因式之积)=0的形式.

例题2 求解$\begin{cases}\sin x+\sin y=1,\\ \cos x+\cos y=1.\end{cases}$

解 由第一、第二式，分别有

$$\sin x=1-\sin y, \qquad ①$$

$$\cos x=1-\cos y, \qquad ②$$

将①、②两端平方，再各端分别相加，得

$$\sin y+\cos y=1,$$

$$\therefore\ \cos\left(y-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由此得 $y-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$,

即 $y=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 或 $y=2n\pi$.

(i) 若$y=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，则由②得 $\cos x=1$,

$$\therefore\ x=2m\pi.$$

(ii) 若 $y=2n\pi$，则由②得 $\cos x=0$,

$$\therefore\ x=2m\pi\pm\frac{\pi}{2}.$$

可是，$y=2n\pi$，$x=2m\pi-\frac{\pi}{2}$不满足所给定的方程式，因此，所求的解是

$$\begin{cases}x=2m\pi,\\ y=2n\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}x=2m\pi+\frac{\pi}{2},\\ y=2n\pi\end{cases}\quad (m,n\text{是任意整数}).$$

注意 为了求解联立三角方程，象在上例中看到的那样，可根据下列方法使之归结成一个未知角的三角方程的解法.

（甲） 代入；

（乙） 两端平方再相加；

（丙） 应用正弦、余弦的和、差与积的变换公式等等.

4·2 三角不等式

【定义】2. 绝对三角不等式，三角不等式及其解、条件三角不等式 在关

于三角函数的不等式中，若其中的未知角取任何值时（个别特殊的角除外），不等式都成立．则此不等式叫做绝对三角不等式；不是这样的情况，亦即不等式只对未知角的某个范围的值成立时，叫做三角不等式，此未知角的值的范围叫做该三角不等式的解．求解三角不等式的过程，叫做解三角不等式．

关于三角函数的不等式分成

$$\begin{cases}\text{绝对三角不等式,}\\ \text{三角不等式.}\end{cases}$$

例如 $|\sin\theta|\leqslant 1$，$|\sec\theta|\geqslant 1$ 是绝对三角不等式．前者对一切的 θ 值都成立，后者除去 $\theta=\dfrac{2n+1}{2}\pi$（$n$ 是任意整数）的一切 θ 值都成立．又，$\sin\theta<\operatorname{tg}\theta$ 对于满足 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 的一切 θ 值都成立，但这类绝对三角不等式往往叫做条件三角不等式．

【定理】2.　当 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，下列不等式成立：

(1) $\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha$；

(2) $\cos\alpha<\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}<1$.

证明(1)　如图5—18所示，设单位圆与角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的终边 OP 的交点为 P，由 P 点向 x 轴作垂线，垂足为 Q；单位圆与 x 轴的正半轴的交点为 A，由 A 点作单位圆的切线，与终边 OP 的延长线的交点为 T，则由图显然有

（$\triangle POA$ 的面积）<（扇形 POA 的面积）<（$\triangle TOA$ 的面积）．

因此

$$\frac{1}{2}\sin\alpha<\frac{1}{2}\alpha<\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\therefore\quad \sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha.$$

(2) 若将(1)中最后一个不等式各端用 $\sin\alpha\,(>0)$ 来除，则得

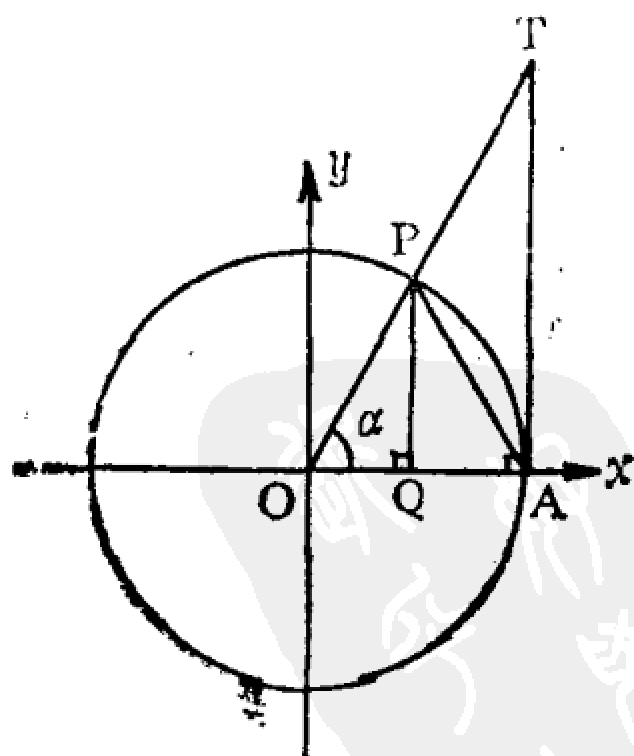


图 5-18

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}.$$

从而

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1.$$ □

注意 对于满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$的α，(2)也成立.由(2)可导出三角函数极限值计算中的基本公式.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

由此可知，当$|\alpha|$充分小时，有$\sin\alpha\approx\alpha$.

例题1 当$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha$成立.

解 对于$\frac{\alpha}{2}$，前面【定理】2的第(1)款成立，因此

$$\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}<\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

而 $$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

于是，应用不等式$\frac{\alpha}{2}<\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}<\frac{\alpha}{2}$，便得

$$\sin\alpha>2\cdot\frac{\alpha}{2}\left(1-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)=\alpha-\frac{\alpha^3}{4}.$$

注意 由前面【定理】2的第(1)款及例1的不等式，得

$$\alpha-\frac{\alpha^3}{4}<\sin\alpha<\alpha$$

$$\therefore\quad 0<\alpha-\sin\alpha<\frac{\alpha^3}{4}.$$

因此，当$\alpha(>0)$充分小时，令$\sin\alpha=\alpha$所引起的误差比$\frac{\alpha^3}{4}$小.

例题2. 当 $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$ 时

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}<\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

解　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

又因　$0\leqslant\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$,　$0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$,

故　$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}>0$,　$0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$,

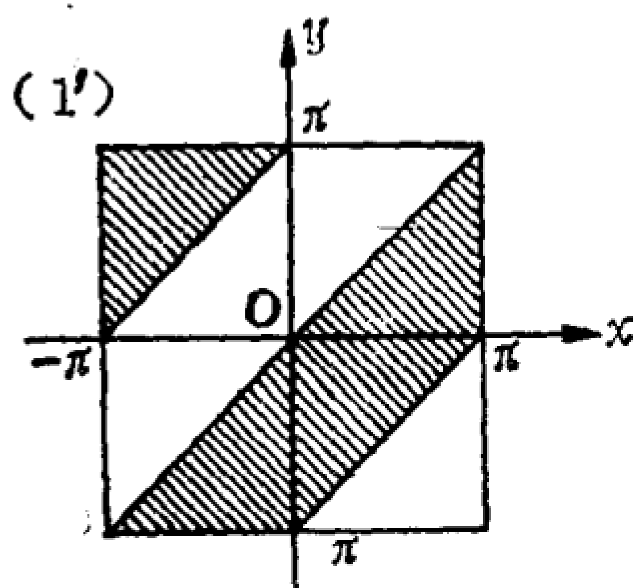
∴　$\sin\alpha+\sin\beta\leqslant 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

【定理】3. 满足三角不等式

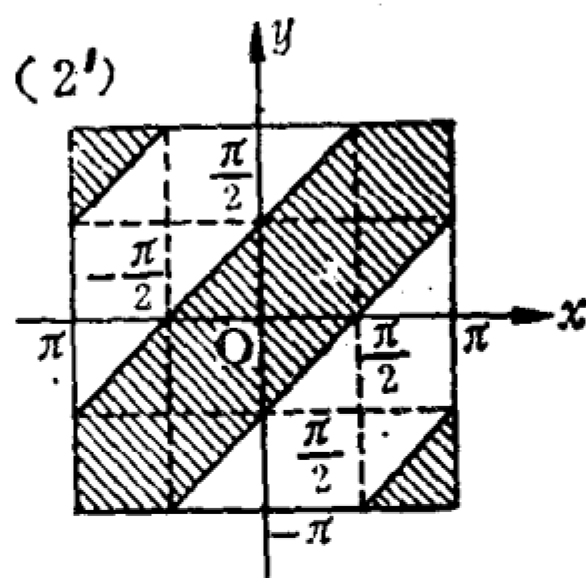
(1) $\sin(x-y)>0$,　$|x|<\pi$,　$|y|<\pi$;

(2) $\cos(x-y)>0$,　$|x|<\pi$,　$|y|<\pi$.

的 (x,y) 点的集合，在坐标平面上可分别用图 5—19 中带阴影的区域 (1′) 与 (2′) 表示.



（不包括边界）



（不包括边界）

图 5-19

证明　(1) 由于 $|x|<\pi$, $|y|<\pi$, 故 $|x-y|<2\pi$, 又因为 $\sin(x-y)>0$, 所以

$$-2\pi<x-y<-\pi, 0<x-y<\pi.$$

若用图形表示合于这些条件的 x、y, 就得到图 5-19(1′)中阴影部分.

(2) 考虑到 $|x-y|<2\pi$, 及 $\cos(x-y)>0$, 便得

$$-2\pi<x-y<-\frac{3}{2}\pi,\ -\frac{\pi}{2}<x-y<\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi<x-y<2\pi.$$

若用图形表示它们，就是图 5-19(2)中阴影部分. □

注意　对于含有两个变数 x, y 的三角不等式，我们常把满足此不等式的 x, y 与坐标平面上以这些 x、y 为坐标的点 (x, y) 的集合（亦即解的区域）对应起来.

例题　试用图形表示下列不等式所确定的解的范围.

(1) $\sin x+\sin y<\sin\frac{x+y}{2}$, $0<x<\pi$, $0<y<\pi$;

(2) $\sin2(x+y)>\sin2x+\sin2y$, $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$;

(3) $\sin^2(x+y)\geqslant\sin^2(x-y)$, $|x|\leqslant\pi$, $|y|\leqslant\pi$.

解　(1) 应用 $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$，将所给的不等式改写，整理后得

$$\left(1-2\cos\frac{x-y}{2}\right)\sin\frac{x+y}{2}>0. \quad ①$$

但　$0<x<\pi$, $0<y<\pi$, ②

所以　$\sin\frac{x+y}{2}>0$.

从而，由①又得

$$\cos\frac{x-y}{2}<\frac{1}{2}. \quad ③$$

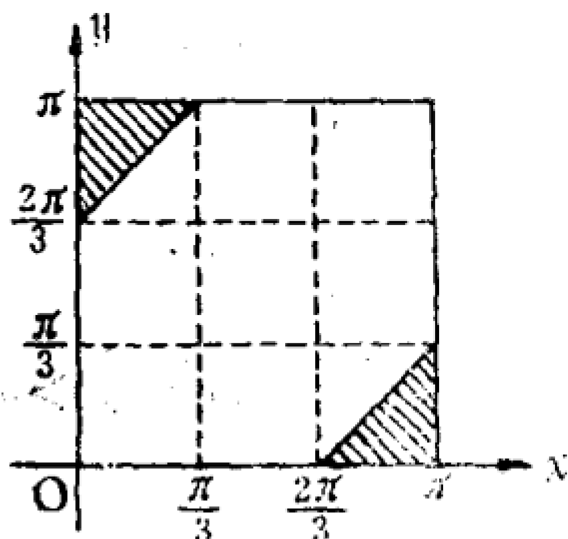


图 5-20

再由②得 $\left|\frac{x-y}{2}\right|<\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ \cos\frac{x-y}{2}>0. \quad ④$$

由③，④得

$$\frac{\pi}{3}<\frac{|x-y|}{2}<\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\ \frac{2\pi}{3}<|x-y|<\pi, \quad ⑤$$

②与⑤的共同部分是所求的范围，如图5-20中带阴影部分(不包括边界).

(2) 由所给的不等式，有

$2\sin(x+y)\cos(x+y)>2\sin(x+y)\cos(x-y)$,

∴ $2\sin(x+y)\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}>0$,

∴ $\sin(x+y)\sin x\ \sin y<0$.　①

但是，由 $0<x<2\pi$, $0<y<2\pi$ 可得

$0<x+y<4\pi$，因此

(i) 当 $\sin(x+y)>0$ 时，有

$0<x+y<\pi$, $2\pi<x+y<3\pi$.　②

这时，如要①成立，只有下列两种情形：

$\sin x>0$ 且 $\sin y<0$，即 $0<x<\pi$ 且 $\pi<y<2\pi$,　③

$\sin x<0$ 且 $\sin y>0$，即 $\pi<x<2\pi$ 且 $0<y<\pi$.　④

(ii) 当 $\sin(x+y)<0$ 时，有

$\pi<x+y<2\pi$, $3\pi<x+y<4\pi$.　⑤

这时，如要①成立，只有下列两种情形：

$\sin x>0$ 且 $\sin y>0$，即 $0<x<\pi$ 且 $0<y<\pi$,　⑥

$\sin x<0$ 且 $\sin y<0$，即 $\pi<x<2\pi$ 且 $\pi<y<2\pi$.　⑦

从而，所求的范围是②与③，②与④，⑤与⑥，⑤与⑦各自的共同部分的并集合，如图5-21中带阴影部分(不包括边界).

(3) $\sin^2(x+y)-\sin^2(x-y)$

$=\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\}\cdot\{\sin(x+y)-\sin(x-y)\}$

$=(2\sin x\cos y)(2\cos x\sin y)$

$=\sin 2x\sin 2y\geqslant 0$.

从而　$\sin 2x\geqslant 0$ 且 $\sin 2y\geqslant 0$，即

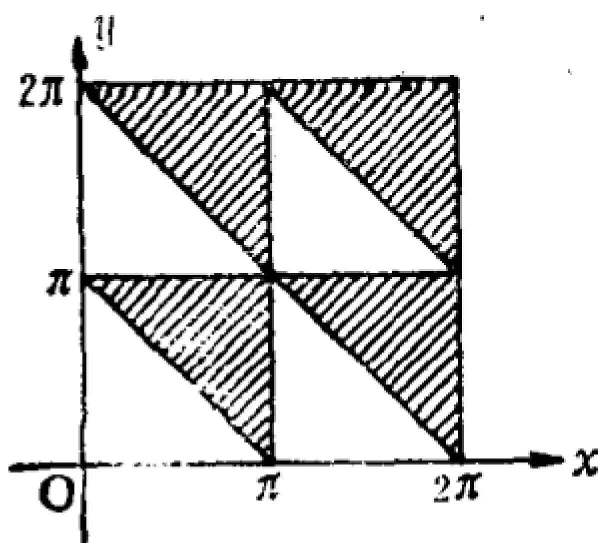


图 5-21

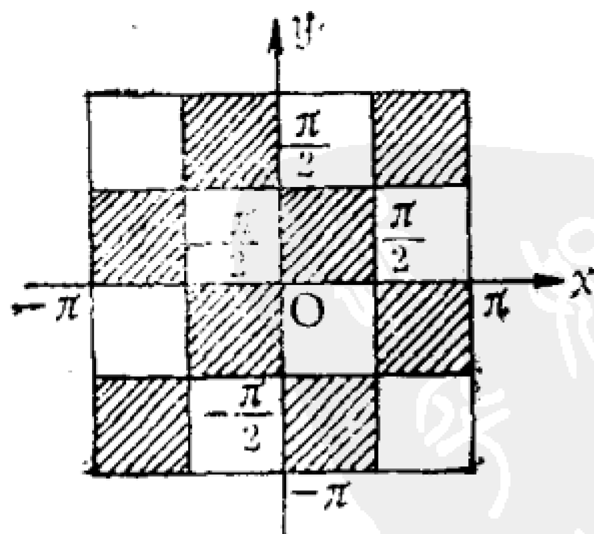


图 5-22

$$-\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\text{ 且 }-\pi\leqslant y\leqslant-\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad ①$$

或　$\sin 2x\leqslant0$ 且 $\sin 2y\leqslant0$，即

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant0,\ \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\text{ 且 }-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant0,\ \frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\pi.\qquad ②$$

从而，所求的范围是①与②各自确定的集合的并集，如图 5-22 中带阴影部分(包括边界).

4·3　三角函数的最大值、最小值

【定理】4. $\sin\theta$，$\cos\theta$ 有最大值 1，最小值 -1，而 $\mathrm{tg}\,\theta$ 既没有最大值也没有最小值.

证明　由三角函数的定义，这是明显的.　□

【定理】5. $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的一次式，二次式

$a\sin\theta+b\cos\theta$，$a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ 的最大值，最小值分别由下式给定：

$$\sqrt{a^2+b^2},\ -\sqrt{a^2+b^2};$$

$$\frac{a+c}{2}+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2},\ \frac{a+c}{2}-\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2}.$$

其中，a,b,c 是常数.

证明　(1) 令 $P=a\sin\theta+b\cos\theta$.因为 a,b 不同时为0，所以，如取点 $P(a,b)$,且令 α 是属于终边 OP 的一个角，则由 3·2 的【定理】2 可得

$$P=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha).$$

从而，P 在 $\sin(\theta+\alpha)=1$ 时取最大值$\sqrt{a^2+b^2}$，而在 $\sin(\theta+\alpha)=-1$ 时取最小值$-\sqrt{a^2+b^2}$.

(2) 令 $P=a\sin^2\theta+2b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$,则

$$P=\frac{a(1-\cos2\theta)}{2}+b\sin2\theta+\frac{c(1+\cos2\theta)}{2}$$

$$=\frac{a+c}{2}+m\cos2\theta+b\sin2\theta$$

$$\left(\text{其中 } m=\frac{c-a}{2}\right).$$

(i) m,b 不同时为 0 的情形　这时选取点$P(m,b)$,若令α 是属于终边

OP 的一个角，则

$$P=\frac{a+c}{2}+\sqrt{m^2+b^2}\sin(2\theta+\alpha).$$

(ii) m,b 同时为 0 的情形　因为 $a=c, b=0$，所以 $P=a$。这与在(i)的公式中令 $m=b=0$ 所得的结果是一致的.因此 P 常常可变形成

$$P=\frac{a+c}{2}+\sqrt{m^2+b^2}\sin(2\theta+\alpha).$$

于是，P在 $\sin(2\theta+\alpha)=1$ 时，取最大值 $\frac{a+c}{2}+\sqrt{m^2+b^2}$，而当 $\sin(2\theta+\alpha)=-1$ 时，取最小值 $\frac{a+c}{2}-\sqrt{m^2+b^2}$. □

注意　求最大值、最小值的一般方法是实施下列的步骤，求出所给三角函数式可能的取值范围，再仔细考察此范围的边界值.

(甲) 变换成一种类型的三角函数；

(乙) 应用同角的正弦、余弦的合成公式；

(丙) 视为 $\sin\theta+\cos\theta=t$ 的函数；

(丁) 画出图象；

(戊) 应用定理："若两数的和(积)一定，则这两数的积(和)在两数相等时变为最大(最小)；若两数不相等，则差最小时，积(和)变为最大(最小)".

例题1. 试求 $y=\cos^2x+2\sin x$ 的最大值、最小值.

解　若令$\sin x=t$，则 $|t|\leqslant 1$，且原来的函数变为

$$y=-t^2+2t+1=-(t-1)^2+2.$$

从而，如图 5-23 所示，

当 $t=\sin x=1$时，函数取最大值 2.

当 $t=\sin x=-1$ 时，函数取最小值 -2.

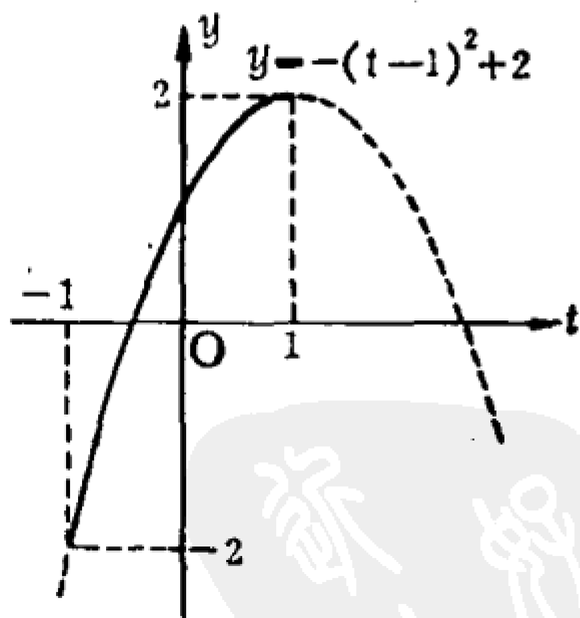


图 5-23

例题2. 试求 $x+y=a$(定值)时函数 $\cos x\cos y$的最大值、最小值.

解　$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}$

$$=\frac{1}{2}\{\cos a+\cos(x-y)\}.$$

从而

当 $\cos(x-y)=1$ 时，$\cos x\cos y$ 取最大值

$$\frac{1}{2}(\cos a+1)=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

当 $\cos(x-y)=-1$ 时，$\cos x\cos y$ 取最小值

$$\frac{1}{2}(\cos a-1)=-\sin^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

4·4 消 去 法

【定义】3. 消去式·消去法 由给定的一组方程式，消去其中的某个字母，叫做消去这个字母，在消去这个字母后所得的关系式叫做消去式．存在消去式是给定的一组方程式（联立方程组）有解的必要条件．求消去式的方法叫做消去法．作为消去法，一般有

(甲) 视为联立方程组求解；

(乙) 组成平方和、平方差；

(丁) 对字母系数求解等等．

但不少的情形不能按一般的方法来作，而要求用特殊的技巧．

例题1. (视为联立方程组求解的方法)

试由 $\begin{cases}\operatorname{tg}\theta+\sin\theta=a, & ① \\ \operatorname{tg}\theta-\sin\theta=b & ②\end{cases}$

消去 θ．

解 ①与②相加、减，分别得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a+b}{2},\quad \sin\theta=\frac{a-b}{2}$$

从而

$$1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{1-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

于是，所求得的消去式是

$$(a^2-b^2)^2=16ab.$$

例题2. (组成平方和、平方差的方法)

试由
$$\begin{cases}\sin\theta+\sin\varphi=a, & ①\\ \cos\theta+\cos\varphi=b, & ②\\ \cos(\theta+\varphi)=c & ③\end{cases}$$

消去 θ，φ.

解 假如分别作①与②的平方和、平方差，则有

$$2\cos(\theta-\varphi)=a^2+b^2-2, \quad ④$$

$$\begin{aligned}&\cos 2\theta+\cos 2\varphi+2\cos(\theta+\varphi)\\ &\quad=2\cos(\theta+\varphi)\cos(\theta-\varphi)+2\cos(\theta+\varphi)\\ &\quad=2\cos(\theta+\varphi)(\cos(\theta-\varphi)+1)\\ &\quad=b^2-a^2. \quad ⑤\end{aligned}$$

将③、④代入⑤，便得下列消去式

$$2c\left(\frac{a^2+b^2}{2}-1+1\right)=b^2-a^2,$$

即 $\quad (a^2+b^2)c=b^2-a^2.$

例题3.（对字母系数求解的方法）

试由
$$\begin{cases}2\cos^2\theta+x\sec\theta=3 & ①\\ 2\sin^2\theta+y\csc\theta=3 & ②\end{cases}$$

消去 θ.

解 由①、②分别有

$$x=3\cos\theta-2\cos^3\theta, \qquad y=3\sin\theta-2\sin^3\theta.$$

从而

$$\begin{aligned}x+y&=3(\sin\theta+\cos\theta)-2(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\\ &=(\sin\theta+\cos\theta)^3,\\ x-y&=3(\cos\theta-\sin\theta)-2(\cos^3\theta-\sin^3\theta)\\ &=(\cos\theta-\sin\theta)^3,\end{aligned}$$

因为 x，y 是实数，所以

$$(x+y)^{1/3}=\sin\theta+\cos\theta,(x-y)^{1/3}=\cos\theta-\sin\theta.$$

于是得消去式

$$\begin{aligned}(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}&=(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2\\ &=2.\end{aligned}$$

例题4.（其他方法）试由

(1) $$\begin{cases} \mathrm{tg}\theta+\mathrm{tg}\varphi=a, & ① \\ \mathrm{ctg}\theta+\mathrm{ctg}\varphi=b, & ② \\ \theta+\varphi=\alpha & ③ \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} a\cos\theta+b\sin\theta=c, & ① \\ a\cos\varphi+b\sin\varphi=c, & ② \\ \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi=m(<0) & ③ \end{cases}$$

消去θ，φ.

解 (1) ①÷②

$$\frac{a}{b}=\frac{\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{tg}\,\varphi}{\mathrm{ctg}\,\theta+\mathrm{ctg}\,\varphi}=\mathrm{tg}\,\theta\mathrm{tg}\,\varphi. \quad ④$$

而 $$\mathrm{tg}(\theta+\varphi)=\frac{\mathrm{tg}\,\theta+\mathrm{tg}\,\varphi}{1-\mathrm{tg}\theta\mathrm{tg}\,\varphi}. \quad ⑤$$

将①,③,④代入⑤，便得下列消去式

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{ab}{b-a}.$$

(2) 将①两端除以$\cos\theta$，再平方得

$$a^2+2ab\mathrm{tg}\,\theta+b^2\mathrm{tg}^2\,\theta=c^2\sec^2\theta.$$

因为 $1+\mathrm{tg}^2\,\theta=\sec^2\theta$,所以

$$(b^2-c^2)\mathrm{tg}^2\,\theta+2ab\mathrm{tg}\,\theta+(a^2-c^2)=0. \quad ④$$

同样,由②可得

$$(b^2-c^2)\mathrm{tg}^2\,\varphi+2ab\mathrm{tg}\,\varphi+(a^2-c^2)=0. \quad ⑤$$

在这里,如果$b^2-c^2=0$,则由④、⑤可得$\mathrm{tg}\,\theta=\mathrm{tg}\,\varphi$，从而$\mathrm{tg}\,\theta\mathrm{tg}\,\varphi=\mathrm{tg}^2\theta>0$,这与③矛盾，因此$b^2-c^2\neq0$.

于是，$\mathrm{tg}\,\theta$，$\mathrm{tg}\,\varphi$是二次方程式

$$(b^2-c^2)x^2+2ab\,x+(a^2-c^2)=0$$

的根。从而，两根$\mathrm{tg}\theta$,$\mathrm{tg}\varphi$的积是

$$\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}. \quad ⑥$$

把③代入⑥便得消去式

$$m=\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}.$$

4·5 反三角函数

【定义】4. 反三角函数及其主值 三角函数 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $y=\operatorname{tg}\theta$, $y=\operatorname{ctg}\theta$, $y=\sec\theta$, $y=\csc\theta$ 的反函数，总称为反三角函数，分别表示为

$$y=\sin^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\sin\theta;$$
$$y=\cos^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\cos\theta;$$
$$y=\operatorname{tg}^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\operatorname{tg}\theta;$$
$$y=\operatorname{ctg}^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\operatorname{ctg}\theta;$$
$$y=\sec^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\sec\theta;$$
$$y=\csc^{-1}\theta \text{ 或 } y=\operatorname{Arc}\csc\theta.$$

这些反三角函数分别叫做反正弦(Arc sine)、反余弦(Arc cosine)、反正切(Arc tangent)、反余切(Arc cotangent)、反正割(Arc secant)、反余割(Arc cosecant)。很明显，$\sin^{-1}\theta$, $\cos^{-1}\theta$ 定义于 $|\theta|\leqslant 1$, $\sec^{-1}\theta$, $\csc^{-1}\theta$ 定义于 $|\theta|\geqslant 1$, $\operatorname{tg}^{-1}\theta$, $\operatorname{ctg}^{-1}\theta$ 对任意 θ 都有定义. 在反三角函数值中，如果只限于在下列范围取值

对于 $y=\sin^{-1}\theta$, $y=\csc^{-1}\theta$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$;

对于 $y=\cos^{-1}\theta$, $y=\sec^{-1}\theta$, $0\leqslant y\leqslant\pi$;

对于 $y=\operatorname{tg}^{-1}\theta$ $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$;

对于 $y=\operatorname{ctg}^{-1}\theta$ $0<y<\pi$.

那末这些值就叫做反三角函数的主值，分别用

$$\sin^{-1}\theta,\quad \cos^{-1}\theta,\quad \operatorname{tg}^{-1}\theta,\quad \operatorname{ctg}^{-1}\theta,\quad \sec^{-1}\theta,\quad \csc^{-1}\theta$$

表示.

【定理】6. 各类反三角函数都是(无限)多值函数，但其主值都是单值函数.

证明 由反三角函数及其主值的定义自然明白. □

【定理】7. 下列各等式成立.

$$\sin(\sin^{-1}\theta)=\sin(\sin^{-1}\theta)=\theta;$$
$$\cos(\cos^{-1}\theta)=\cos(\cos^{-1}\theta)=\theta;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}\theta)=\operatorname{tg}(\operatorname{tg}^{-1}\theta)=\theta;$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg}^{-1}\theta)=\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg}^{-1}\theta)=\theta;$$
$$\sec(\sec^{-1}\theta)=\sec(\sec^{-1}\theta)=\theta;$$
$$\csc(\csc^{-1}\theta)=\csc(\csc^{-1}\theta)=\theta.$$

证明 由反三角函数及其主值的定义立即可证. □

【定理】8. 反三角函数与其主值的关系由下列各式决定(其中 n 是任意整数)：

$$\sin^{-1}\theta=n\pi+(-1)^n\,\mathrm{sin}^{-1}\theta;$$
$$\cos^{-1}\theta=2n\pi\pm\mathrm{cos}^{-1}\theta;$$
$$\mathrm{tg}^{-1}\theta=n\pi+\mathrm{tg}^{-1}\theta.$$

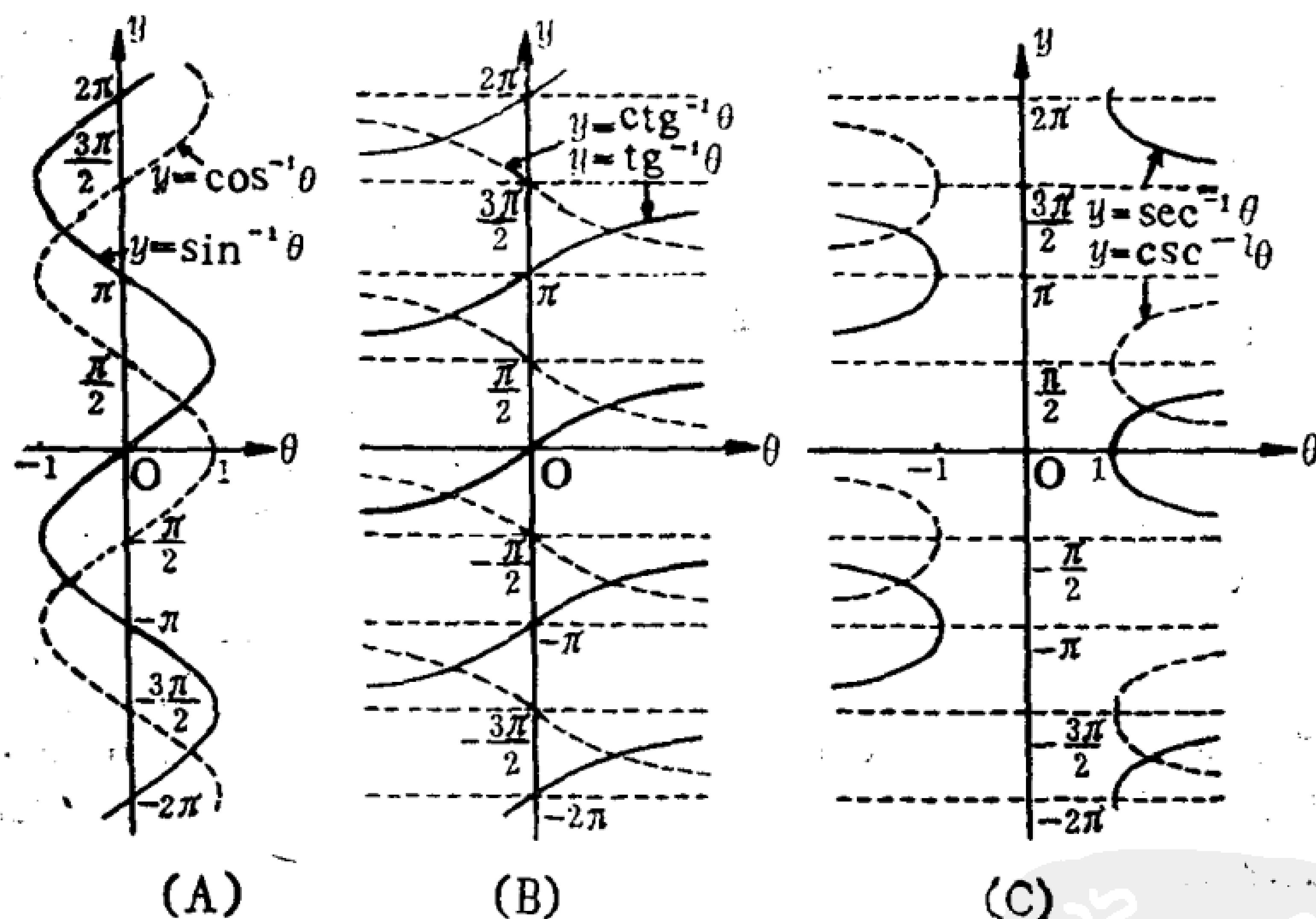
证明 先证明第一式．令 $\sin^{-1}\theta=y$，则 $\theta=\sin y$，从而由 4.1 的【定理】1，作为特解可取 $\mathrm{sin}^{-1}\theta$，因此

$$y=n\pi+(-1)^n\mathrm{sin}^{-1}\theta,$$

于是　$\sin^{-1}\theta=n\pi+(-1)^n\mathrm{sin}^{-1}\theta$　　(n 是任意整数)

第二、三式也同样可证． □

【定理】9. 反三角函数的图象由图 5—24 给出．图中的实线部分是它们主值的图象．



(A) $y=\sin^{-1}\theta$ 与 $y=\cos^{-1}\theta$ 的图象
(B) $y=\mathrm{tg}^{-1}\theta$ 与 $y=\mathrm{ctg}^{-1}\theta$ 的图象
(C) $y=\sec^{-1}\theta$ 与 $y=\csc^{-1}\theta$ 的图象

图 5—24

证明 因为反三角函数是三角函数的反函数．所以反三角函数的图象可由三角函数的图象作关于直线 $y=x$ 的对称移动而得到．由此便可直接得出图 5—24 中的各图象． □

注意 通常对于反三角函数，只考虑它的主值，因而不用记号 $\sin^{-1}\theta$, $\cos^{-1}\theta$,…,而只简单地采用 $\sin^{-1}\theta$, $\cos^{-1}\theta$,…, 下面规定 $\sin^{-1}\theta$(arc $\sin\theta$), $\cos^{-1}\theta$ (arc $\cos\theta$),… 都表示主值.

【定理】10. 下列等式成立:

(1) $\sin^{-1}\theta+\cos^{-1}\theta=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$;

(3) $\mathrm{tg}^{-1}1+\mathrm{tg}^{-1}2+\mathrm{tg}^{-1}3=\pi$.

证明 (1) 令 $\sin^{-1}\theta=y$, 则

$$\sin y=\theta,\quad \therefore\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\theta.$$

但是 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$, 所以 $0\leqslant\frac{\pi}{2}-y\leqslant\pi$.

从而 $\cos^{-1}\theta=\frac{\pi}{2}-y$,

$$\therefore\quad \sin^{-1}\theta+\cos^{-1}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}=x$, $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3}=y$,

则 $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,y=\frac{1}{3}$.

从而
$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$,

所以 $0<x+y<\frac{\pi}{2}$,

故 $x+y=\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

(3) 令 $\mathrm{tg}^{-1}1=x$, $\mathrm{tg}^{-1}2=y$, $\mathrm{tg}^{-1}3=z$,

则 $\operatorname{tg} x=1, \quad \operatorname{tg} y=2, \quad \operatorname{tg} z=3$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}=\frac{1+2}{1-1\cdot 2}=-3$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}((x+y)+z)=\frac{\operatorname{tg}(x+y)+\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}(x+y)\operatorname{tg} z}=\frac{-3+3}{1-(-3)\cdot 3}=0$$

但 $0<x<\frac{\pi}{2}, \quad 0<y<\frac{\pi}{2}, \quad 0<z<\frac{\pi}{2},$

所以 $0<x+y+z<\frac{3\pi}{2}$

由于在区间$\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$内只有一个角$\pi$的正切值等于零，故

$$\operatorname{tg}^{-1}1+\operatorname{tg}^{-1}2+\operatorname{tg}^{-1}3=x+y+z=\pi.$$

即 角$\pi-(\operatorname{tg}^{-1}2+\operatorname{tg}^{-1}3)$在$\operatorname{tg}^{-1}x$的主值区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内，因而

$$\pi-(\operatorname{tg}^{-1}2+\operatorname{tg}^{-1}3)=\operatorname{tg}^{-1}1$$

由此(3)得证。 □

§5. 三角形与三角函数

5·1 直角三角形与三角函数

【定理】1. 设有直角三角形 ABC，C 角是直角. 角 A, B, C 的对边长各为 a, b, c，此直角三角形的内切圆、外接圆的半径各是 r, R，三角形面积为 S，则下列各式成立：

(1) $a^2+b^2=c^2$；

(2) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c$；

(3) $R=\frac{c}{2}$；

(4) $r=s-c$；

(5) $S=\frac{ab}{2}=sr$,

其中 $2s=a+b+c$.

证明 如图 5-25 所示.

(1) 由勾股定理;(2)由三角函数的定义;(3)由斜边 AB 是外接圆的直径，结论是显然的;

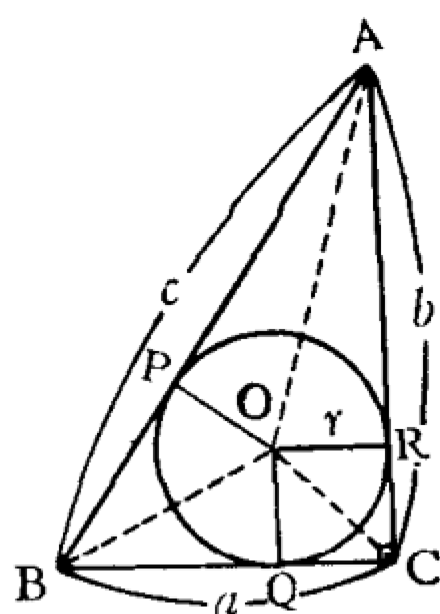


图 5-25

(4) 设内切圆的中心为 O，内切圆与 AB, BC, CA 各边的切点分别为 P, Q, R，则

$$AP=AR,\ BP=BQ,\ CQ=CR(=r),$$

因此

$$s-c=(AR+RC+BQ)-(AP+PB)=RC=r;$$

(5) $\triangle ABC$ 的面积是$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ 面积的和，因此

$$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=sr.$$

而 $S=\frac{1}{2}ab$ 是显然的. □

5·2 正弦定理

【定理】2. 在$\triangle ABC$ 中，设顶角的大小各为 A, B, C，其对边 BC, CA, AB 的长度各为 a, b, c，三角形外接圆的半径为 R，则下列等式成立.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

证明 证明$\frac{a}{\sin A}=2R$.

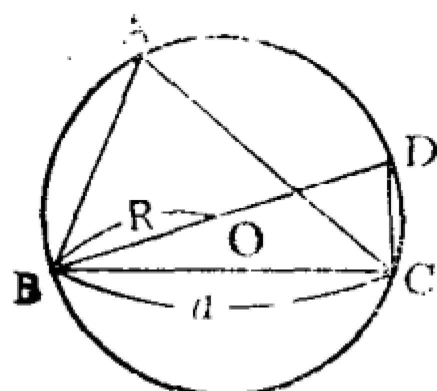
(i) $A=\frac{\pi}{2}$时，$a=2R$，$\sin A=1$，故显然成立.

(ii) $A<\frac{\pi}{2}$时，由于$\triangle ABC$的外接圆的中心O位于弓形BAC的内部.因此通过 B 点的直径 BOD 的 D 端位于弧 $\overset{\frown}{BAC}$ 上，如图 5-26(A)所示.因而 $A=\angle BDC$.

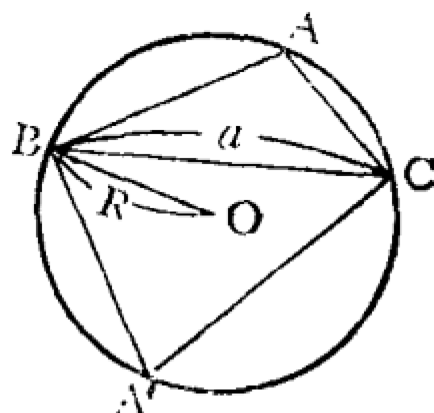
又因 $\angle BCD=\frac{\pi}{2}$, $BD=2R$, $BC=a$,

∴　$a=2R\sin A$.

(iii)　$A>\frac{\pi}{2}$时，如图5-26(B)所示，在外接圆上取一不位于弧$\widehat{BAC}$上的点A'. 令$\angle BA'C=A'$,



(A)



(B)

图 5-26

则　　$\sin A=\sin(\pi-A')=\sin A'$.

由于　　$A'<\frac{\pi}{2}$，所以根据(ii)得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin A'}=2R.$$ □

注意　这个定理叫做正弦定理. 凡是在三角形的三个角A, B, C与三个边a, b, C之间成立的等式，都可由这个定理导出. 在下面，对于符号A, B, C, a, b, c, 如未事先特别说明，都按此定理中的意义使用.

【定理】3. 存在以a, b, c为三边，以A, B, C为三角的三角形的充分必要条件是，在这些角与边之间有下列等式成立.

(1)　$A+B+C=\pi$;

(2)　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

其中，A, B, C, a, b, c都是正值.

证明　(1)与(2)是必要条件的证明，由前面【定理】2是明显的. 现在来证明(1)与(2)是充分条件. 假设选取长度为a的线段BC, 在直线BC的同侧，引射线BA', CA''，使它们与BC的夹角为$\angle CBA'=B$, $\angle BCA''=C$. 则由(1)知$B+C<\pi$，故两条射线相交. 设交点为A, 则由已证明了的必要性有$\angle BAC=\pi-(B+C)=A$. 现作$\triangle ABC$的外接圆，若令其半径为R，则由正弦定理，有$a=2R\sin A$，因而由(2)有

$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

于是容易导出$AC=2R\sin B=b$, $AB=2R\sin C=c$.

换言之，$\triangle ABC$ 是以 a, b, c 为三边，A, B, C 为三个角的三角形. □

【定理】4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A \leqslant B \leqslant C$，则 $a \leqslant b \leqslant c$. 反过来也对.

证明 假定 $A \leqslant B \leqslant C$：

(i) $A \leqslant B \leqslant C < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin A \leqslant \sin B \leqslant \sin C$；

(ii) $A \leqslant B < C = \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin A \leqslant \sin B < \sin C$；

(iii) $A \leqslant B < C$，而 $\frac{\pi}{2} < C < \pi$ 时，因为 $0 < A+B = \pi - C < \frac{\pi}{2}$，且 $0 < A < \frac{\pi}{2}$，$0 < B < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin A \leqslant \sin B < \sin(A+B) = \sin C$.

于是，在任何情形下都是 $\sin A \leqslant \sin B \leqslant \sin C$. 从而，由正弦定理得 $a \leqslant b \leqslant c$.

反之，假定 $a \leqslant b \leqslant c$，这时由正弦定理得 $\sin A \leqslant \sin B \leqslant \sin C$，从而

(i)′ A, B, C 中的任何一个都不大于 $\frac{\pi}{2}$ 时，很显然 $A \leqslant B \leqslant C$.

(ii)′ A, B, C 中的一个(例如 C) 大于 $\frac{\pi}{2}$ 时，由 $C = \pi - (A+B) > \frac{\pi}{2}$，有 $\frac{\pi}{2} > A+B > 0$，$\therefore A < \frac{\pi}{2}$，$B < \frac{\pi}{2}$. 因而，由 $\sin A \leqslant \sin B$ 得 $A \leqslant B$. 又因 $B < \frac{\pi}{2} < C$，所以 $A \leqslant B \leqslant C$.

于是，在任何情形下都有 $A \leqslant B \leqslant C$. □

【定理】5. 对于 $\triangle ABC$，下列的(1)，(2)，(3)是相互等价的.

(1) $a < b+c$，$b < c+a$，$c < a+b$；

(2) $|b-c| < a < b+c$；

(3) $|\sin B - \sin C| < \sin A < \sin B + \sin C$.

证明 显然(1)与(2)是等价的. 至于(2)与(3)等价，可由正弦定理得到. 因由正弦定理，$a = 2R\sin A$，$b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$，把它们代入(2)，并用 $2R(>0)$ 来除，便得(3). 反之，若用 $2R$ 乘(3)的各端，并用 a, b, c 代替所得的结果，便得(2). □

5·3 余弦定理

【定理】6. 在 $\triangle ABC$ 中，下列等式成立.

(1) $a = b\cos C + c\cos B$；

(2) $b = c\cos A + a\cos C$；

(3) $c = a\cos B + b\cos A$.

证明 (1) 因为 $A+B+C=\pi$,所以

$$\sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}=\sin(B+C)$$
$$=\sin B\cos C+\cos B\sin C.$$

应用正弦定理

$$a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C,\text{得}$$
$$a=b\cos C+c\cos B.$$

(2),(3)也同理可证明. □

注意 这个定理叫做**第一余弦定理**(或称射影定理).

【定理】7. 在$\triangle ABC$ 中, 下列等式成立.

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$;

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证明 (1) 由第一余弦定理的(1)乘以 a, 减去(2)×b, 再减去(3)×c, 即得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

(2),(3)也同理可证. □

注意 这个定理叫做**第二余弦定理**, 通常简称余弦定理.

【系】 在$\triangle ABC$ 中,

(1) 当且仅当 A 为锐角时, $a^2<b^2+c^2$;

(2) 当且仅当 A 为直角时, $a^2=b^2+c^2$;

(3) 当且仅当 A 为钝角时, $a^2>b^2+c^2$.

证明 (1) 在余弦定理的(1)式中, 由于 A是锐角, 因此 $\cos A>0$, 从而 $a^2<b^2+c^2$.反之, 若 $a^2-b^2-c^2<0$, 则由同样的(1) 式有 $\cos A>0$. 但因 $0<A<\pi$,所以$0<A<\frac{\pi}{2}$, 即 A 是锐角.

(2),(3)也同样可证明. □

【定理】8. 下列三条是相互等价的:

(1) $A+B+C=\pi$, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$;

(2) 第一余弦定理的(1), (2), (3)式;

(3)第二余弦定理的(1),(2),(3)式.

证明 由前面【定理】3,6 可知, 从(1)可导出(2),又由【定理】7, 从(2)可导出(3).现在证明由(3)可导出(2): 把第二余弦定理的(2), (3)相加, 再用$2a$除两端,便可得到第一余弦定理的(1)式;其他式子也可用同样方法得到. 下面证明由(2)可导出(1): 从第一余弦定理的(1), (2) 消去 $\cos C$, 便

得

$$a^2-b^2=c(a\cos B-b\cos A).$$

再将第一余弦定理的(3)式代入上式，又得

$$a^2-b^2=a^2\cos^2B-b^2\cos^2A,$$

$$\therefore\quad a^2(1-\cos^2B)=b^2(1-\cos^2A).$$

即 $a^2\sin^2B=b^2\sin^2A.$

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以

$$a\sin B=b\sin A，\text{即}\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

完全同样地有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.（\text{令其}=k.）\qquad ①$$

其次，假定 A 不是 A,B,C 中最大的角，由①有

$$a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$$

再把它代入第一余弦定理的(1)式，两边用 k 除，得

$$\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C).$$

但是 $0<A+B+C<3\pi$,，从而

$$A=n\pi+(-1)^n(B+C)$$

其中，n 必须是 0 或 1. 也就是说

$$A=B+C\ \text{或}\ A+B+C=\pi.$$

因为 A 不是最大角，所以 $A\neq B+C$，从而 $A+B+C=\pi$. □

5·4 正切定理

【定理】9. 在△ABC 中，下列等式成立

(1) $$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}};$$

(2) $$b=\frac{(c+a)\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C-A}{2}}=\frac{(c-a)\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{C-A}{2}};$$

(3) $c=\dfrac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\dfrac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$.

证明 (1) 由正弦定理得.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}.$$

将上式最左端的分母化为半角的表达式，其余两分式的分母化为积的形式，则得.

$$\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b+c}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{b-c}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}$$

但是 $A+B+C=\pi$,

所以 $\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}$.

从而

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

(2), (3) 也同样可证明. □

注意 上述定理叫做莫尔韦德(Mollweide)定理，用于解三角形.

【定理】10. 在△ABC中，下列等式成立.

(1) $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$;

(2) $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}$;

(3) $\dfrac{c-a}{c+a}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}$.

证明 (1) 由前面【定理】9的(3)式，有

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\frac{C}{2}\ \sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\ \cos\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}.$$

(2)，(3) 也同样可证明. □

注意 这个定理叫做正切定理，当三角形的两边及其夹角给定时，可用于解三角形.

5·5 确定三角形形状的问题

【定义】1. 确定三角形形状的问题 当三角形的各要素(三条边，三个角)和三角形的其他量(例如内切圆、外接圆半径，面积等等)之间的几个关系给定时，我们把确定相应三角形的形状(正三角形，等腰三角形，直角三角形或三个边，三个角的比等等)的问题，叫做确定三角形形状的问题.不言而喻，若三角形的要素(三个边；三个角)都给定时，则三角形的形状就完全确定. 但这种问题，作为解三角形的一部分问题，需特别处理.

【定理】11. 在$\triangle ABC$中，若 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，C 角是直角.

证明 由正弦定理可得

$$\sin A=\frac{a}{2R},\qquad \sin B=\frac{b}{2R},\qquad \sin C=\frac{c}{2R},$$

把它们代入定理中给定的式子，得

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=c^2.$$

由 5.3【定理】7 的【系】知， $C=\frac{\pi}{2}$，从而，$\triangle ABC$ 是以 C 角为直角的直角三角形. □

例题 在 $\triangle ABC$ 中，当下列等式之一成立时，试决定$\triangle ABC$ 的形状.

(1) $\sin A=2\cos B\sin C$;

(2) $\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C=\sqrt{3}$

解 (1) $2\cos B\sin C=\sin A=\sin\{\pi-(B+C)\}$

$$=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C,$$

$\therefore\quad \sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin(B-C)=0.$

如果注意到，由 $0<B<\pi$，$0<C<\pi$，可得 $-\pi<B-C<\pi$，则又有

$$B-C=0.$$

从而，$\triangle ABC$ 是满足 $B=C$ 的等腰三角形.

(2) $(\sqrt{3})^2=(\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)^2$

$$=\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C+2(\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A).$$

但是

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A\\
&=(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} A)\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B\\
&=\left(\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{\cos A}{\sin A}\frac{\cos B}{\sin B}\\
&=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}\cdot\frac{-\cos(A+B)}{\sin(A+B)}+\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}\\
&=\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}=1,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{ctg}^2 A+\operatorname{ctg}^2 B+\operatorname{ctg}^2 C=(\sqrt{3})^2-2=1\\
&=\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C\operatorname{ctg} A,\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\{(\operatorname{ctg} A-\operatorname{ctg} B)^2+(\operatorname{ctg} B-\operatorname{ctg} C)^2+(\operatorname{ctg} C-\operatorname{ctg} A)^2\}=0.$$

$\therefore\quad \operatorname{ctg} A=\operatorname{ctg} B=\operatorname{ctg} C.$

如果注意到 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$0<C<\pi$，

则有　　$A=B=C.$

因而，$\triangle ABC$ 是正三角形.

注意　为了决定三角形的形状，原则上可以对三角形的边与角施行下列步骤，以导出简单的关系式.

(i) 如果给定的式子只包含 a,b,c，则可应用正弦定理导出 A,B,C 的关系.

(ii) 如果给定的式子只包含正弦(余弦)，则可用正弦(余弦)定理导出 a，b，c 的关系.

(iii) 如果给定的式子只包含正切、余切，则用

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\qquad \operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

换算成正弦、余弦的关系等等.

最后，看看能否化为：(几个因式的积)=0 或(平方和)=0 的形式.

5·6 三角形的半角公式

【定理】12. 在$\triangle ABC$中，下列等式成立

(1) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};$$

(2) $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}};$$

(3) $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

其中，$2s=a+b+c$.

证明 (1) 应用余弦定理

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos A)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

由于$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$，从而

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

同样，由$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A)=\frac{s(s-a)}{bc}$，可得



$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

从而又有

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

(2),(3)也完全同样地可证明. □

注意 (1),(2),(3)叫做三角形的半角公式.

5·7 三角形的面积

【定理】13. 在△ABC 中，假设它的面积为 S，外接圆、内切圆的半径各为 R，r，角 A，B，C 内的旁切圆的半径各为 r_a，r_b，r_c，且设$2s=a+b+c$，则下列各等式成立：

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$;

(2) $S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}$;

(3) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

(4) $S=\frac{abc}{4R}$;

(5) $S=rs$;

(6) $S=r_a(s-a)=r_b(s-b)=r_c(s-c)$.

证明 (1) 由△ABC 的顶点 A 向对边 BC (或其延长线)作垂线，设垂足为 H，则此时有 $AH=c\sin B$，因此

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B. \quad ①$$

其他式子也同样可得.

(2) 由正弦定理可得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

将上式代入①，便得

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}.$$

其他式子也同样可得.

(3) 把①中的 $\sin B$变换成半角的表达式,再应用三角形的半角公式,便得

$$S=\frac{1}{2}ac\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=ac\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(4) 由正弦定理可得

$$\sin B=\frac{b}{2R},$$

将上式代入①, 便有

$$S=\frac{abc}{4R}.$$

(5) 如图 5-27(A)所示, 假设$\triangle ABC$ 的内切圆心为 I, 内切圆与三边 BC, CA, AB 的切点各为 D, E, F, 则

$$\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB,$$

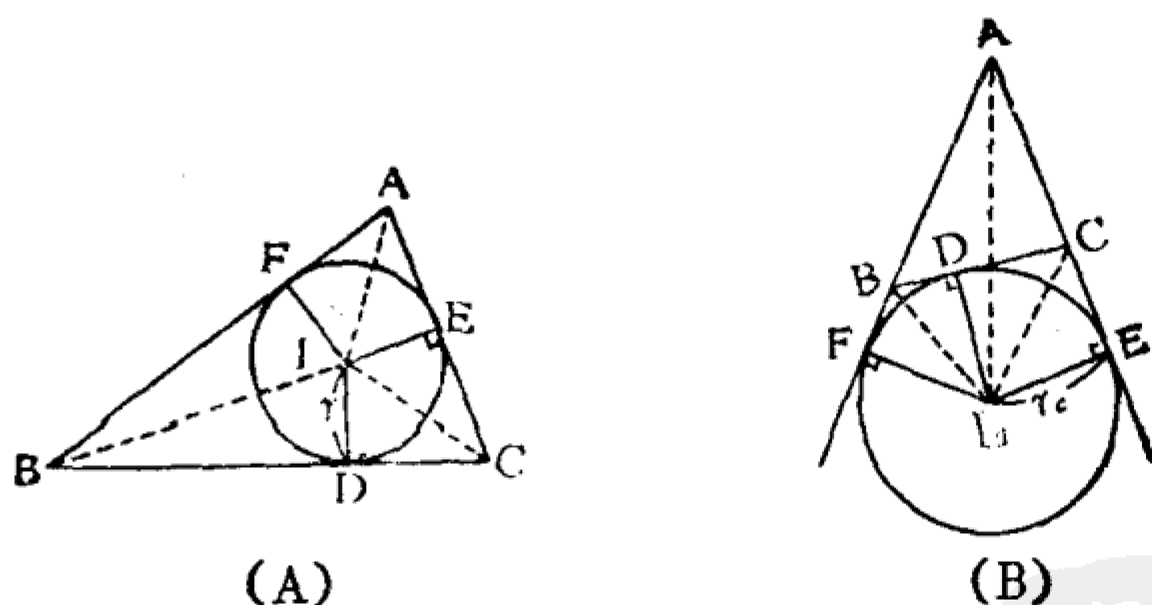


图 5-27

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=sr.$$

(6) 如图 5-27(B)所示, 假设位于角 A 内的旁切圆的圆心为 I_a, 此旁切圆与 BC, CA, AB 或它们的延长线的切点各为 D, E, F, 则

$$\triangle ABC=\triangle I_aCA+\triangle I_aAB-\triangle I_aBC,$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}br_a+\frac{1}{2}cr_a-\frac{1}{2}ar_a=(s-a)r_a.$$

其他式子也同样可证. □

注意 上述定理中的(1),(2),(3)式分别是在两边及其夹角，两角及其夹边,以及三边给定时所用的公式.(3)式特别地叫做海伦*(Heron)公式. 下面，如未特别事先说明，记号 R, r, r_a, r_b, r_c, S, s 都按上述定理中的意义来理解.

5·8 三角形的内切圆、外接圆、旁切圆

【定理】14. 在$\triangle ABC$中，下列等式成立

(1) $$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

(2) $$R=\frac{abc}{4S}=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C};$$

(3) $$r_a=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b=\frac{S}{s-b}=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}=s\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$r_c=\frac{S}{s-c}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}=s\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

证明 (1) 由【定理】13 的(5)式知：$r=S/s$,再应用海伦公式，得

* 也叫海伦—秦九韶公式——译注.

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

现设△*ABC* 的内切圆心为 *I*，内切圆与 *BC*，*CA*，*AB* 的切点各为 *D*，*E*，*F* 如图 5-28 所示，则

$$AE=AF=s-a,$$
$$BD=BF=s-b,$$
$$CD=CE=s-c,$$

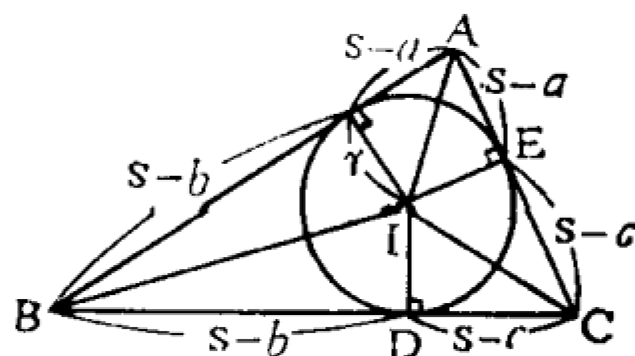


图 5-28

因此，对于直角三角形 *AFI*，

$$IF=AF\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad \therefore\ r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

同样有

$$r=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

又　　$$BD=DI\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=r\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

$$CD=DI\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=r\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

把它们代入 $BD+DC=BC$ 中，得

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)=a,$$

$$\therefore\quad r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

但是

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sin A,\ 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

因此

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

(2) 是很明显的.

(3) 由 5.7 中【定理】13 的 (6) 式知,

$$r_a=\frac{S}{s-a},$$

再应用海伦公式，得

$$r_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

而由 (1)，有

$$r_a=\frac{S}{s-a}=s\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

再者，在图 5—27(B) 中，$BD+DC=BC$，因此

$$r_a\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=a,$$

$$\therefore\quad r_a=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

式中，若令

$$a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

则

$$r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

对于 r_b，r_c 也同样可证明. □

5·9　三角形的中线. 角平分线

【定理】15. 在△ABC 中，设通过顶点 A 的中线与边 AC 所夹的角为 θ_1，顶角 A 的平分线与边 BC 所成的锐角为 θ_2，则下列等式成立.

(1) $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\theta_1\right)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$;

(2) $\operatorname{tg}\theta_2=\frac{b+c}{b-c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$,

其中，$b>c$.

证明 (1) 如图 5—29 所示，设 AD, AL 各是通过 A 的中线及顶角 A 的平分线，由于 $b>c$，因此 L 点位于线段 BD 上．令 $\angle LAD=\theta'$. 则

$$\theta'=\frac{A}{2}-\theta_1,$$

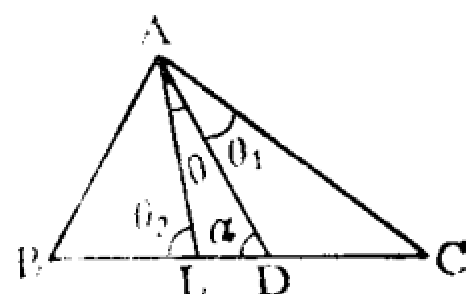


图 5–29

而若令 $\angle ADB=\alpha$，则在$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 中，用正弦定理得

$$\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2}+\theta'\right)},$$

$$\frac{b}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2}-\theta'\right)}.$$

由上列二式又得

$$c\sin\left(\frac{A}{2}+\theta'\right)=b\sin\left(\frac{A}{2}-\theta'\right).$$

将两端应用加法定理展开，并用 $\cos\frac{A}{2}\cos\theta'$ 来除，得

$$c\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\theta'\right)=b\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\theta'\right),$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\theta'=\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-\theta_1\right)=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

(2) $\theta_2=\pi-\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{B-C}{2}$.

从而，应用正切定理

$$\operatorname{tg}\theta_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B-C}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{b-c}\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$ □

【定理】16. 在△ABC中，假设由顶点A,B,C向对边所作的中线之长分别为m_a,m_b,m_c，顶角A,B,C的平分线之长分别为f_a,f_b,f_c，则下列等式成立。

(1) $$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A};$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B};$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C};$$

$$S=\frac{4}{3}\sqrt{k(k-m_a)(k-m_b)(k-m_c)}.$$

其中，$2k=m_a+m_b+m_c$.

(2) $$f_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)};$$

$$f_b=\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}=\frac{2}{c+a}\sqrt{cas(s-b)};$$

$$f_c=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

证明 (1) 如图5—30所示，设BC边的中点为D，则

$$AB^2+AC^2=2(AD^2+BD^2)$$

因此

$$c^2+b^2=2\left\{m_a{}^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\},$$

$$\therefore\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

式中，若令$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，则

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}.$$

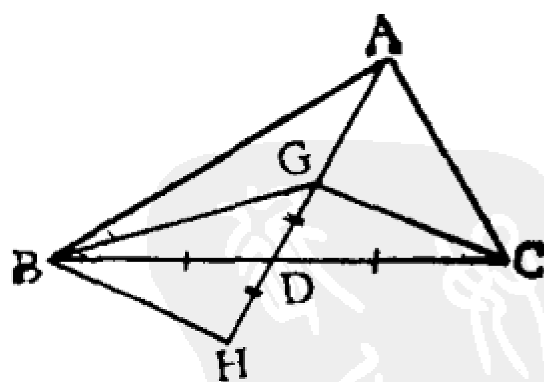


图 5–30

m_b，m_c的情形也同样可证。

为了证明最后一式，设△ABC的重心为G，在GD的延长线上选取一

点 H，使 $GD=DH$，则$\triangle BHD=\triangle GDC$，因此$\triangle GBH=\triangle GBC$．但$\triangle GBH$的三边 GB，BH，HG 分别是$\frac{2}{3}m_b$，$\frac{2}{3}m_c$，$\frac{2}{3}m_a$，因而，应用海伦公式，得

$$S=3\cdot\triangle BGC=3\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^4 k(k-m_a)(k-m_b)(k-m_c)}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{k(k-m_a)(k-m_b)(k-m_c)}.$$

(2) 如图 5-31 所示，设角A的平分线为AL，则$\triangle ABL+\triangle ALC=\triangle ABC$．

因此 $\frac{1}{2}cf_a\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bf_a\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A$，

$$\therefore\quad f_a=\frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

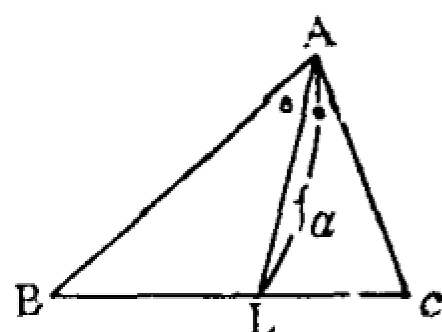


图 5-31

在上式中应用三角形的半角公式，便得

$$f_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

f_b，f_c 的情形也同样可证．　□

5·10　四边形的性质

[定理]17．在四边形 $ABCD$ 中，设在顶点 A,B,C,D 的角的大小各为 A，B,C,D，边 AB，BC，CD，DA 的长度各为 a,b,c,d，对角线 $AC=m$，$BD=n$，各边的和$a+b+c+d=2s$，AC，BD 的交角为 θ，四边形面积为 S，则下列等式成立：

(1) $A+B+C+D=2\pi$；

(2) $mn=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)}$；

(3) $S=\frac{1}{2}mn\sin\theta=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$

证明　(1) 是很显然的．

(2) 如图 5-32 所示，过四边形 $ABCD$ 的各顶点作两对角线的平行、

线，它们所构成的平行四边形(如图中虚线)是原四边形面积的两倍．而平行四边形两边的长度各是 m，n，交角为 θ，因此

$$S=\frac{1}{2}mn\sin\theta. \qquad ①$$

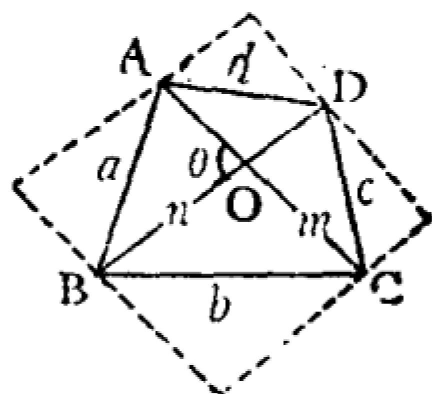


图 5-32

又因 S 是△ABD 与△BCD 的面积之和，所以

$$2S=ad\sin A+bc\sin C. \qquad ②$$

对△ABD 与△BCD 应用余弦定理，得

$$n^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C,$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2-d^2)=bc\cos C-ad\cos A. \qquad ③$$

作②与③的平方和，得

$$4S^2+\frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2-d^2)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\cos(A+C), \qquad ④$$

$$\therefore\ 16S^2=4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}$$

$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-16abcd\cos^2\frac{A+C}{2}.$$

$$\therefore\ S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}.$$

(2) 设 AC，BD 的交点为 O，则

$$2AO\cdot BO\cos\theta=AO^2+BO^2-a^2,\ 2AO\cdot DO\cos\theta=d^2-AO^2-DO^2,$$

$$2CO\cdot DO\cos\theta=CO^2+DO^2-c^2,\ 2BO\cdot CO\cos\theta=b^2-BO^2-CO^2,$$

将上列四式相加，得

$$2mn\cos\theta=b^2+d^2-a^2-c^2. \qquad ⑤$$

从①，⑤两式平方后，消去 θ，得

$$4m^2n^2=16S^2+(b^2+d^2-a^2-c^2)^2.$$

再把④代入上式，得

$$mn=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)}. \qquad □$$

注意 在下面，对于四边形所用的符号 $A,B,C,D,a,b,c,d,m,n,s,\theta,S$，如未特别事先说明，都按这个定理中所述的意义来理解．

【定理】18． 对内接于圆的四边形 $ABCD$，下列等式成立：

(1) $A+C=B+D=\pi$;

(2) $mn=ac+bd$;

(3) $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.

证明 (1) 是很明显的.

(2),(3) 在5·10的【定理】17的(2),(3)式中，令 $A+C=\pi$,便可立即得证. □

注意 (2) 式叫做托勒米(Ptolemy)定理.

【定理】19. 在外切于圆的四边形 $ABCD$ 中,下列等式成立:

(1) $a+c=b+d=s$;

(2) $S=\sqrt{abcd}\sin\frac{A+C}{2}=rs$.

其中，r 是内切圆的半径.

证明 (1) 如图5-33所示，设内切圆与边 AB, BC, CD, DA 的切点各为 E,F,G,H, 则 $AE=AH$, $BE=BF$, $CF=CG$, $DG=DH$,因此(1)式容易得证.

(2) 由(1)得 $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)=abcd$, 从而，应用5·10的【定理】17的(3)式得

$$S=\sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{A+C}{2}\right)}.$$

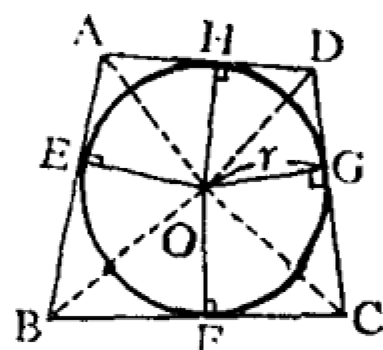


图 5-33

由于 $0<A<\pi$, $0<C<\pi$, 所以 $0<\frac{A+C}{2}<\pi$. 从而有

$$S=\sqrt{abcd}\sin\frac{A+C}{2}.$$

又设内切圆的中心为 O, 则 S 是 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCD$, $\triangle ODA$ 的面积之和.因此

$$S=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc+\frac{1}{2}rd=rs.$$ □

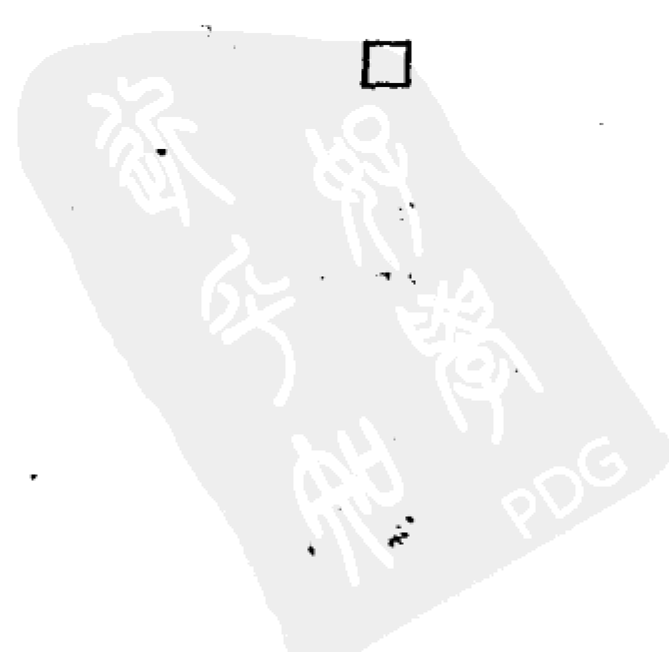
【定理】20. 在平行四边形 $ABCD$ 中，下列等式成立:

(1) $a=c$, $b=d$;

(2) $A=C$, $B=D$;

(3) $m^2+n^2=2(a^2+b^2)$,

$$m=\frac{2S}{n\sin\theta}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos B},$$



$$n=\frac{2S}{m\sin\theta}=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos B};$$

(4) $S=ab\sin B=\frac{1}{2}mn\sin\theta.$

证明 结论是很明显的，故证明从略。 □

5·11 正多边形的性质

【定理】21. 设边长为 a 的正 n 边形的内切圆，外接圆的半径各为 r，R，该多边形的面积为S，$\theta=\frac{2\pi}{n}$，则下列等式成立：

(1) $a=2R\sin\frac{\theta}{2}=2r\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$；

(2) $S=\frac{nR^2}{2}\sin\theta=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=nr^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$

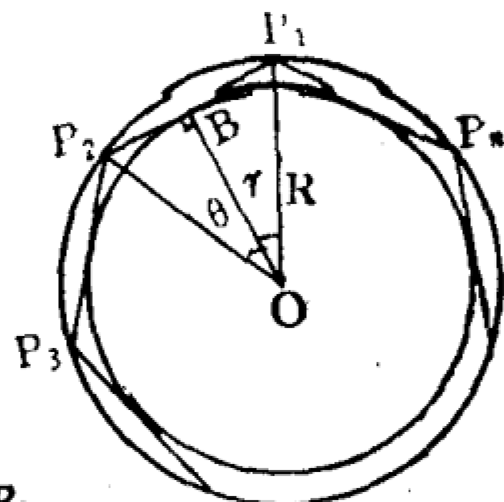


图 5-34

证明 如图 5-34 所示.设正 n 边形的顶点为 P_1，P_2，…，P_n，其内切圆的中心为 O，由 O 向边 P_1P_2 作垂线，垂足为 B，则显然有

$$\angle P_1OP_2=\theta,\ OB=r,\ OP_1=R.$$

(1) $P_1P_2=2P_1B=2P_1O\sin\frac{\theta}{2}=2BO\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$,

$\therefore\ a=2R\sin\frac{\theta}{2}=2r\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$

(2) $\triangle OP_1P_2=\frac{OP_1^2}{2}\sin\theta=\frac{P_1P_2^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=OB^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$

$\therefore\ S=n\cdot\triangle OP_1P_2=\frac{nR^2}{2}\sin\theta=\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}=nr^2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$ □

5·12 三角形的解法

【定义】2. 三角形的六要素.解三角形 三角形 ABC 的三个角A,B, C和三个边 a, b, c,叫做三角形的六要素. 在这六个要素之中,由给定的三个要素(给定三个角的情形除外),求出其余的要素，叫做解三角形.

【定理】22. 在 C 角为直角的直角三角形 ABC 中，如果给定六要素中的两

个(其中至少一个是边),则其余的要素都可由它们唯一地决定.

证明　假如注意到　$A+B=\frac{\pi}{2}$，$a^2+b^2=c^2$,则容易看到

(1) B 和 a 给定时，$A=\frac{\pi}{2}-B, b=c\sin B$,

$$c=\frac{a}{\cos B}.$$

(2) B 和 c 给定时，$A=\frac{\pi}{2}-B$，$a=c\cos B, b=c\sin B$.

(3) a 和 b 给定时，$c=\sqrt{a^2+b^2}, B=\cos^{-1}\frac{a}{c}, A=\frac{\pi}{2}-B$

(4) a 和 c 给定时，$b=\sqrt{c^2-a^2}, B=\cos^{-1}\frac{a}{c}, A=\frac{\pi}{2}-B$.

因为可能的情形都包含在上述四种情形中，故定理得证.　□

【定理】23. 在△ABC 中，如果给定六个要素中的三个（给定三个角的情形除外),则其余的要素都可由它们求出.

证明　(1) 若给定两角夹一边，例如 A, B 及 c, 则

$$C=\pi-(A+B), a=\frac{c\sin A}{\sin C}, b=\frac{c\sin B}{\sin C}.$$

(2) 若给定两边及其中一边的对角，例如 a, b 及 A，则

(i) 在 $A\geqslant\frac{\pi}{2}$ 的情形，由 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$，并注意到 $B<\frac{\pi}{2}$, 得

$$B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}.$$

(ii) 在 $A<\frac{\pi}{2}$ 的情形，对于 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$,

(甲)　当 $\frac{b\sin A}{a}=1$ 时，$B=\frac{\pi}{2}$.

(乙)　当 $\frac{b\sin A}{a}<1$ 时，$B\neq\frac{\pi}{2}$.

若$B<\frac{\pi}{2}$，则$B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}$.

若$B>\frac{\pi}{2}$，则$\sin B=\sin(\pi-B)=\frac{b\sin A}{a}$.

因为$0<\pi-B<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\pi-B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a},$$

$$\therefore\quad B=\pi-\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}.$$

总之

$$B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}$$

或

$$B=\pi-\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}.$$

由此可知

$$C=\pi-(A+B),$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

(3) 若给定一角及其两边，例如A，b及c，则

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}.$$

对于B和C中的锐角(这可用5.3的【系】来判断)，例如B，有

$$B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}.$$

$$C=\pi-(A+B).$$

(4) 若给定三边a,b,c，则对于A，B，C中的两个锐角，例如A和B，由三角形的半角公式得

$$A=2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$B=2\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

由此得 $C=\pi-(A+B)$.

因为可能的情形都包含在上述四种情形中，故定理得证. □

注意 除了(2)的情形外，其余几种情形都是唯一决定的. 详言之，在(2)(ii)(乙)中，如果除了 $a<b$ 的情形，则(2)的各种情形是唯一决定的. 在(2)(ii)(乙)中，如果 $a\geqslant b$，则由

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}\leqslant\sin A,$$

得 $$B\leqslant A<\frac{\pi}{2}.$$

从而 $$B=\sin^{-1}\frac{b\sin A}{a}.$$

§6. 三角函数在测量中的应用

6·1 测量的意义

【定义】1. 测量 测定地球表面上诸点的相对位置，并进行必要的计算和绘图，叫做测量. 在这里，所谓地面，不只是真正的地球表面，也包括水里，地下，空中等等需要实测的一切部分。为了决定诸点的相对位置，最基本的是测量水平距离，高度差，水平角和铅直角.

【定义】2. 铅直线. 铅直面. 水平线. 水平面. 水平角. 铅直角.

在任一地点，和重力方向一致的直线叫做铅直线，包含铅直线的平面，叫做铅直面. 与铅直线正交的直线、平面分别叫做水平线、水平面. 水平面、铅直面上的角分别叫做水平角、铅直角.

【定义】3. 水平距离、高度差、仰角、俯角

在图5—35中，设 A,B 是地面上的两点，AC,BB' 是在包含 A,B 的铅直面上，分别由 A，B 所作的水平线. 又设由 B 向 AC 所作垂线的垂足为 C，则线段 AC，BC 的长度分别叫做 A,B 二点间的水平距离(习惯上将它简称为 A,B 二点间的距离，下同)和高度差. 从一测点 A (测量的基准点)观测比它高的测点 B 所得到的铅直角 $\angle BAC$ 叫做在 A 点对 B 点的仰角，由 B 点观测比它低的测点 A 所得到的铅直角 $\angle B'BA$，叫做在 B 点对 A 点

的俯角.

6·2 三角函数在测量上的应用

例题1.(在距离测量上的应用) 为了测定位于对岸的二测点 A,B 之间的距离,我们选定二个测点 C,D,如图 5—36 所示.现测得 C,D 间的距离为 a,水平角 $\angle ACB=\alpha$,$\angle BCD=\beta$,$\angle CDA=\gamma$,$\angle ADB=\delta$,试求这时 A,B 间的距离.

解 对 $\triangle ACD$,$\triangle BCD$ 应用正弦定理,得

$$AC=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$BC=\frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)}.$$

再由 $$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\alpha}.$$

将前两式代入,便可得到所求的距离.

例题2.(在高度测量上的应用) 如图 5—37 所示。为了测定在 P 点直立的杆 PQ 的高度,选定测点 A,B,并使 A,B,P 三点位于同一铅直面上.在 A,B 点安设经纬仪,测得 A,B 间的距离为 a,仪器高度(从所选的测点到望远镜视线的铅直距离)的差 $A''B''=b$,铅直角 $\angle QA'A''=\alpha$,$\angle A''A'P=\beta$,$\angle QB'B''=\gamma$.试求这时 PQ 的高度.

解 在图 5—37 中,延长 QB',设与 $A'A''$ 的交点为 R,这时

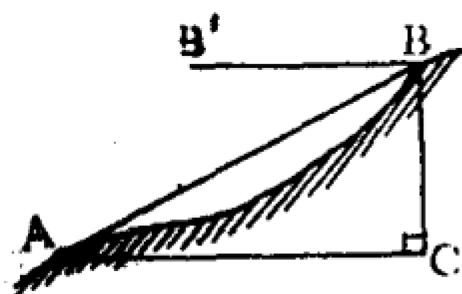


图 5-35

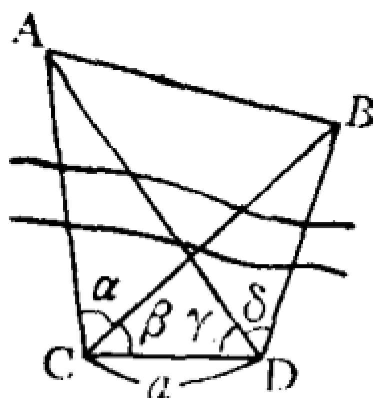


图 5-36

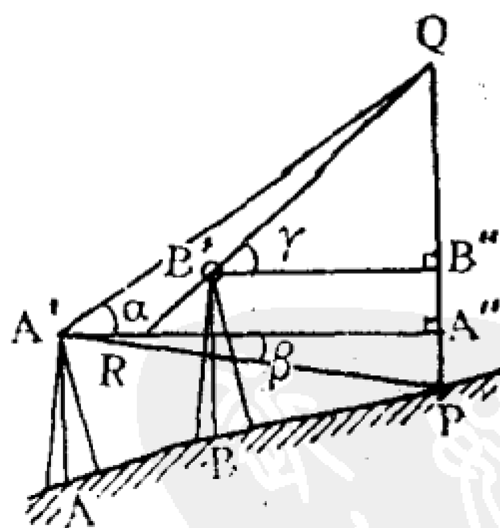


图 5-37

$$A'R=a-\frac{b}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

但 $$(A'R+RA'')\operatorname{tg}\alpha=RA''\operatorname{tg}\gamma=A''Q,$$

$$\therefore\qquad RA''=\frac{\left(a-\dfrac{b}{\operatorname{tg}\gamma}\right)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha}.$$

$$\therefore\qquad A''Q=\frac{\left(a-\dfrac{b}{\operatorname{tg}\gamma}\right)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(a\operatorname{tg}\gamma-b)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha}.$$

又
$$A''P=(A'R+RA'')\operatorname{tg}\beta=\frac{(a\operatorname{tg}\gamma-b)\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha},$$

$$\therefore\qquad PQ=A''Q+A''P=\frac{(a\operatorname{tg}\gamma-b)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha}.$$

例题3.(在视距测量上的应用) 如图 5—38 所示．为了测定 A, P 间的距离 D 及高度差 H，在测点 A 安设经纬仪，对准在 P 点直立的标尺上的 M 点 $(PM=s)$，测得上下视距线所夹部分 QR 的长度为 l，仰角为 α，仪器高度为 h．求这时的 D 和 H．其中，假定此经纬仪的视距乘数常量和视距加数常量分别为 k，c．

解 设通过 M 点而正交于 $A'M$ 的直线，与 $A'Q$，$A'R$ 的交点分别为 Q'，R'，这时有

$$Q'R'\approx QR\cos\alpha$$
$$=l\cos\alpha,$$

而且

$$A'M=Q'R'\cdot k+c$$
$$=kl\cos\alpha+c.$$

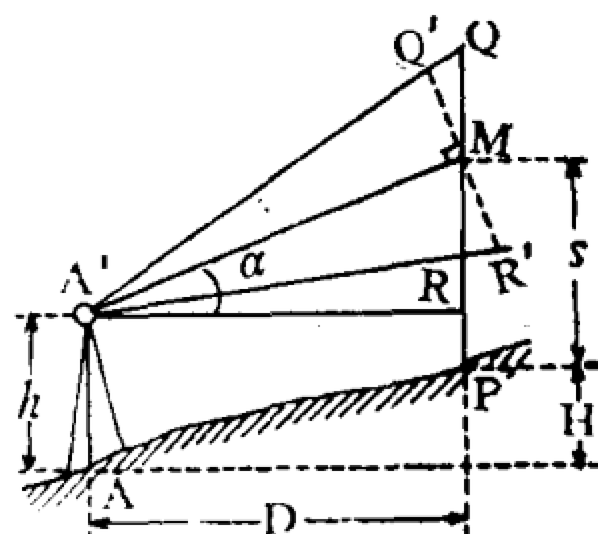


图 5-38

因此

$$D=A'M\cos\alpha=kl\cos^2\alpha+c\cos\alpha,$$
$$H=A'M\sin\alpha+h-s=kl\sin\alpha\cos\alpha+c\sin\alpha+h-s.$$

注意 $A'M=Q'R'\cdot K+c$ 叫做视距基本公式．上列 D，H 的式子叫做视距的一般公式．在计算 $\cos\alpha$，$\cos^2\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 等等时，应用视距表，视距尺，视距计算仪等等是方便的．


PDG

第六章 复数与向量

§1. 复数的基本性质

1·1 虚数单位

【定义】1. 虚数单位. 虚数 我们来引进一个不同于任何实数的新数，它的平方为-1，并用i表示，这个数i叫做虚数单位.故

$$i^2=-1.$$

一般地，$a>0$时，规定$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$.象$1+2i$，$3i$这样含有i的数，叫做虚数.

注意 等式$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$在$a>0$，$b<0$时不成立.因为，若令$b=-b'$($b'>0$)，则$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{-\frac{a}{b'}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b'}}i$，而

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b'}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b'}\,i}=\frac{\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b'}\,i^2}=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b'}}i.$$

其他情形，即$a>0$，$b>0$；$a<0$，$b<0$；$a<0$，$b>0$的情形，上式也成立.

1·2 复数的定义

【定义】2. 复数、实部、虚部、纯虚数 设a，b是两个实数，则形式如$a+bi$(i是虚数单位)的数叫做复数. a叫做此复数的实部，b叫做此复数的虚部.我们把复数$a+bi$用一个字母，如α，β，γ，…，z，w，…等来表示.

若令$z=a+bi$，则它的实部、虚部可分别用$R_e(z)$，$I_m(z)$来表示.特别地，当$b=0$时，复数$a+bi$表示实数；而$a=0$，$b\neq0$时，它变为bi，这种形式的复数叫做纯虚数.

注意 $a+bi$ 是实数单位 1 的 a 倍与虚数单位 i 的 b 倍的和.于是，复数具有 1，i 这样两个独立的部分，这就是复数这一名称的由来.

1·3 复数的四则运算

【定义】3. 复数的四则运算 设下面出现的a, b, c, d 是实数.复数的四则运算规定如下：

(1) **相等** $a+bi=c+di$ 当且仅当 $a=c, b=d$ 时成立.特别地，$a+bi=0$ 当且仅当 $a=0$，$b=0$ 时成立.

(2) **加法** $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

(3) **减法** $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

(4) **乘法** $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$；

(5) **除法** $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c^2+d^2\neq 0)$.

注意1. 对两个或两个以上的复数进行四则运算所得到的数，仍是复数.

2. 两个非实数的复数不能比较大小.

【定理】1. 对于三个复数 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$，$z_3=a_3+b_3i$，下列法则成立：

(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$， (加法交换律)

$z_1z_2=z_2z_1$； (乘法交换律)

(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$， (加法结合律)

$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$； (乘法结合律)

(3) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$；

$(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$. (分配律)

证明 设对于实数，交换律、结合律和分配律已经成立.

(1) 由【定义】3 中(2)，得

$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$，

$z_2+z_1=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)i$，

$\therefore \quad z_1+z_2=z_2+z_1$.

其次，由【定义】3 中(4)，得

$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$，

$z_2z_1=(a_2a_1-b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)i$，

$\therefore \quad z_1z_2=z_2z_1$.

(2) $(z_1+z_2)+z_3=\{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\}+(a_3+b_3)i$

$=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i$；

$$z_1+(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)+\{(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i\}$$
$$=(a_1+a_2+a_3)+(b_1+b_2+b_3)i,$$
$$\therefore\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

其次，$(z_1z_2)z_3=\{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\}(a_3+b_3i)$
$$=\{(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3\}+\{(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3\}i,$$
$$z_1(z_2z_3)=(a_1+b_1i)\{(a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+b_2a_3)i\}$$
$$=\{a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+b_2a_3)\}+\{a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3)\}i,$$

由于这两式的右端相等，所以
$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3).$$

(3) $z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)\{(a_2+a_3)+(b_2+b_3)i\}$
$$=\{a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)\}+\{a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3)\}i,$$
$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i+(a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+b_1a_3)i$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_2+b_1a_2+a_1b_3+b_1a_3)i,$$

上两式右端相等，因此
$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

其次，根据乘法的交换律，得
$$(z_2+z_3)z_1=z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3=z_2z_1+z_3z_1.$$ □

注意 根据乘法的交换律，有$(b+0i)(0+i)=(0+i)(b+0i)$，因此 $bi=ib$. 又，由【定义】3 及【定理】1显然，在复数的四则运算中，可以把 i 视为表示普通数的字母，但须记住 $i^2=-1$.

1·4 共轭复数

【定义】4. 共轭复数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 叫做互为共轭的复数.即 $a+bi$ 的共轭复数是$a-bi$，$a-bi$ 的共轭复数是 $a+bi$.复数 z 的共轭复数用 $\bar{z}$ 表示

【公式】1. (1) $\bar{\bar{z}}=z$;

(2) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$，$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$;

(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$;

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$(其中 $z_2\neq0$).

证明 设 $z=a+bi$，$z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$.

(1) $\overline{\bar{z}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$.

(2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}$

$=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$

$=(a_1-b_1i)+(a_2-b_2i)$

$=\bar{z}_1+\bar{z}_2$,

$\overline{z_1-z_2}=\overline{(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i}$

$=(a_1-a_2)-(b_1-b_2)i$

$=(a_1-b_1i)-(a_2-b_2i)$

$=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

(3) $\overline{z_1z_2}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)i$,

$\bar{z}_1\bar{z}_2=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+b_1a_2)i$,

∴ $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$,

$\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}=\dfrac{a_1-b_1i}{a_2-b_2i}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\dfrac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$,

∴ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$. □

【公式】2. 设 $z=a+bi$，则

$$a=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),\qquad b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}).$$

证明 $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$.

∴ $a=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$.

同样地，

$z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$,

∴ $b=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$. □

例 当 z 是实数时，有 $z=\bar{z}$，即 $z-\bar{z}=0$. 反之也对，当 z 是纯虚数时，有

$z+\bar{z}=0$. 反之也对.

【定理】2. 对于 x 的实系数二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

若复数 z 是它的一个根，则 $\bar{z}$ 也是它的根.

证明　令 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则 $f(z)=az^2+bz+c=0$. 因为各端取共轭复数时仍是相等的，所以有 $\overline{f(z)}=\overline{az^2}+\overline{bz}+\bar{c}$. 但是

$$\overline{f(z)}=f(\bar{z}),\qquad \bar{0}=0,$$

所以上一式变为

$$f(\bar{z})=a\bar{z}^2+b\bar{z}+c=0.$$

这表明 $\bar{z}$ 仍然是所给定的二次方程式的根.　□

注意　当 $f(z)$ 的系数是复数时，不一定有 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$, 因而上述【定理】2及下述【定理】3, 一般不成立.

【定理】3. 对于 x 的实系数的 n 次方程式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

若复数 z 是它的一个根，则 $\bar{z}$ 也是它的根.

证明　【定理】2的证明方法也适用于此定理的证明. 令

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

则 $f(z)=0$. 两端取共轭复数也相等，即 $\overline{f(z)}=f(\bar{z})=0$. 换言之，$\bar{z}$ 仍然是 $f(\bar{z})=0$ 的根.　□

【系】1. 对于 x 的实系数的方程式，若有虚根，则必为偶数个虚根.

证明　在 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 中，若 $z=a+bi$ 是 $f(x)=0$ 的一个虚根，则根据【定理】3, $\bar{z}=a-bi$ 仍然是此方程式的根. 从而有

$$\begin{aligned}f(z)&=\{x-(a+bi)\}\ \{x-(a-bi)\}\ g(x)\\&=\{(x-a)^2+b^2\}\ g(x).\end{aligned}$$

$g(x)$仍然是实系数的 $n-2$ 次多项式. 如此作下去 $f(x)$ 可分解成若干个实系数二次因式与若干个实系数的一次因式的积. 由于这里的二次因式的根是共轭的两个复数根，一次因式的根是实数，所以 $f(x)$ 的虚根的个数必为偶数.　□

【系】2. 对于 x 的实系数的奇次方程式，至少有一个实根.

证明　假设奇次方程式的全部根都是虚根，则虚根的个数 (m 重根算作 m 个根)等于方程的次数，则为奇数，这与【系】1矛盾. 因此至少有一个实根.

□

1·5　复数的模

【定义】5. 模　对于复数 $z=a+bi$，$\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做 z 的模，用 $|z|$ 表示．当 $b=0$ 时，$z=a$，这时 $|z|=\sqrt{a^2}=|a|$，即与实数的绝对值一致．

【定理】4. $z=0$ 与 $|z|=0$ 两者是等价的．

证明　若 $z=a+bi=0$，则 $a=b=0$，从而 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=0$．反之，若 $|z|=0$，则 $a=b=0$，从而 $z=0$．　□

【公式】3. (1)　$R_e(z)\leqslant|z|$，　$I_m(z)\leqslant|z|$；

(2)　$|z|=|\bar{z}|$；

(3)　$z\bar{z}=|z|^2$；

(4)　$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$；

(5)　$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$　　(其中 $z_2\neq0$)．

证明　z, z_1, z_2 的含义与【公式】1 的相同．

(1) 根据定义，$R_e(z)=a\leqslant\sqrt{a^2+b^2}=|z|$，

$I_m(z)=b\leqslant\sqrt{a^2+b^2}=|z|$．

(2) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，　$|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$，　∴　$|z|=|\bar{z}|$．

(3) $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$．

(4)
$$\begin{aligned}|z_1z_2|&=|(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i|\\&=\sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+b_1a_2)^2}\\&=\sqrt{a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2}\\&=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}=|z_1|\cdot|z_2|\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\left|\frac{z_1}{z_2}\right|&=\left|\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i\right|\\&=\sqrt{\frac{(a_1a_2+b_1b_2)^2+(b_1a_2-a_1b_2)^2}{(a_2^2+b_2^2)^2}}\\&=\sqrt{\frac{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}{(a_2^2+b_2^2)(a_2^2+b_2^2)}}\\&=\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2}{a_2^2+b_2^2}}=\frac{|z_1|}{|z_2|}.\end{aligned}$$
□

注意　(4)式可按下列方式证明:

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\overline{z_1z_2}=z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}=|z_1|^2|z_2|^2,$$

$$\therefore\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2|.$$

(5)式也同样地可证.

例　证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

解　$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2},$$

同样　$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2},$$

$$\therefore\quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})$$

$$=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

1·6　复数的极坐标形式(复数的三角表示式)

【定义】6. 复平面(高斯平面)、实轴、虚轴　如图6-1所示.过平面上的一点 O 作正交的坐标轴 $x'Ox$, $y'Oy$, 并让复数 $z=a+bi$ 对应于点 (a,b),因而平面上的全部点与全体复数成为一一对应.故平面上的点 (a,b) 表示一个复数.这时,此平面叫做复平面或高斯平面, x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴.

【定义】7. 极坐标形式. 模. 辐角　在复平面上取 O 点为原点,设 P 点表示复数 $z=a+bi$, 设 OP 的长度为 r, OP 与实轴正方向构成的夹角为 θ, 则

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta.$$

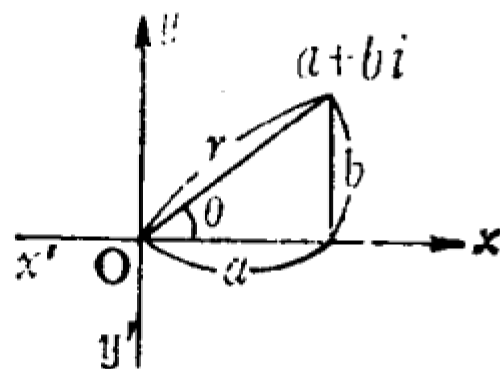


图 6-1

当用上列二式表示 a,b 时, $z=a+bi$ 可表为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

复数的这种表示形式, 叫做复数的极坐标形式(或三角式). r 是 z 的模,与【定义】5中的模 $|z|$ 是相同的,而 θ 叫做 z 的辐角, 用

$$\theta=\arg z$$

表示.为了把复数 $z=a+bi$ 用极坐标表示出来, 只要由

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\qquad(r>0),\qquad ①$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}\qquad ②$$

确定出 r, θ 即可.在这种情形下, θ 不是唯一确定的. 若 θ_0 是满足②式的一个 θ 值,则有

$$\theta=\theta_0+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

但是，θ 多半在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的范围内取值.

在 $z=0$ 的情形下，$r=0$，θ 可以是任意角，但一般不用 $z=0$ 的极坐标形式.

注意1. $a+bi$ 有时也写成 $a+ib$. 这是因为在上述极坐标形式下写 $\sin\theta i$ 就很有可能与 $\sin(\theta i)$ 混同.

2. 令 $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ 是方便的，但指数函数目前只在实数的情形下被定义，因而暂不怎么使用.

3. 代替②式，也可以根据 $\mathrm{tg}\theta=\dfrac{b}{a}$ 求出 θ，但这时因为 $-\pi<\theta\leqslant\pi$，θ 有两个解. 所以必须根据 (a,b) 处于哪一象限决定出 θ 的一个解.

【公式】4. 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

(1) $|z_1z_2|=r_1r_2$,

$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$;

(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{r_1}{r_2}$（其中 $z_2\neq0$），

$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$.

证明　(1) 应用三角函数的加法定理，得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\\&\qquad+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\},\end{aligned}$$

$\therefore\ |z_1z_2|=r_1r_2$，$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$.

(2)
$$\begin{aligned}\frac{1}{z_2}&=\frac{1}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}\\&=\frac{1}{r_2}(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)=\frac{1}{r_2}\Big\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{z_1}{z_2}&=z_1\times\frac{1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\Big\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\Big\}\\&=\frac{r_1}{r_2}\Big\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\Big\}.\end{aligned}$$

从而

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2. \qquad \square$$

注意 在计算复数的积，乘幂及商时，用极坐标形式是方便的。

1·7 复数的旋转

【定理】5. (旋转) 把复数 z 围绕原点 O 旋转 φ 角所得的新的复数 ω 是

$$\omega=z(\cos\varphi+i\sin\varphi)=ze^{i\varphi}。$$

证明 如图 6－2 所示，设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 ω 的模是 $|\omega|=r$，而辐角是 $\theta+\varphi$，因此

$$\omega=r\left\{\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)\right\}$$

$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$=z(\cos\varphi+i\sin\varphi)。$$

根据 1.6 的注意 2，上式可用 $\omega=ze^{i\varphi}$ 表示。 $\square$

【定理】6. 把复数 z 围绕 z_0 恰恰旋转 φ 角，新的复数 ω 是。

$$\omega=z_0+(z-z_0)(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$=z_0+(z-z_0)e^{i\varphi}.$$

证明 如图 6—3 所示，将坐标轴平移，得到以 z_0 为原点的新坐标系，则 z,ω 相对于新的坐标系各变为

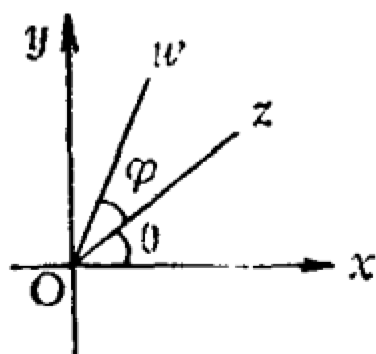


图 6-2

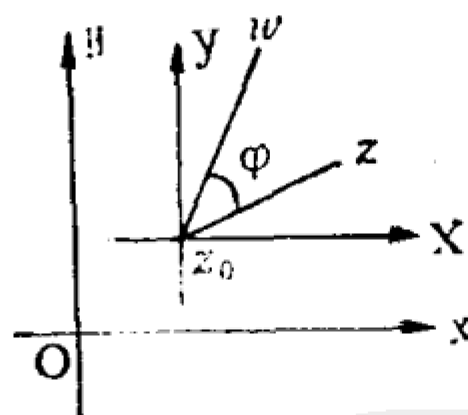


图 6-3

$$Z=z-z_0,$$

$$W=\omega-z_0。$$

把 Z 绕新原点 z_0 旋转 φ 角时，得到 W，因而根据【定理】5，有

$$W=Z(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

再把新原点移回到 O 点，得

$$\omega - z_0 = (z - z_0)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

即
$$\omega = z_0 + (z - z_0)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

或
$$\omega = z_0 + (z - z_0)e^{i\varphi}$$ □

【系】（相似旋转） 设把复数 z 围绕 z_0 旋转 φ 角后，所得的复数为 z_1，将线段 $\overline{z_0z_1}$ 在 z_0 到 z_1 方向上延长至 k 倍后，端点表示的复数是 ω，则

$$\omega = z_0 + k(z - z_0)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z_0 + k(z - z_0)e^{i\varphi}.$$

例 把复数 z 围绕原点在正方向(反时针旋转方向)转过直角时，所得的复数 ω 是

$$\omega = z\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = iz.$$

在负方向(顺时针方向)转过直角时，所得的复数 ω 是

$$\omega = z\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -iz.$$

§2.　复数与图形

2·1　复数的四则运算的图示

【定理】1. ($z, -z, \bar{z}, -\bar{z}$ 的图示)对于复数 z，表示 $-z$ 的点是 z 关于原点 O 的对称点，表示 $\bar{z}$ 的点是 z 关于实轴的对称点，表示 $-\bar{z}$ 的点是 z 关于虚轴的对称点。如图 6—4 所示。

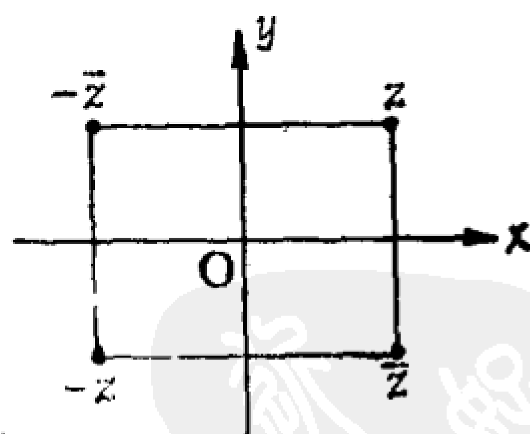


图 6-4

证明 设 $z = a + bi$，则由

$$-z = -a - bi,$$
$$\bar{z} = a - bi,$$
$$-\bar{z} = -a + bi$$

可直接得证。 □

【定理】2.（和的图示） 表示两个复数 z_1, z_2 的和($z_1 + z_2$)的点，是以 Oz_1，Oz_2(O 为原点)为两边的平行四边形的第四顶点，如图 6—5 所示。

证明 设 $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$，$z = z_1 + z_2$，则

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

设由 z_2, z_1, z 向实轴作垂线，垂足分别取为 P, M, N, 由 z_1 向 zN 所作垂线的垂足为 Q，则有

$$OP=z_1Q=a_2,\quad zQ=zN-QN=b_2=z_2P,$$

因此 $\triangle OPz_2\cong\triangle z_1Qz$,

$$Oz_2 \underline{\mathbin{/\!/}} z_1z.$$

从而,四边形 Oz_1zz_2 为平行四边形。因而，$z=z_1+z_2$ 是以 Oz_1, Oz_2 为两边的平行四边形的第四顶点。 □

【定理】3.（差的图示） 表示两个复数 z_1, z_2 的差(z_1-z_2)的点，是以 oz_1 为对角线，Oz_2 为一边的平行四边形的第四顶点。如图 6—6 所示。

证明 因为 $z=z_1-z_2=z_1+(-z_2)$,所以由【定理】2, z 是以 Oz_1 与 $O(-z_2)$ 为两边的平行四边形的第四顶点.但 $Oz \underline{\mathbin{/\!/}} z_2z_1$，因此，四边形 Ozz_1z_2 是平行四边形.从而，表示 $z=z_1-z_2$ 的点是以 Oz_1 为对角线，Oz_2 为一边的平行四边形的第四顶点。 □

【定理】4.（积的图示） 设 E 点表示实数 1，则表示两个复数 z_1, z_2 的积 $z=z_1z_2$ 的点，是与 $\triangle OEz_1$ 同向相似的 $\triangle Oz_2z$ 的顶点 z，如图6—7 所示。

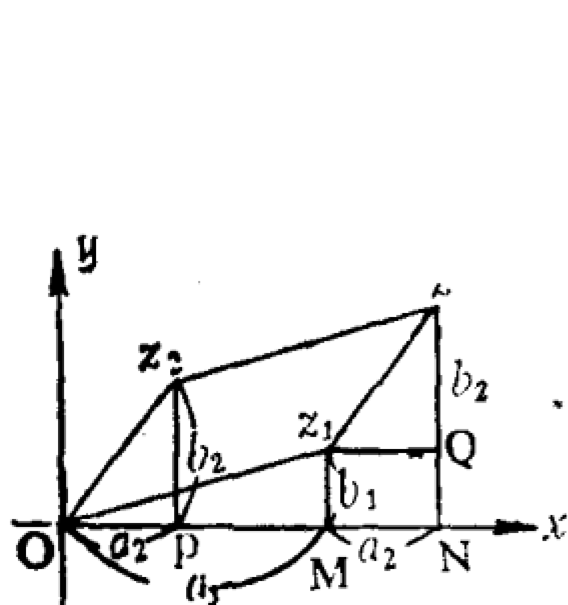


图 6-5

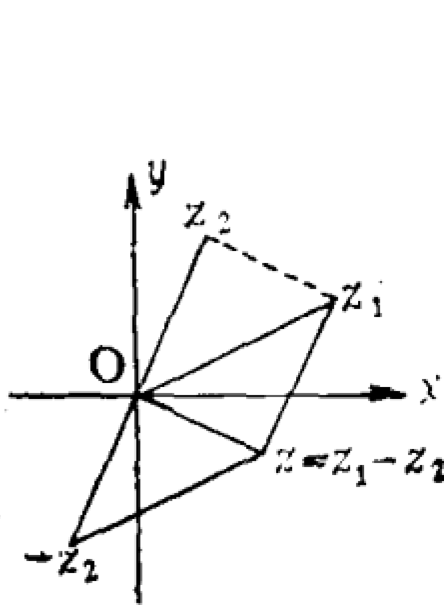


图 6-6

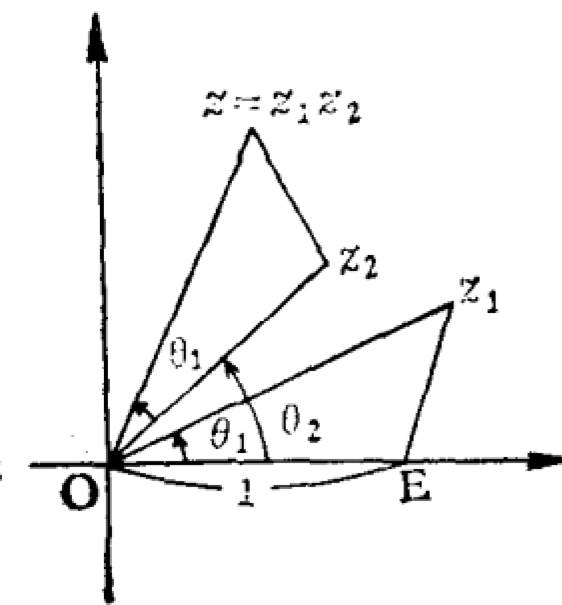


图 6-7

证明 把两个复数 z_1, z_2 用极坐标形式表示,

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则由§1.【公式】4 的证明(1),得

$$z=z_1z_2=r_1r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\}.$$

因此 $|z_1|:1=|z|:|z_2|$ ①

又因 $\angle EOz=\theta_1+\theta_2$, $\angle EOz_2=\theta_2$,

所以 $\angle z_2Oz=\theta_1=\angle EOz_1$, ②

从而，由①，②可知，$\triangle OEz_1\backsim\triangle Oz_2z$。 □

【定理】5.（商的图示） 设E点表示实数1，则表示两个复数 z_1，z_2 的商 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$（$z_2\neq 0$）的点，是与 $\triangle OEz_2$ 同向相似的 $\triangle ozz_1$ 的顶点 z，如图 6—8 所示。

证明 由于 $z_2z=z_1$，故根据【定理】4，$\triangle OEz_2\backsim\triangle Ozz_1$。 □

注意 借助§1.【公式】4的证明(2)，并把 z 写作 $z=z_1\times\dfrac{1}{z_2}$，则也可以应用【定理】4来证明本定理。

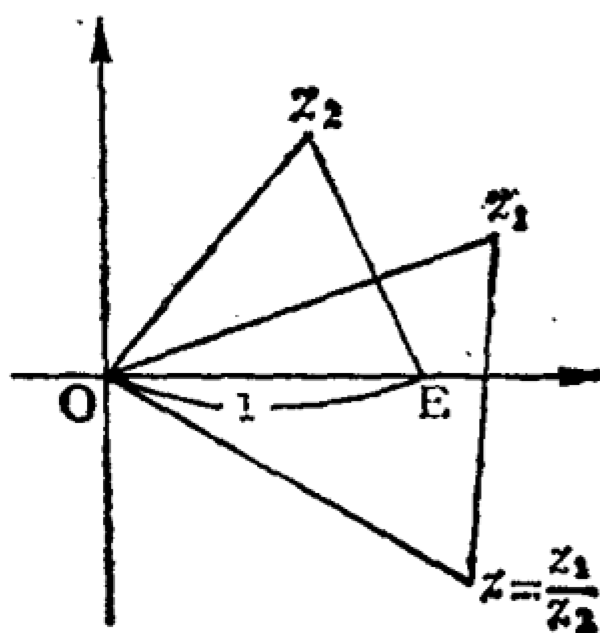


图 6–8

例 $|z_2-z_1|$表示两点z_1，z_2之间的距离。原因是，根据【定理】3，图 6—6 的四边形 Ozz_1z_2 是平行四边形，因而 z_1 与 z_2 的距离等于$|z|=|z_1-z_2|$。

【公式】 对于两点 z_1，z_2，下列不等式成立：

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

此不等式叫做**三角不等式**.

证明 首先，当 O，z_1，z_2 不在一直线上的情形下，设 $z=z_1+z_2$，则由【定理】2知，以 O，z_1，z_2，z 为顶点的四边形是平行四边形.由初等几何学已知，"三角形的二边之和大于第三边，二边之差小于第三边"。因此，在$\triangle Oz_1z$中便有

$$\big||z_1|-|z_2|\big|<|z_1+z_2|<|z_1|+|z_2|.$$

其次，如果 O，z_1，z_2 位于一直线上，则当 z_1，z_2 位于 O 的一侧时，不等式的右方两端变为相等，而当 z_1，z_2 位于 O 的两侧时，左方两端也变为相等，从而，综上所述，有

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$ □

2·2　复数的性质

【定理】6.（内分点） 设 z 点把连接二点 z_1，z_2 的线段划分成 $m:n\ (m, n>0)$ 的两段，则

$$z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.$$

证明　如图 6-9 所示，在坐标平面上，设点 (x, y) 把连接点 (a_1, b_1) 与点 (a_2, b_2) 的线段划分成 $m:n$，则

$$x=\frac{ma_2+na_1}{m+n},$$

$$y=\frac{mb_2+nb_1}{m+n}.$$

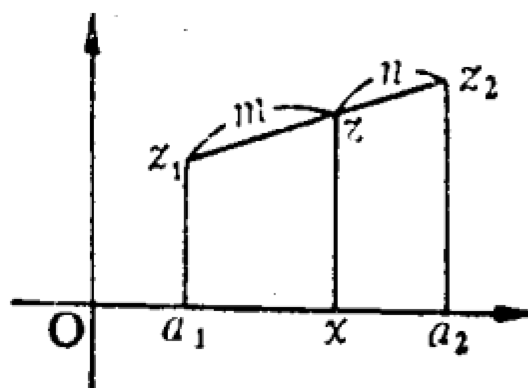


图 6-9

现设 $z_1=a_1+b_1i, z_2=a_2+b_2i$，则把线段 z_1z_2 划分成 $m:n$ 的点是

$$z=x+yi=\frac{ma_2+na_1}{m+n}+\frac{mb_2+nb_1}{m+n}i$$

$$=\frac{m(a_2+b_2i)+n(a_1+b_1i)}{m+n}$$

$$=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.$$

□

注意　$m:n<0$ 时，z 变为外分点；又 $m=0$ 时，$z=z_1$；$n=0$ 时，$z=z_2$。

例　设 z 点是两点 z_1, z_2 连线的中点，则

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

因为 $m:n=1$.

【定理】7.（三角形的重心） 设三角形的三顶点为 z_1, z_2, z_3，重心为 z，则

$$z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

证明　点 z_2 和点 z_3 连线的中点是 $\frac{z_2+z_3}{2}$。重心 z 是把连接 z_1 和 $\frac{z_2+z_3}{2}$ 的

线段划分成 2:1 的点，因此

$$z=\frac{2\times\frac{z_2+z_3}{2}+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

□

例 一般，设 z 是 n 个点 z_1，$z_2,\cdots,z_n$ 的重心，则

$$z=\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}.$$

【定理】8. 当 $a\neq0$ 时，线段 Oa 的垂直平分线的方程式，可表示为

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar a}=1.$$

证明 设 z 是线段 Oa 的垂直平分线上的任意一点，则线段 Oz 的长度与线段 az 的长度相等，因此，$|z|^2=|z-a|^2$，即

$$z\bar z=(z-a)(\bar z-\bar a)$$

成立．把上式化简便得．

$$\frac{z}{a}+\frac{\bar z}{\bar z}=1.$$

反之，也容易证明，满足该方程的点 z 必在线段 Oa 的垂直平分线上．

□

【定理】9．(直线方程式) 通过两点 z_1,z_2 的直线方程式是

$$(\bar z_1-\bar z_2)z-(z_1-z_2)\bar z+z_1\bar z_2-\bar z_1z_2=0.$$

或用行列式表示时，即

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar z_1 & 1\\ z_2 & \bar z_2 & 1\\ z & \bar z & 1\end{vmatrix}=0.$$

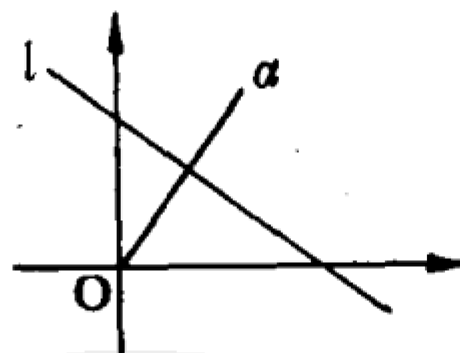


图 6-10

证明 如图 6-10 所示．设所求的直线为 l，原点 O 关于直线 l 的对称点为 a，则由前一个定理知，直线 l 上的点 z 满足方程

$$z\bar z=(z-a)(\bar z-\bar a),$$

即 $$\bar a z+a\bar z=a\bar a,\qquad ①$$

由于 z_1，z_2 都是此直线上的点，因此有

$$\bar a z_1+a\bar z_1=a\bar a,\qquad ②$$

$$\bar{\alpha} z_2+\alpha \bar{z}_2=\alpha \bar{\alpha}. \quad ③$$

由①，②，③消去α，$\bar{\alpha}$，可得

$$(\bar{z}_1-\bar{z}_2)z-(z_1-z_2)\bar{z}+z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2=0.$$

若将上式用行列式表示时，即得

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

□

【定理】10.(圆的方程式)

(1) 以z_0为中心，r为半径的圆的方程式是

$|z-z_0|=r$ 或 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2$;

(2) 以z_0为中心，r为半径的圆的内部是

$|z-z_0|<r$ 或 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)<r^2$;

对于还包含圆周的情形，有

$|z-z_0|\leqslant r$ 或 $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)\leqslant r^2$

(3) 圆的一般方程式是

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+c=0.$$

其中，$a\neq 0$ 且a与c是实数.

证明 (1) 因圆心z_0与圆周上任意一点z之间的距离是r，故由【定理】5后面的例子得

$$|z-z_0|=r.$$

将两端平方，并应用§1.【公式】3(3)，得

$$(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2.$$

(2) 设z为圆内一点，因圆心z_0与z的距离小于r，故

$$|z-z_0|<r.$$

其他表示式也容易证明.

(3) 一般，圆的方程式可表示如下:

$$a(x^2+y^2)+2bx+2dy+c=0.$$

其中$a\neq 0$且a,b,c,d是实数.

现设$z=x+yi$，则$\bar{z}=x-yi$，因而对x，y求解得

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

把以上两式代入前面的方程式，改写后得

$$az\bar{z}+b(z+\bar{z})-id(z-\bar{z})+c=0,$$

即　　$$az\bar{z}+(b-di)z+(b+di)\bar{z}+c=0.$$

在上式中，令 $b+di=\beta$，则化为

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+c=0.$$ □

注意　圆的方程式，当 $a=0$ 时，变为直线的方程式.

2·3 映　　射

【定义】 映射(函数).定义域.值域.象.原象　对于集合 X 的每一元素 x，在集合 Y 中都有唯一的元素 y 与之对应，则把这个对应叫做由 X 到 Y 的映射或(单值)函数，表示成

$$f: X\to Y \text{ 或 } X\xrightarrow{f}Y.$$

也经常用 f 简单地表示.在这个映射中，集合 X 叫做定义域.若 Y 的元素 y 根据映射 f 对应于 X 的元素 x，则 y 叫做 x(在 f 下)的象，写成 $y=f(x)$.一切象的集合叫做值域.而 x 叫做 y 的原象，用 $x=f^{-1}(y)$ 表示.

在本节中，考察 $f:Z\to W$ 时，假设 Z 及 W 都是复平面上点的集合，Z 的元素用 z，W 的元素用 w 表示.

【定理】11. 映射 $w=z+\alpha$ 使点 z 描绘的图形对应于点 w 描绘的图形，其中 w 点是由 z 点出发，在 $o\alpha$ 方向平移长度 $|\alpha|$ 后得到的，如图 6-11 所示.

又，这个映射使圆对应于圆.

证明　由【定理】2 显然. □

【定理】12. 映射 $w=\alpha z, \alpha\neq0$ 使点 z 描绘的图形与它围绕原点旋转 $\arg\alpha$，再伸长(缩短)$|\alpha|$ 倍后所得的图形对应.如图 6-12 所示.

又，这个映射使圆对应于圆.

证明　根据【定理】4，由图 6-12 有

$$\triangle OE\alpha\backsim\triangle Ozw,$$

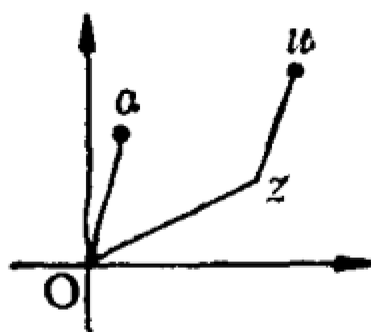


图 6-11

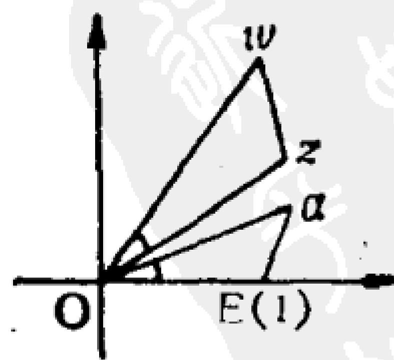


图 6-12

由此容易得证.　□

【定义】2.　反演．反演中心．反演半径．反演形　以定点 O(O 点不一定是原点)为中心，R 为半径作圆，在连接圆所在平面上一点 P 和 O 的直线上取 Q 点(图 6—13)，使

$$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=R^2,$$

P 与 Q 的这种对应叫做反演，O 叫做反演中心，R 叫做反演半径。

现设 P 所描绘的图形为 F，P 的反演 Q 所描绘的图形是 F'，则 F' 叫做 F 的反演形。

【定义】3.　单位圆　以原点为中心，1 为半径的圆，叫做单位圆。

【定理】13. 映射 $\omega=\frac{1}{z}$ 使点 z 所描绘的图形变成它关于单位圆的反演形且对于实轴的对称图形。

又，这个映射使圆对应于圆。

证明　如图 6—14 所示，设 P 点表示点 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$Q$ 是 P 关于单位圆的反演，则表示 Q 的复数是

$$\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta).$$

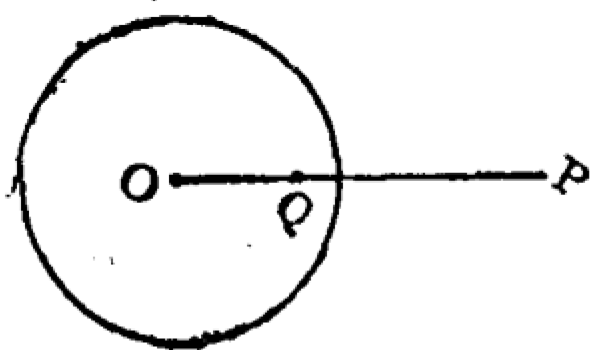


图 6-13

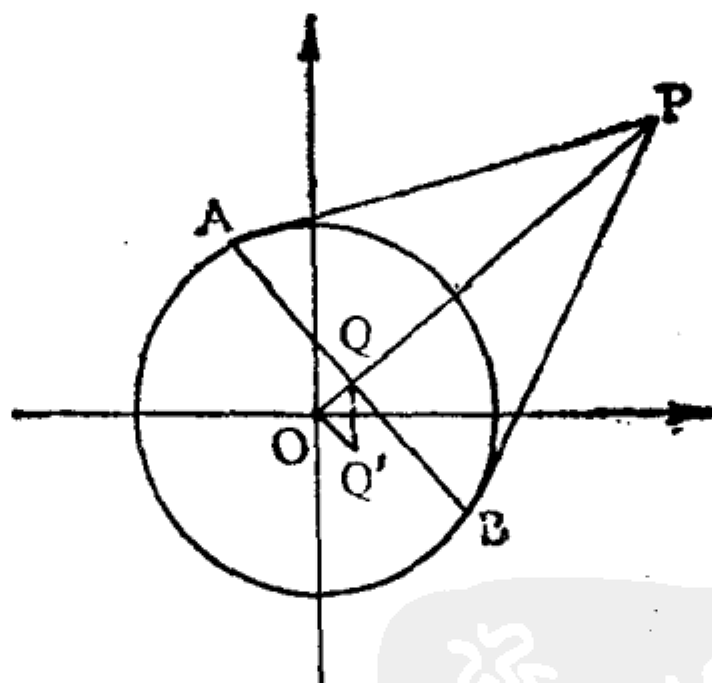


图 6-14

点 Q 关于实轴的对称点 Q' 的复数表示式为

$$\frac{1}{r}\left\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right\},$$

因此根据 § 1.【公式】4(2)的证明，有

$$\frac{1}{r}\left\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right\}=\frac{1}{z}.$$

定理的前半部分得证。在同一平面上，为了由点 z 求点 ω，可以按下面的方法进行.表示 z 的点 P 位于单位圆外($|z|>1$)时，由 P 向单位圆引切线 PA，PB，设 AB 与 OP 的交点为 Q。若令 Q 关于 x 轴的对称点为 Q'，则 Q' 表示$\omega=\frac{1}{\bar{z}}$。如果表示 z 的点 P 位于单位圆内，那末把前一情形的 P 与 Q 交换来考察，从 P 向 OP 作垂线，与圆相交于两点，通过这两点作圆的切线，设其交点为 Q，则 Q 关于 x 轴的对称点 Q' 表示$\frac{1}{z}$。

其次证明，当 z 描绘出一个圆时，ω 也描绘出一个圆。根据【定理】10 (3),一般地，圆的方程式是

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+c=0.$$

在 $a=0$ 时，圆变为直线，所以直线也可当作圆的特殊情形。现若 $\omega=\frac{1}{z}$，即 $z=\frac{1}{\omega}$，则上述方程式变为

$$c\omega\bar{\omega}+\beta\omega+\bar{\beta}\bar{\omega}+a=0.$$

这表示圆或直线。若直线都当作半径为无限大的圆，则定理的后半部得证。 □

【定义】4.线性函数（线性变换） 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为常数，且 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$，形式如

$$\omega=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

的函数，叫做线性函数或线性变换。其中，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$ 是使 ω 不为常数的条件。

【定理】14. 经过线性函数 $\omega=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$，$\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$，$z$ 平面上的圆被映射成 ω 平面上的圆。这个性质叫做**圆圆对应**。

证明 设 $\gamma\neq0$，z 不通过$-\frac{\delta}{\gamma}$。这时所给函数变为

$$\omega=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}z+\frac{\beta}{\gamma}}{z+\frac{\delta}{\gamma}}=\frac{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}}{z+\frac{\delta}{\gamma}}+\frac{\alpha}{\gamma}.$$

因此，若令 $\alpha_1=\frac{\alpha}{\gamma}$，$\alpha_2=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}$，$\alpha_3=\frac{\delta}{\gamma}$. 则

$$\omega=\omega_1+\alpha_1,\ \omega_1=\alpha_2\omega_2,\ \omega_2=\frac{1}{\omega_3},\ \omega_3=z+\alpha_3.$$

这些映射的组合就得到线性函数 ω，根据【定理】11，12，13，它们都将圆映射为圆，所以 z 与 ω 形成圆圆对应。 □

2·4 二直线的夹角

【定理】15. 如果连接 z_0 及 z_1 的直线与连接 z_0 及 z_2 的直线之间的夹角为 θ，则

$$\theta=\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}.$$

证明 如图 6—15 所示。若平行移动线段 z_0z_1 及 z_0z_2 以使 z_0 到达原点 O，则 z_1 及 z_2 分别映象成 z_1-z_0，z_2-z_0。因而，线段 z_0z_1 与 z_0z_2 的夹角 θ，与连接 o、z_1-z_0 的线段及 o，z_2-z_0 的线段之间的夹角相等。因此

$$\theta=\arg(z_2-z_0)-\arg(z_1-z_0)$$
$$=\arg\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}$$ □

【系】 如图 6—16所示，若连接 z_1、z_2 的直线与连接 z_3、z_4 的直线之间的

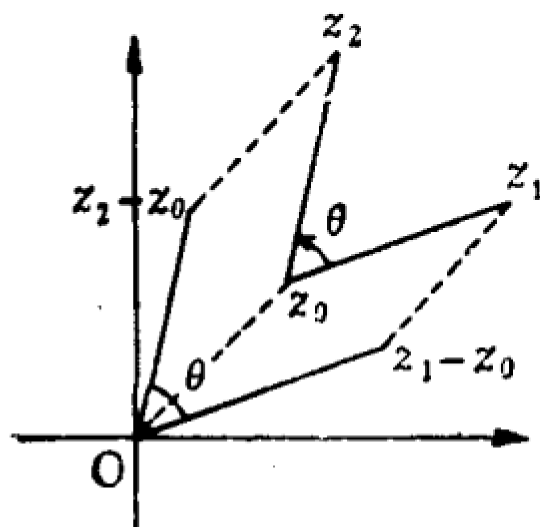


图 6-15

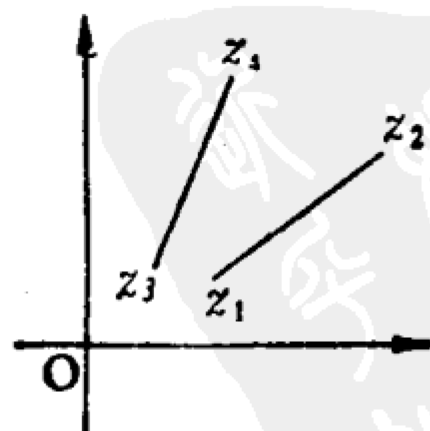


图 6-16

夹角为 θ，则

$$\theta=\arg\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}.$$

证明 仿照前一定理的证明，将线段 z_1z_2 及 z_3z_4 平行移动以使 z_1 与 z_3 到达原点即可。 □

【定理】16.（平行条件，垂直条件）

由两条有向线段 z_1z_2 与 z_3z_4 所确定的二直线，

(1) 平行的充分必要条件是

$$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=\text{实数};$$

(2) 垂直的充分必要条件是

$$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=\text{纯虚数}.$$

证明 (1) 必要条件

令 $\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则由【定理】15，

$$\arg\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=\theta.$$

因此，$\theta=0$ 或 $\theta=\pm\pi$.这时有

$$\sin\theta=0,\quad \cos\theta=\pm1.$$

将它们代入 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，得

$$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=\pm r=\text{实数}.$$

充分条件 若 $\dfrac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=$实数，则必须有

$\sin\theta=0$，即 $\theta=n\pi(n=0,\ \pm1,\cdots)$,因此二直线平行.

(2) 必要条件 应用与(1)同样的符号，因为二直线垂直，所以 $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$,从而$\cos\theta=0,\sin\theta=\pm1$.于是有

$$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$=\pm ri=$纯虚数$(r\neq 0)$.

充分条件　若$\frac{z_2-z_1}{z_4-z_3}=$纯虚数，则必须有

$$\cos\theta=0 \quad 即 \quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}, \quad 从而，二直线垂直.$$ □

2·5 在图形上的应用

【定理】17.（三角形的相似） 两个三角形$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle\omega_1\omega_2\omega_3$同方向相似的充分必要条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1},$$

或

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

证明 必要条件　如图 6—17 所示，若$\triangle z_1z_2z_3\backsim\triangle\omega_1\omega_2\omega_3$，则对应的一个角(例如$\angle z_2z_1z_3$与$\angle\omega_2\omega_1\omega_3$)相等且夹此角的两个边的比相等.由此得

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\arg\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1},$$

$$\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right|,$$

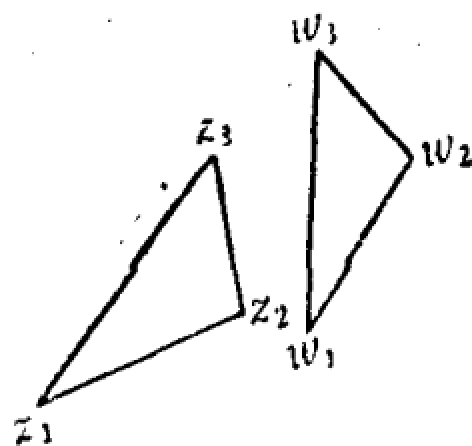


图 6-17

即

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}$$

成立.若把上式用行列式表示，则得

$$\begin{vmatrix} z_1 & \omega_1 & 1 \\ z_2 & \omega_2 & 1 \\ z_3 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

充分条件　若$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}$，则由于

$$\arg\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\arg\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1},$$

$$\left|\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\left|\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right|,$$

因此，对应的一个角$\angle z_2z_1z_3$与$\angle\omega_2\omega_1\omega_3$相等且夹这个角的两个边的比相等.于是，$\triangle z_1z_2z_3\backsim\triangle\omega_1\omega_2\omega_3$. □

注意 条件式也可用$\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}=\frac{\omega_3-\omega_2}{\omega_1-\omega_2}$代替.

例 $\triangle\alpha\beta\gamma$是正三角形的充分必要条件是

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0.$$

原因是使$\triangle\alpha\beta\gamma$是正三角形的条件为$\triangle\alpha\beta\gamma\backsim\triangle\beta\gamma\alpha$，因此由【定理】17，有

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & 1\\ \beta & \alpha & 1\\ \gamma & \alpha & 1\end{vmatrix}=0,$$

即

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta=0.$$

【定理】18.（三角形的反相似） $\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle\omega_1\omega_2\omega_3$反方向相似的充分必要条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{\omega_3}-\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_2}-\overline{\omega_1}},$$

或

$$\begin{vmatrix}z_1 & \overline{\omega_1} & 1\\ z_2 & \overline{\omega_2} & 1\\ z_3 & \overline{\omega_3} & 1\end{vmatrix}=0.$$

证明 如果作三角形$\omega_1\omega_2\omega_3$关于实轴对称的三角形$\overline{\omega_1}\overline{\omega_2}\overline{\omega_3}$，则$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle\omega_1\omega_2\omega_3$反方向相似的充分必要条件是，$\triangle z_1z_2z_3$与$\triangle\overline{\omega_1}\,\overline{\omega_2}\,\overline{\omega_3}$在同方向相似.从而，由【定理】17推得所求的条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{\overline{\omega_3}-\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_2}-\overline{\omega_1}},$$

或

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{\omega_1} & 1 \\ z_2 & \overline{\omega_2} & 1 \\ z_3 & \overline{\omega_3} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

□

【定理】19.（三点共线） 三点 z_1，z_2，z_3 位于同一直线上的充分必要条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\text{实数}.$$

证明 假设有二直线 z_1z_2，z_1z_3 交于一点 z_1。如果 z_1z_2 与 z_1z_3 平行，则 z_1，z_2，z_3 便位于一条直线上。而由【定理】16(1)，两直线平行的充分必要条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\text{实数}.$$

因此定理得证。 □

【定理】20.（四点共圆） 四点 z_1，z_2，z_3，z_4 位于同一圆周上的充分必要条件是

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\cdot\frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}=\text{实数}.$$

证明 如果四点位于同一圆周上，且 z_1，z_2 在弦 z_3z_4 的同一侧，如图 6—18 所示，则 $\angle z_3z_1z_4=\angle z_3z_2z_4$。而由【定理】15，

$$\angle z_3z_1z_4=\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4},$$

$$\angle z_3z_2z_4=\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}.$$

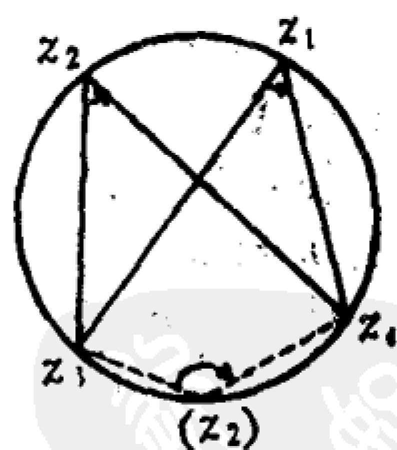


图 6-18

从而可化为

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}-\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=0,$$

即
$$\arg\left\{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right\}=0.$$

因为辐角为 0 的复数是实数，所以

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=\text{实数}.$$

如果 z_1，z_2 位于弦 z_3z_4 的两侧，则由于

$$\angle z_3z_1z_4-\angle z_3z_2z_4=\pm\pi,$$

因此

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}-\arg\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=\pm\pi,$$

即

$$\arg\left\{\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right\}=\pm\pi.$$

辐角为 $\pm\pi$ 的复数也是实数，从而

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}:\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}=\text{实数}.\ ^*$$

□

§3. 棣莫佛定理

3·1　棣莫佛定理

【定理】1.（棣莫佛定理） 当 n 是正整数时，下列等式成立

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

证明 首先，用数学归纳法证明下式

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n).\qquad ①$$

由 §1.【公式】4(1) 的证明，得

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

故当 $n=2$ 时，①式是成立的。

现在设 $n=k$ 时，①式成立，即

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k).$$

两端乘以 $(\cos\theta_{k+1}+i\sin\theta_{k+1})$，得

---

* 关于条件的充分性，可利用下列性质得证：

如果 $\angle z_3z_1z_4=\angle z_3z_2z_4\pm n\pi$ ($n=0$ 或 1)，

则 z_1，z_2，z_3，z_4 共圆。——译注

$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots(\cos\theta_{k+1}+i\sin\theta_{k+1})\\
&=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\cos\theta_{k+1}-\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\sin\theta_{k+1}\\
&\quad+i\left\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\sin\theta_{k+1}+\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\cos\theta_{k+1}\right\}\\
&=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_{k+1})+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k+1}).
\end{aligned}
$$

即 $n=k+1$ 时也成立。从而①式得证。

若在①式中令 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$，则化为

$$(\cos\theta+i\sin n\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \qquad \square$$

注意 如果一开始就假定 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_n=\theta$，那么，证明将变得更简单。

【系】1. 当 n 为负整数时，上述定理也成立。

证明 若令 $n=-m$，$m>0$，则

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+i\sin\theta)^n&=(\cos\theta+i\sin n\theta)^{-m}\\
&=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin n\theta)^m}\\
&=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}\\
&=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)(\text{§ 1.【公式】4(2)})\\
&=\cos n\theta+i\sin n\theta. \qquad \square
\end{aligned}
$$

【系】2. $(\cos\theta-i\sin n\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$.

其中，n 为任意整数。

证明 当 $n=0$ 时，上式显然成立。若 n 是非零的任意整数，则由(定理)1和【系】1，有

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta-i\sin\theta)^n&=\left\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right\}^n\\
&=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)\\
&=\cos n\theta-i\sin n\theta. \qquad \square
\end{aligned}
$$

3·2 棣莫佛定理和倍角公式

【公式】 (1) 二倍角公式

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$,

$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$;

(2) 三倍角公式

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

证明　(1) 根据棣莫佛定理，有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta,$$

而由上式左端计算得　$\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$，
令两端的实部、虚部分别相等，便得

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

(2) 根据棣莫佛定理，有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta,$$

而由左端计算得

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

令两端的实部、虚部分别相等，便得

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

再 应用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，对上列二式进行变换，便得到所证公式。 □

注意　同样地，在棣莫佛定理中，令 $n=4, 5, \cdots, n$，便可得到四倍角，五倍角，…，n 倍角正弦、余弦的公式。

3·3　二项方程

【定理】2. 设复常数 a 的极坐标形式为 $a=\delta(\cos\varphi + i\sin\varphi)$，二项方程

$$x^n = a$$

的根为 z_k，则

$$z_k = \sqrt[n]{\delta}\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right) \quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$= \sqrt[n]{\delta}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\omega^k.$$

其中，$\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

证明　设 z 为所给方程的一个根，其极坐标形式为 $z=r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则在方程左端应用棣莫佛公式，可写成

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \delta(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

令两端的实部和虚部分别相等，可得

$$\left.\begin{array}{l} r^n\cos n\theta=\rho\cos\varphi \\ r^n\sin n\theta=\rho\sin\varphi \end{array}\right\} \qquad ①$$

把上面两式平方、相加，并注意到 $r>0$，$\rho>0$，则得

$$r^{2n}=\rho^2,$$

即
$$r=\sqrt[n]{\rho}. \qquad ②$$

把②代入①，得

$$\left.\begin{array}{l} \cos n\theta=\cos\varphi \\ \sin n\theta=\sin\varphi \end{array}\right\} \qquad ③$$

满足③式的 θ 的一般角是

$$n\theta=2k\pi+\varphi,$$

即
$$\theta=\frac{2k\pi+\varphi}{n}. \ (k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

θ 值具有无限多个。但是我们将证明，对于 θ 的所有值，不同的 z 值恰好只有 n 个。设用 z_k 表示对于 k 所确定的 z 值。

首先，设 k 是在 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 中的一个整数，m 是任意整数，则

$$z_{k+mn}=r\left(\cos\frac{2(k+mn)\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2(k+mn)\pi+\varphi}{n}\right)$$

$$=r\left(\cos\frac{2k\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}\right)=z_k.$$

因此我们证明了，对 k 加(减) n 的整数倍，z_k 的值不变。从而可知，z_k 中互不相同的值不多于 n 个。

其次来证明，当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，对应的 z_k 值都互不相同。取任意的 p，q，使 $0\leqslant p$、$q\leqslant n-1$，且 $p\neq q$。现假定 $z_p=z_q$，则

$$r\left(\cos\frac{2p\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2p\pi+\varphi}{n}\right)=r\left(\cos\frac{2q\pi+\varphi}{n}+i\sin\frac{2q\pi+\varphi}{n}\right),$$

即
$$\cos\frac{2(p-q)\pi}{n}+i\sin\frac{2(p-q)\pi}{n}=1.$$

由上式得

$$\cos\frac{2(p-q)\pi}{n}=1,\quad \sin\frac{2(p-q)\pi}{n}=0.$$

亦即必须有

$$\frac{2(p-q)\pi}{n}=2m\pi \quad (m\text{ 是任意整数}),$$

去分母，并用 2π 除两端，可得

$$p-q=mn。$$

但是根据假定，有 $0<|p-q|\leqslant n-1$,

因此矛盾。从而不能有 $z_p=z_q$（反证法）。由此可知，对于 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 的 z_k 都不同。

根据以上事实，定理得证。 □

注意 1. z_k 可取在一个圆周上。作出以原点为中心，$\sqrt[n]{\rho}$ 为半径的圆，在此圆周上辐角为 $\frac{\varphi}{n}$ 的复数是 z_0，取 z_0 为一个分点，把圆周 n 等分，各分点 $z_k(k=1, 2, \cdots, n-1)$ 从 z_0 按反时针方向依次是 $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$，图 6—19 是 $n=6$ 的情形。

2. 常数 α 没有被表示成极坐标形式时，可以用 § 1.[定义]7 中的方法改写成极坐标形式。

【系】 若二项方程 $x^n=1$ 的根是 z_k，则

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\omega^k(k=0,1,2, \cdots, n-1)。$$

证明 因为相对于前面的定理，$\alpha=1=\cos 0+i\sin 0$，所以如令 $\rho=1$，$\theta=0$，则可得所求的结果.在这种情形下，z_k 都位于单位圆上，且 $z_0=1$，如图 6–20 所示. □

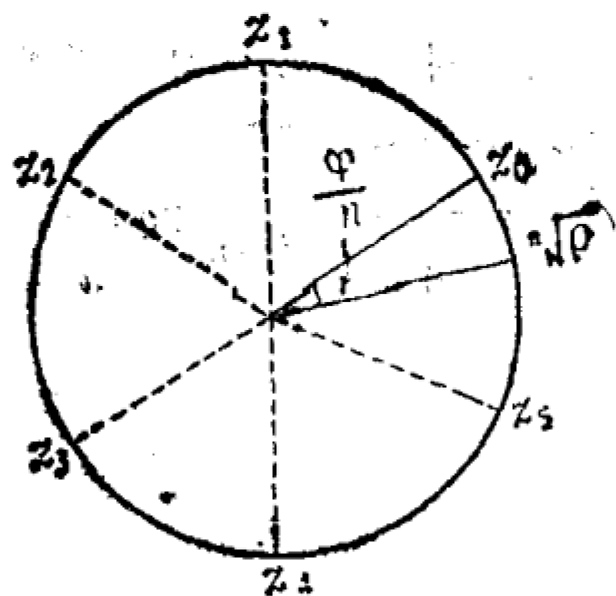


图 6–19

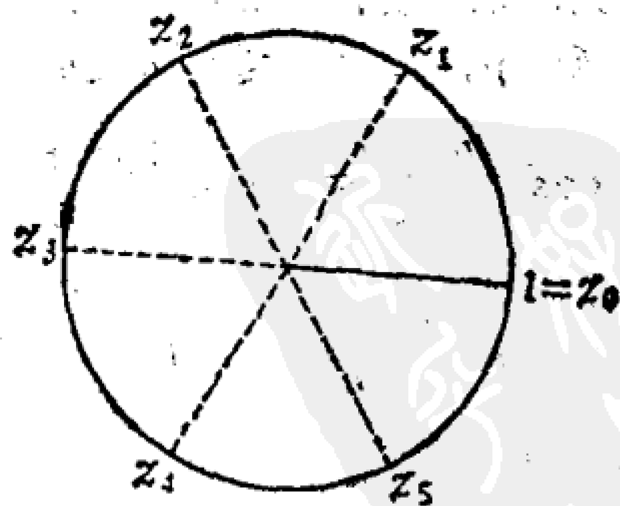


图 6–20

例题 设在 $z^5=1$ 的根中，不等于 1 的一个根为 ω，试证明

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0.$$

证明 由于 ω 是 $z^5=1$ 的一个根，故

$$\omega^5=1 \text{ 且 } 1-\omega\neq 0.$$

如果建立等式

$$(1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)=1-\omega^5,$$

则由于右端等于 0，且 $1-\omega\neq 0$，故必有

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0. \quad \square$$

§ 4. 向　　量

4·1 向　　量

【定义】1. 有向线段 具有方向的线段叫做有向线段.在有向线段AB和BA之间，具有下列关系

$$AB=-BA.$$

【定义】2. 标量．向量．向量的大小．向量的方向．向量的始点．向量的终点 某些量，象长度、时间、温度、质量、能量等等，其量值只用一个数值就能决定，这样的量叫做标量．与此相反，象力和速度等，不仅具有大小而且有方向，这种具有大小和方向的量叫做向量.在平面上(或在空间中)，以带有箭头的有向线段表示向量，把这个线段的长度取为向量的大小，箭头的方向取为向量的方向.

现取一箭头由 A 向 B 指向的有向线段 AB，如图 6-21 所示，它代表一个向量，A 点叫做向量的始点，B 点叫做向量的终点，这个向量用 $\overrightarrow{AB}$表示.有时也用一个字母来表示向量，例如用黑体字母 $\mathbf{a}$ 或 $\vec{a}$ 等等．向量的大小用 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\mathbf{a}|$，$|\vec{a}|$ 等等表示.

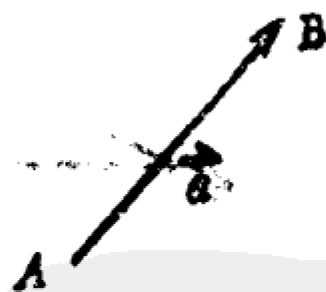


图6-21

注意 下面除 4·7 外，只考虑平面上的向量.

4·2 向量的相等、和、差及向量与实数的积

【定义】3 向量的相等 大小相等方向相同的两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$叫做相等的向量 用$\vec{a}=\vec{b}$表示

【公式】1. $\vec{a}=\vec{a}$；　　(反射律)

若 $\vec{a}=\vec{b}$，则 $\vec{b}=\vec{a}$；　　(对称律)

若 $\vec{a}=\vec{b}$，$\vec{b}=\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$.　　(传递律)

证明　由向量的定义直接可证. □

【系】　把一个向量平行移动后所得的向量与原向量相等.

证明　因为把一个向量平行移动时，其大小和方向都不变，故得证. □

【定义】4. **零向量**　大小为0方向不定的向量，叫做零向量，用 $\vec{0}$ 表示.

【定义】5. **向量的和**　设有两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$. 现作以 A 为始点 B 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 使它等于 $\vec{a}$，然后从 B 作向量 $\overrightarrow{BC}$ 使它等于 $\vec{b}$，如图 6-22 所示. 这时，以 A 为始点，C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}$，叫做两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的和，用 $\vec{a}+\vec{b}$ 表示. 并规定

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a},\quad \vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$$

【公式】2. (1)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；　　(交换律)

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.　　(结合律)

证明　(1) 如图 6-23所示，取以 A 为始点的两个向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，使它们分别等于 $\vec{a}$，$\vec{b}$. 以 A, B, D 为三个顶点作平行四边形 $ABCD$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},$$

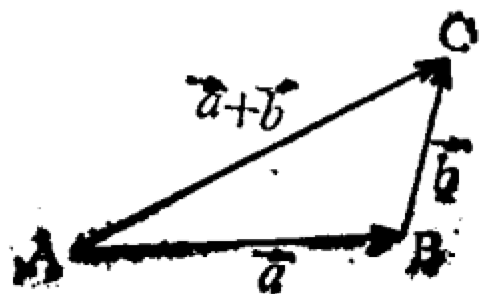


图6-22

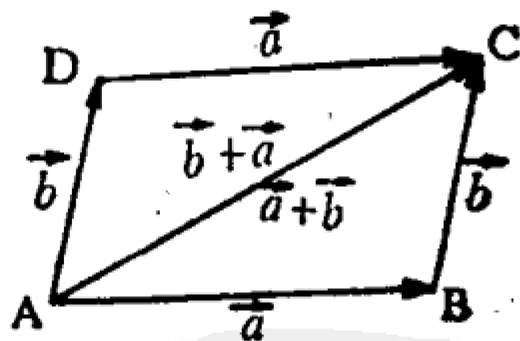


图6-23

因此

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

(2) 如图 6-24 所示，令

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\quad \overrightarrow{BC}=\vec{b},\quad \overrightarrow{DC}=\vec{c},$$

则

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

$\therefore\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$ □

注意 对多于三个向量的情形，类似的公式也成立.

【定义】6. 向量的差 与向量$\vec{a}$大小相等方向相反的向量，用$-\vec{a}$表示. 两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的差，定义为$\vec{a}+(-\vec{b})$，用$\vec{a}-\vec{b}$表示.

如图6-25所示，设$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.在$CA$的延长线上取一点$D$，使$AD=CA$，则$\overrightarrow{AD}=-\vec{b}$. 因而，如果以$AB$、$AD$为两个邻边作平行四边形$ADEB$，就有

$$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}.$$

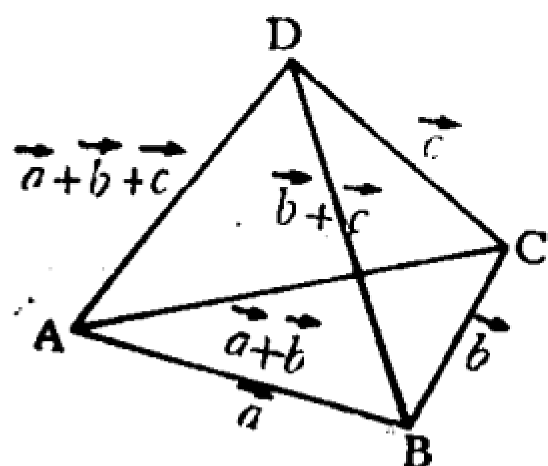


图6-24

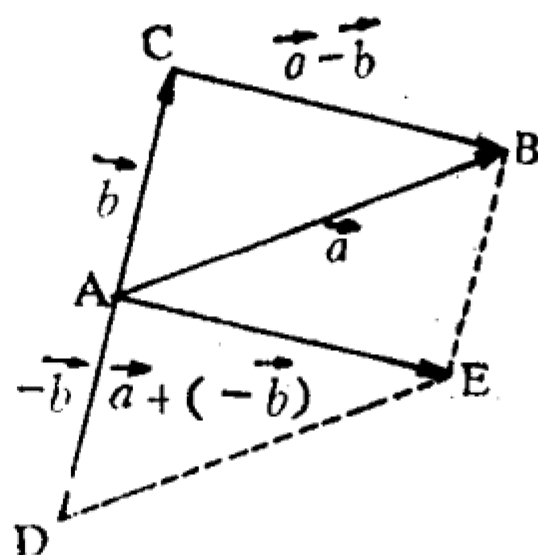


图6-25

但因四边形$AEBC$也是平行四边形，故

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}.$$

即向量$\overrightarrow{CB}$就表示两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$之差$\vec{a}-\vec{b}$.

【公式】3. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

证明 由定义显然. □

【定义】7. 向量与实数的积 实数m与向量$\vec{a}$的积规定如下：

(1) 当$m>0$时，$m\vec{a}$是大小为$m|\vec{a}|$，方向与$\vec{a}$相同的向量.

(2) 当$m<0$时，$m\vec{a}$是大小为$|m||\vec{a}|$，方向与$\vec{a}$相反的向量.

(3) 当$m=0$时，令$m\vec{a}=0$，即$0\vec{a}=0$.

【公式】4. 设m, n是任意的实数，则

(1) $(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$　　(结合律)

(2) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

(3) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$　　(分配律)

证明　(1),(2) 由定义直接可知.

(3) 当 $m=0$ 时，两端都是零向量，因此是明显的.

现在证明 $m>0$ 的情形.

如图 6—26 所示。设 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, 则 $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$。现在作△$ABC$的相似三角形 ADE, 其相似比为 m, 则

$$\overrightarrow{AD}=m\vec{a},\ \overrightarrow{DE}=m\vec{b},\ \overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AC}=m(\vec{a}+\vec{b})$$

及

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=m\vec{a}+m\vec{b}。$$

从而

$$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}。$$

当 $m<0$ 时也同样可证。 □

4·3　向量的性质

【定义】8. 位置向量　固定一点 O,以 O 点作始点 A 点作终点的向量 $\overrightarrow{OA}$, 叫做点 A 的位置向量。通常把原点 O 作为始点。

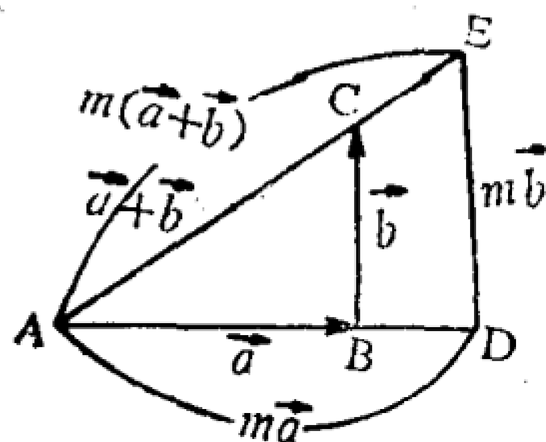


图 6-26

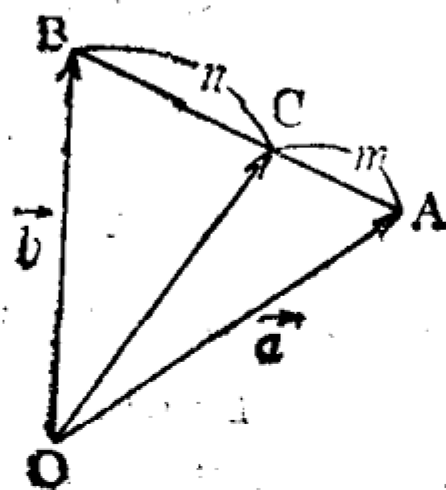


图 6-27

【定理】1. (内分点) 如图6—27所示,设有以一点 O 作始点的两个位置向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, 点 C 将线段 AB 划分为

$$AC:CB=m:n(m,\ n>0),$$

则

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}。$$

证明　由于$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$，

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，

因此根据题意，有

$$m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=n(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})。$$

又因为$m+n>0$，故由上式得

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}，$$

□

例　在上述定理中，若C是AB的中点，则

$$\overrightarrow{OC}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

注意　与§2.【定理】6的注意事项一样，在此定理中，若$m:n<0$，便得到外分点，若$m=0$，C点与A点重合。若$n=0$，C点与B点重合。若$m+n=0$，C点变为直线AB上的无限远点。

【定理】2.（三角形的重心）　设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$是以一点$O$为始点的三个位置向量，$G$是$\triangle ABC$的三个顶点$A$，$B$，$C$的重心，则

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

证明　如图6—28所示，设M是AB的中点，则G位于CM上，且满足下列关系：

$$CG:GM=2:1,$$

从而，根据【定理】1，有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right),$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

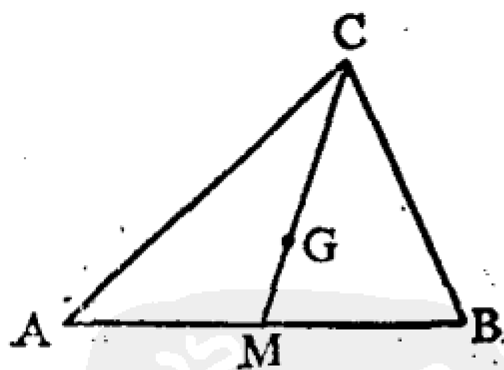


图 6-28

□

注意　一般地，设$\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}_2$，…，$\overrightarrow{OA_n}=\vec{a}_n$是以$O$点为始点的$n$个位置向量，$G$是$n$个点$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的重心，则

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{n}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n\right).$$

【定义】9.（线性相关） 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是平面上的三个向量，如果存在不全为0的常数l，m，n，使

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0},$$

则称向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$是线性相关的。

常数l，m，n不能全为0，但其中某一个可以是0。例如，设$n=0$，则条件式变为

$$l\vec{a}+m\vec{b}=\vec{0}.$$

因此，两个向量的线性相关也可同样地定义。

例1. 设$\vec{c}$为任意的向量。若选取向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，使$\vec{a}=m\vec{c}$，$\vec{b}=(-l)\vec{c}$（$l\neq0$，$m\neq0$），如图6—29，则

$$l\vec{a}+m\vec{b}=0,$$

因此，$\vec{a}$，$\vec{b}$线性相关。

例2. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$是具有不同方向的两个向量。若$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$如图6—30，则

$$\vec{a}+\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0},$$

因此，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$线性相关。

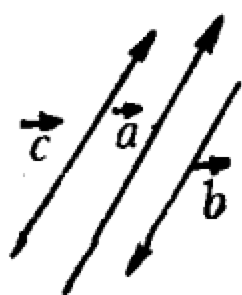


图 6-29

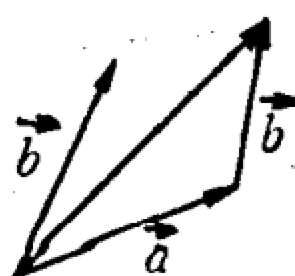


图 6-30

【定理】3. 两个线性相关的非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，可以通过平行移动移到同一直线上。

证明　因为$\vec{a}$，$\vec{b}$是线性相关的，所以有不同时为0的实数m，n，使

$$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}.$$

如果$m=0$，则必有$n\vec{b}=\vec{0}$，但因$\vec{b}\neq0$，故必须有$n=0$。这与线性相关的假

定矛盾。从而必须有 $m \neq 0$。于是，可表示为

$$\vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b},$$

即$\vec{a}$是$\vec{b}$与一个实数的积。因此可通过平行移动，把两个向量移到同一直线上。 □

【定义】10. **线性无关**　对于两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$及实数m，n，如果

$$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$$

必须$m=n=0$成立，则称向量$\vec{a}$，$\vec{b}$是线性无关的。

【定理】4. 两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，当它们不互相平行时，就是线性无关的。

证明　假定对于实数m，n，

$$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$$

成立。若$m \neq 0$，则$\vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$线性相关，亦即$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，这与假定矛盾，因此必须有$m=0$。这时$n\vec{b}=0$。但因$\vec{b} \neq 0$，故必须$n=0$，根据以上事实，$m=n=0$，$\vec{a}$和$\vec{b}$线性无关。 □

【定理】5. 若以同一点作始点的两个向量$\vec{a}$，$\vec{b}$线性无关，则由$\vec{a}$，$\vec{b}$所确定的平面上的任一向量$\vec{c}$，可用下列形式表示

$$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}.$$

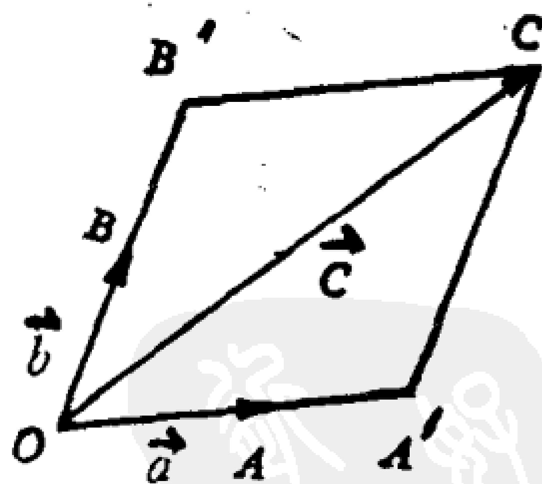


图6-31

【证明】　如图 6—31 所示，设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$是以$O$为始点的两个向量，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$是把$\vec{c}$平行移动到以$O$为始点的向量。在$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$或其延长线上分别取$A'$，$B'$，使$OA'CB'$形成平行四边形，$OC$构成它的对角线，这时存在实数$m$，$n$，使$\overrightarrow{OA'}=m\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=n\overrightarrow{OB}$。根据向量和的定义，有

$$\vec{c}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=m\vec{a}+n\vec{b},$$

因此，定理得证。 □

【证明】6. **(三点共线)**　设$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$是以同一点O作始点的三

个向量，则三点 A，B，C 位于同一直线上的充分必要条件是

$$\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b},$$

其中 t 是实数。

证明　必要性　因为 A，B，C 位于同一直线上，所以存在实数 t，使

$$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BA}. \quad ①$$

又

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}, \quad ②$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b} \quad ③$$

把②、③代入①得

$$\vec{c}-\vec{b}=t(\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\therefore \vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}.$$

充分性　假设 $\vec{c}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ 成立。

由此式得

$$\vec{c}-\vec{b}=t(\vec{a}-\vec{b}),$$

即

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{BC}=t(\overrightarrow{BA}).$$

因此向量 $\overrightarrow{BC}$ 和 $\overrightarrow{BA}$ 线性相关. 由于这两个向量是以 B 点作为公共始点，故由【定理】3 知，A，B，C 位于同一直线上. □

注意　这个定理的条件可用下列条件代替.

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0,\ l+m+n=0.$$

4·4　拉米定理

【定理】7．三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 构成闭合三角形的充分必要条件是

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0.$$

证明　如图 6-32 所示，设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{BC}$，则

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

由于三角形闭合，故必须 $\overrightarrow{OC}=\vec{0}$,

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0.$$

反之，如果这个条件成立，则$\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，这三个向量必构成闭合三角形. □

[定理]8.（拉米定理） 设作用于同一点 O 的三个力 $\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$，$\vec{f_3}$ 平衡．若 $\vec{f_2}$和$\vec{f_3}$，$\vec{f_3}$和$\vec{f_1}$，$\vec{f_1}$和$\vec{f_2}$的夹角分别为 θ_1，θ_2，θ_3如图 6-33，则

$$\frac{|\vec{f_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\vec{f_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\vec{f_3}|}{\sin\theta_3}$$

成立.

证明　由于三力$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$，$\vec{f_3}$平衡，故$\vec{f_1}+\vec{f_2}$与$\vec{f_3}$必须平衡．从而，$\vec{f_1}+\vec{f_2}$与$\vec{f_3}$是大小相等方向相反的向量，即

$$\vec{f_1}+\vec{f_2}=-\vec{f_3},$$
$$\vec{f_1}+\vec{f_2}+\vec{f_3}=0.$$

因此，根据前一定理可知，$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$，$\vec{f_3}$ 作成闭合三角形(图 6-34)．这时与三边$\vec{f_1}$，$\vec{f_2}$，$\vec{f_3}$相对的角分别是 $\pi-\theta_1$，$\pi-\theta_2$，$\pi-\theta_3$，因此对这个三角形应用正弦定理，得

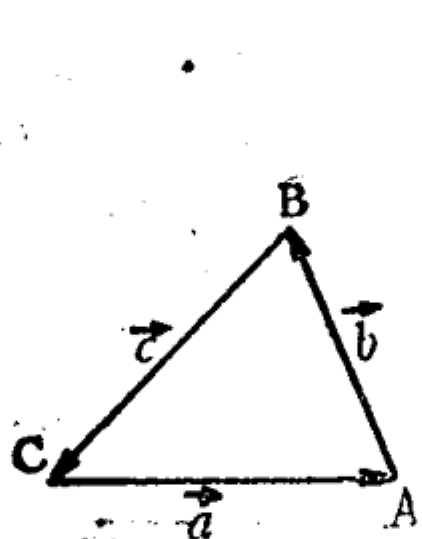


图 6-32

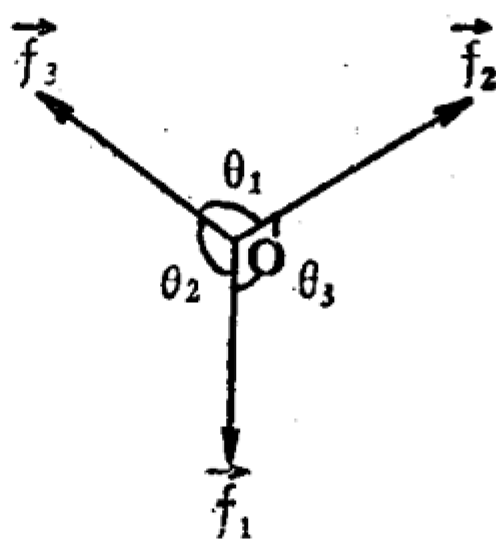


图 6-33

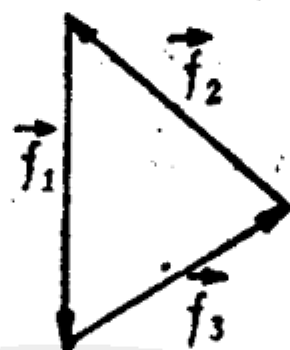


图 6-34

$$\frac{|\vec{f_1}|}{\sin(\pi-\theta_1)}=\frac{|\vec{f_2}|}{\sin(\pi-\theta_2)}=\frac{|\vec{f_3}|}{\sin(\pi-\theta_3)},$$

即

$$\frac{|\vec{f_1}|}{\sin\theta_1}=\frac{|\vec{f_2}|}{\sin\theta_2}=\frac{|\vec{f_3}|}{\sin\theta_3}.$$

□

4·5 向量的分量

【定义】11 向量的分量 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$是平面上的向量．$A$，$B$两点的坐标分别为$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，如图 6-35．令

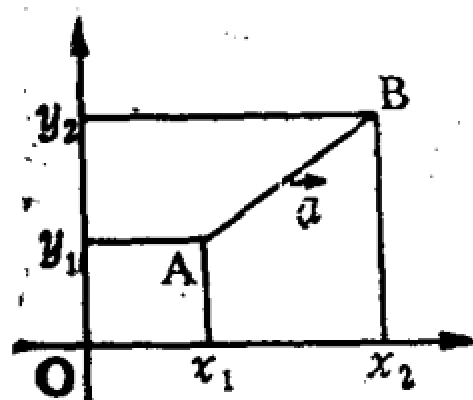


图 6-35

$a_1=x_2-x_1$，$a_2=y_2-y_1$，则a_1，a_2分别叫做向量$\vec{a}$的x分量，y分量，且记

$$\vec{a}=(a_1, a_2).$$

如果把AB平行移动使向量$\overrightarrow{AB}$的始点A移到原点O，则B点的坐标(a_1,a_2)就表示$\overrightarrow{AB}$的分量．

【公式】5. (1) $m\vec{a}=(ma_1, ma_2)$；

(2) 若$\vec{a}=(a_1,a_2)$，$\vec{b}=(b_1,b_2)$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1\ \ a_2+b_2),$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2);$$

(3) 设θ为$\vec{a}=(a_1,a_2)$与x轴正向的夹角，则

$$a_1=\left|\vec{a}\right|\cos\theta,\ a_2=\left|\vec{a}\right|\sin\theta,\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

证明 由定义显然． □

【定义】12. 单位向量·基本向量 大小等于1的向量叫做单位向量．在x轴上，指向x轴的正向的单位向量用$\vec{i}$表示，在y轴上指向y轴正向的单位向量用$\vec{j}$表示．这样的$\vec{i}$，$\vec{j}$叫做基本向量或基本单位向量.* $\vec{i}$，$\vec{j}$有时也用$\vec{e_1},\vec{e_2}$表示．

设向量$\vec{a}$的分量为a_1,a_2，则$\vec{a}$可表示成

$$a=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}\ (图\ 6\text{-}36)$$

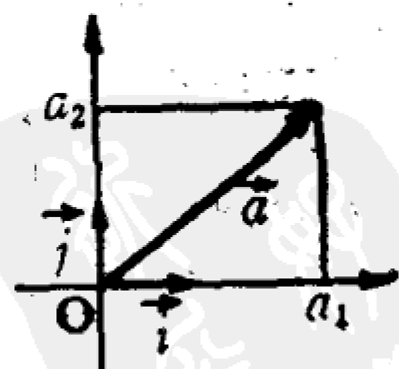


图 6-36

另外，当$\vec{a}=a_1\vec{i}+a\vec{j}$，

$\vec{b}=b_1\vec{j}+b_2\vec{j}$时，有

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{i}$$

及

$$\vec{a}-\vec{b}=(a-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j},$$

* 又称坐标单位向量．——译注

4·6 向量的内积

【定义】13. 向量的内积(数量积)* 设 θ 为两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 间的夹角，则 $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ 叫做 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的内积或数量积，用 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 或 $(\vec{a},\vec{b})$ 表示.** 当 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之中至少有一个是零向量时，规定为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

【公式】6. (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$；

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；　(交换律)

(3) $\left.\begin{aligned}&\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\&(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\end{aligned}\right\}$　(分配律)

(4) 设 m 为实数，则

$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b})$.

证明 (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$.

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，$\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta$，

$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

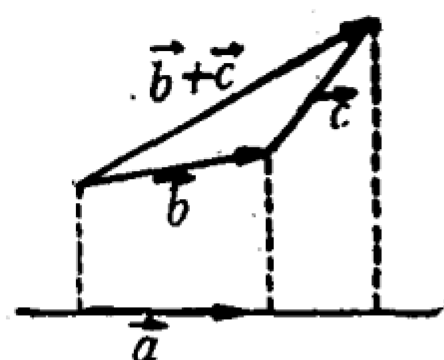


图 6-37

(3) 如图 6—37所示，设 $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{b}+\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角分别为 α，β，γ，则

$$|\vec{b}|\cos\alpha+|\vec{c}|\cos\beta=|\vec{b}+\vec{c}|\cos\gamma,$$

两端乘以 $|\vec{a}|$，得

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha+|\vec{a}|\,|\vec{c}|\cos\beta=|\vec{a}|\,|\vec{b}+\vec{c}|\cos\gamma.$$

但是

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos\beta=\vec{a}\cdot\vec{c},$$
$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|\cos\gamma=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}),$$

---

* 又称点积、标量积.

** 也有人用 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ 或 $(\vec{a},\vec{b})$ 表示 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之间的夹角，注意使用此记号的场合.——译注

因此得

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

其次，应用交换律(2)，得

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

第二式得证．

(4) 首先，当 $m>0$ 时

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,\ m\vec{a}\cdot\vec{b}=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$
$$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=|\vec{a}||m\vec{b}|\cos\theta=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$
$$\therefore\ (m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b}).$$

当 $m<0$ 时．

$$(m\vec{a})\cdot\vec{b}=|m\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\theta)$$
$$=-m|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\theta)=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta;$$
$$m\vec{a}\cdot\vec{b}=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$\vec{a}\cdot(m\vec{b})=|\vec{a}||m\vec{b}|\cos(\pi-\theta).$$
$$=-m|\vec{a}||\vec{b}|(-\cos\theta)=m|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,$$
$$\therefore\ (m\vec{a})\cdot\vec{b}=m\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(m\vec{b}).$$

当 $m=0$ 时，等式显然成立． □

注意 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 不是向量，所以不能讨论 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的内积．但 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 是实数，因此可以讨论 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的数乘 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$．

例 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$$=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

解 根据分配律、交换律及【公式】6，(1)有

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}^2$$

【公式】7. (1) 若 θ 是两个向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 的夹角，则

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2}};$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$。

证明 (1) 平行移动两个向量，使其始点移到原点。设 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$, 如图 6—38。则由三角形的余弦定理得

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta,$$

即 $$\overline{AB}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta。$$

另一方面，因为 A, B 的直角坐标分别是 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的分量 $(a_1,\ a_2)$, $(b_1,\ b_2)$, 因此

$$\overline{AB}^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2,$$

由上述二式得

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}。$$

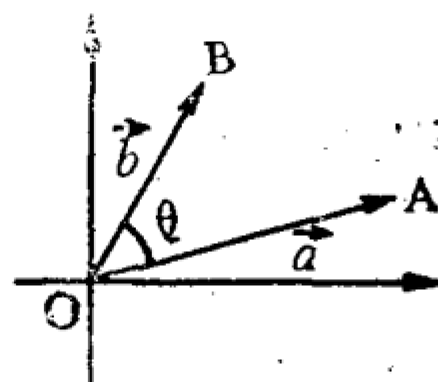


图 6—38

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\ |\vec{b}|\cos\theta$, 因此由(1)直接得到

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2。$$ □

【定理】9. 两个非零向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ 正交的充分必要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=0。$$

证明 由于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 正交，所以它们的夹角是直角，从而根据【公式】7有

$$a_1b_1+a_2b_2=0。$$

反之，若 $a_1b_1+a_2b_2=0$, 则 $\cos\theta=0$, 因此 $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, 从而 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 正交。 □

【公式】8. 设 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 为基本向量，则

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0。$$

证明　由【公式】6 与【定义】12 知，$\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|^2=1$，$\vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|^2=1$。又因为 $\vec{i}$，$\vec{j}$ 正交，故由【定理】9 得

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{i}=0。$$

□

4.7　空间向量

空间向量也可以和平面向量同样地讨论。4.1，4.2 中的定义，公式对空间向量也照样成立。

【定义】14．线性无关·线性相关　对于三个向量(也可以不是三个) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 及实数 l，m，n，如果

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$$

当且仅当 $l=m=n=0$ 时成立，那末向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 就叫做是线性无关的。如果对于不全为 0 的 l，m，n，上式成立，那末向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 就叫做是线性相关的。

【定理】10． 以同一点作始点的三个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，如果不在同一平面上，则此三向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关。

证明　现设 $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=0$　成立，若 l，m，n 中至少有一个，例如 l，不为 0，则有

$$\vec{a}=-\frac{m}{l}\vec{b}-\frac{n}{l}\vec{c}。$$

根据【定理】5 知，$\vec{a}$ 位于由 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 决定的平面上，从而 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 同在一个平面上，这与假设矛盾。因此必须有 $l=0$，在原式中令 $l=0$，变为

$$m\vec{b}+n\vec{c}=0$$

这时 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 不平行。因为，如果 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 平行，则由于共有始点，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 便位于同一直线上，从而 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 位于同一平面上，这也与假设矛盾。因而，根据【定理】4，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 必须线性无关，于是 $m=n=0$。

这便证明了 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关。　□

【定理】11． 若具有同一始点的三个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关，则任意的空间向量 $\vec{d}$ 可表示成下列形式

$$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}。$$

证明　如图 6—39 所示，平行移动向量 $\vec{d}$ 使其始点移到 0 点，且令

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，

$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OP}$。

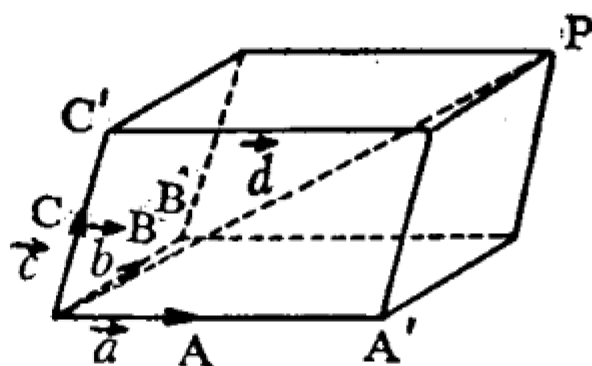


图 6—39

由向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 中的每两个作平面并过 P 作这些平面的平行平面。则由上述这些平面构成了平行六面体，OP是它的一条对角线。从而在图 6—39 中存在 l，m，n 使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$$
$$=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$$
$$=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}。$$

□

【系】 在空间中，向量超过三个时它们必是线性相关的。

证明 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 是空间中任意四个向量。如果 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性相关，则它们连同$\vec{d}$ 一起，也线性相关。如果$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 线性无关，则由【定理】11，$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$，即

$$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}+(-1)\vec{d}=0，$$

由【定义】14 可知，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 线性相关。□

【定义】15. 向量的分量 设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 是空间向量，A，B 的坐标分别是 (x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，则

$$a_1=x_2-x_1，\ a_2=y_2-y_1，\ a_3=z_2-z_1$$

分别叫做向量$\vec{a}$ 的 x 分量，y 分量，z 分量。把向量 $\vec{a}$ 表示成

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)。$$

若平行移动$\overrightarrow{AB}$ 使始点 A 移到原点，则 B 的坐标(a_1, a_2, a_3) 就表示 $\overrightarrow{AB}$ 的分量。

【公式】9. (1) $m\vec{a}=(ma_1,\ ma_2,\ ma_3)$；

(2) 设$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$，则

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)，$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)；$$

(3) $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$。

证明 由定义显然。□

【定义】16. 基本向量 在 x，y，z 轴上，指向各轴的正方向的单位向量，

分别用$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$表示。$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$叫做基本向量(或基本单位向量)。$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$有时也用$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$表示。

若向量$\vec{a}$的分量为a_1，a_2，a_3，则$\vec{a}$可用下式表示：

$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k},$$

从而，【公式】9(2)可写成

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{i}+(a_2+b_2)\vec{j}+(a_3+b_3)\vec{k},$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1)\vec{i}+(a_2-b_2)\vec{j}+(a_3-b_3)\vec{k}.$$

【定义】17. 向量的内积 空间向量的内积也和平面向量的内积一样，可按【定义】13来定义。【公式】12对于空间向量也成立。

【公式】10. (1) 设两个向量$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$之间的夹角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。

证明 (1) 如图6—40所示，假定两个向量为$\vec{a}=\vec{OA}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=\vec{OB}=(b_1, b_2, b_3)$，它们之间的夹角为$\theta$，那末对三角形$OAB$应用余弦法则，有

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta,$$

即
$$\overline{AB}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta.$$

另一方面，A，B的直角坐标分别是$\vec{a}$，$\vec{b}$的分量(a_1, a_2, a_3)，(b_1, b_2, b_3)，因此

$$\overline{AB}^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2,$$

由上列二式得

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)+(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta.$$

由此得

$$-2a_1b_1-2a_2b_2-2a_3b_3=-2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

$$\therefore\quad\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

(2) 由于$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。所以根据(1)直接可得

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$ □

【定理】12. 两个非零向量$\vec{a}=(a_1,\ a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$正交的充分必要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

证明 由$\vec{a}$、$\vec{b}$正交知其夹角为直角，利用【公式】10，(1)得

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

反之，由$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$得$\cos\theta=0$，即$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$。故$\vec{a}$、$\vec{b}$正交。 □

【公式】11. 对于基本向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$的内积，下列公式成立

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

证明 按内积定义，$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0$。因$|\vec{i}|=1$及$\vec{i}$与$\vec{i}$的夹角为0，故$\vec{i}\cdot\vec{i}=1$。对$\vec{j}$、$\vec{k}$同样证明。其次$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$两两垂直且$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$，故$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos\frac{\pi}{2}=0$。同样，$\vec{j}\cdot\vec{k}=0$，$\vec{k}\cdot\vec{i}=0$。 □

注意 由【公式】6，(2)对于内积，适合交换律，因此

$$\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0$$

也成立。

【定义】18. 向量的外积(向量积)* 两个非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的外积，是用下列方式确定的一个新向量：

当平行移动$\vec{a}$，$\vec{b}$使其以一点作为公共始点时，

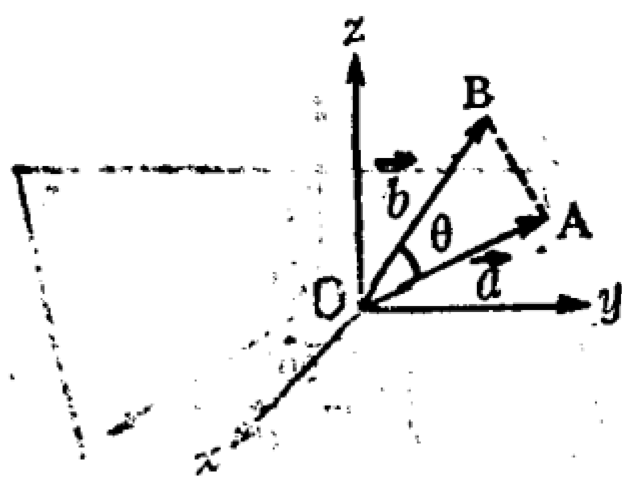


图 6—40

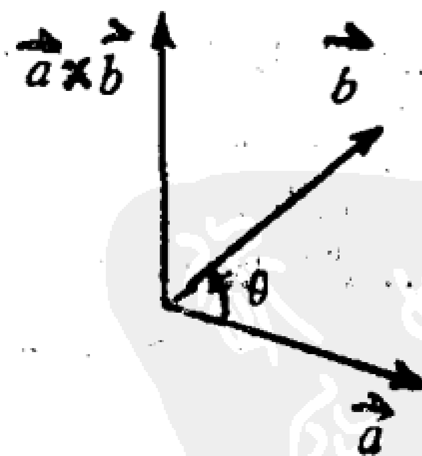


图 6-41

* 也称叉积——译注

(1) 这个新向量的大小为 $|\vec{a}|\ |\vec{b}|\sin\theta$. 其中 θ 是 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 之间的夹角.

(2) 该向量的方向垂直于 $\vec{a}$, $\vec{b}$, 且当向量 $\vec{a}$ 旋转向 $\vec{b}$ 的方向时，指向右螺旋前进的方向，如图 6-4 所示.

这样规定的两向量的外积也叫做两向量的向量积，表示成

$$\vec{a}\times\vec{b}.$$

当 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 中至少有一个是零向量时，规定 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

【公式】12. (1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$; (反交换律)

(2) $\left.\begin{array}{l}\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\\(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\end{array}\right\}$ (分配律)

(3) 令 m 为实数，则

$$(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times m\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b});$$

(4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

证明 (1) 这是由于 $\vec{a}\times\vec{b}$ 与 $\vec{b}\times\vec{a}$ 大小相等方向相反的缘故.

(2) 如图 6-42 所示. 设 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 具有相同的始点，π 是通过始点 o 而垂直于向量 $\vec{a}$ 的平面. 向量 $\vec{b}$ 在平面 π 上的投影用 $\vec{b_\pi}$ 表示. 将向量 $\vec{b_\pi}$ 乘 $|\vec{a}|$ 再回转90°，所得新向量表示 $\vec{a}\times\vec{b}$. 同样，把 $|\vec{a}|\,\vec{c_\pi}$ 旋转90°后的向量是 $\vec{a}\times\vec{c}$, 把 $|\vec{a}|(\vec{b}+\vec{c})_\pi$ 旋转90°后的向量是 $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$. 但

$$\vec{b_\pi}+\vec{c_\pi}=(\vec{b}+\vec{c})_\pi,$$

故两端乘以 $|\vec{a}|$, 变为

$$|\vec{a}|\,\vec{b_\pi}+|\vec{a}|\,\vec{c_\pi}=|\vec{a}|\,(\vec{b}+\vec{c})_\pi.$$

再把上式两端的向量旋转90°，可得

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}).$$

从而第一式得证.

第二式可根据反交换律得到

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}&=-\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})\\&=-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{b}\\&=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.\end{aligned}$$

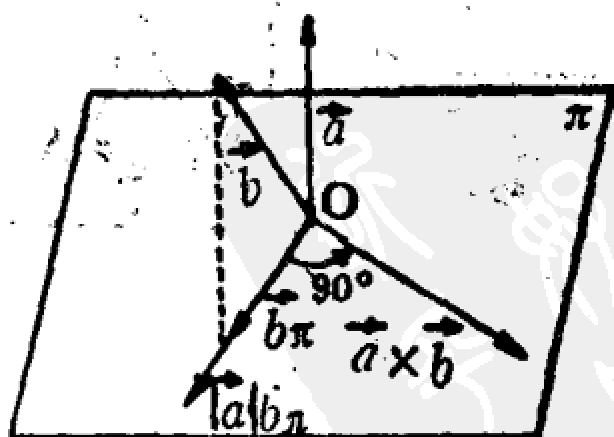


图 6-42

(3) $m=0$ 的情形，等式各端变为零向量，故原式成立.

$m>0$ 的情形，因 $\vec{a}$ 与 $m\vec{a}$的方向相同，故 $(m\vec{a})\times\vec{b}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的方向相同，从而$(m\vec{a})\times\vec{b}$与$m(\vec{a}\times\vec{b})$的方向和大小都相同.其次，

$$\vec{a}\times(m\vec{b})=-(m\vec{b})\times\vec{a}=-m(\vec{b}\times\vec{a})=m(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\therefore\quad (m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})。$$

$m<0$ 的情形，$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 与 $m(\vec{a}\times\vec{b})$大小相等，在这种情形下，因为 $\vec{a}$ 与$m\vec{a}$ 方向相反，所以$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相反。从而$(m\vec{a})\times\vec{b}$ 与 $m(\vec{a}\times\vec{b})$是同方向的。

$$\therefore\quad (m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b}).$$

其次，

$$\vec{a}\times(m\vec{b})=-(m\vec{b})\times\vec{a}=-m(\vec{b}\times\vec{a})=m(\vec{a}\times\vec{b}),$$

从而 $m<0$ 的情形也有

$$(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b}).$$

(4)　因 $|\vec{a}\times\vec{a}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\sin 0^\circ=0$，所以

$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ 或由已证的公式(1)，$\vec{a}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$，

即　$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$。　□

【公式】13．对于基本向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$。下列各式成立。

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0.$$

证明　由于采用右手直角坐标系，就是当把 x 轴围绕原点 O 转过直角后与 y 轴重合时，令右螺旋前进的方向为 z 轴的正向，所以这时$\vec{i}\times\vec{j}$ 的方向与 $\vec{k}$ 的方向相同。又因 $\vec{i}$与 $\vec{j}$ 的夹角是直角，故$\vec{i}\times\vec{j}$ 的大小为

$$|\vec{i}\times\vec{j}|=|\vec{i}|\ |\vec{j}|\ \sin\frac{\pi}{2}=|\vec{i}|\ |\vec{j}|=1=|\vec{k}|\ .$$

$$\therefore\quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}.$$

同样有 $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$。

其次，根据反交换律

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},$$

最后由【公式】12,(4) 得

$$\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,\ \vec{k}\times\vec{k}=0。$$ □

【公式】14. 设向量 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k},$$

或

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}。$$

证明 应用【公式】12 及 13，有

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})\\ &=a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}\\ &\quad+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}\\ &\quad+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}\\ &=-a_2b_1\vec{k}+a_3b_1\vec{j}+a_1b_2\vec{k}-a_3b_2\vec{i}\\ &\quad-a_1b_3\vec{j}+a_2b_3\vec{i}\\ &=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

若把上式用行列式表示，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\\ &=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$ □

例 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$。

4.8 向量方程

【定理】13．设 g 是通过向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ 的终点 A 且平行于向量 $\vec{b}$ 的直线，P 是直线 g 上的任意一点，且令 $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$（图 6—43），则

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}。$$

证明 因为在 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$ 中，$\overrightarrow{AP}$ 可用 $t\vec{b}$ 表示，而 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，所以

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}。$$ □

【定义】19．向量方程 对于【定理】13 中的关系式，随着 t 的不同取值决定着直线 g 上的不同点。这样的关系式叫做直线 g 的以 t 为参数的向量方程。

【定理】14．设有两个向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 则通过 A，B 并以 t 为参数的直线的向量方程是

$$\vec{p}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}。$$

证明 设 P 为该直线上的任意一点，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$，则因 A，B，P 位于同一直线上，故在【定理】6 中用 $\vec{p}$ 代替 $\vec{c}$，便可得到所求的方程。 □

【定理】15．设 P 是以 C 点为中心，r 为半径的圆周上的任意一点，且 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$，则这个圆的向量方程是

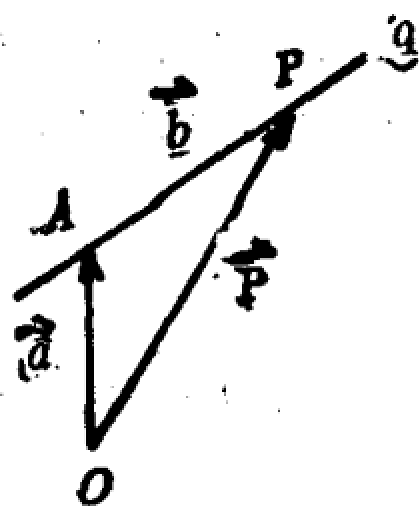


图 6-43

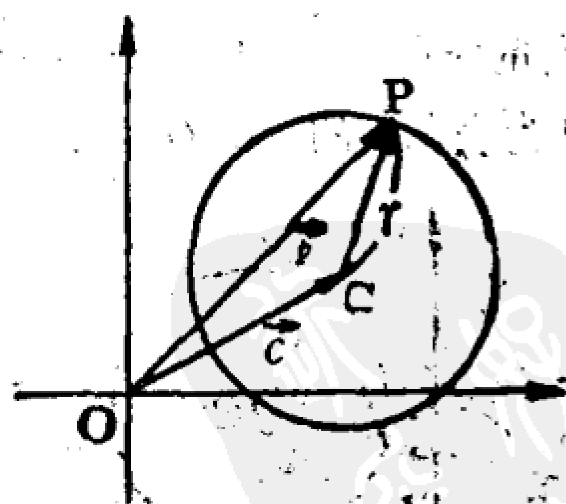


图 6-44

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2。$$

证明 如图 6—44 所示，$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CP}$。

令$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$(O不一定是原点)，则

$$\vec{p}-\vec{c}=\overrightarrow{CP},$$

$$\therefore\quad \left|\vec{p}-\vec{c}\right|^2=\overrightarrow{CP}^2=r^2.$$

应用【公式】6(1)，便得

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2. \qquad \square$$

【定理】16．设 g 是以 C 为中心，r 为半径的圆周上一点 A 处的切线，P 是切线 g 上的任意一点，若令$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则切线的向量方程是

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=r^2.$$

证明 如图 6—45 所示。因为$\angle PAC$ 是直角，所以 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{PC}|\cos\theta\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=r^2$。 但是 $\overrightarrow{PC}=\vec{p}-\vec{c}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{c}$，所以

$$(\vec{p}-\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=r^2.$$

§5． 复数与向量

5·1 复数与向量

设 $z=a+bi$ 是复平面上的一点．若令 x，y 轴上以原点0为始点的单位向量分别为$\vec{e}$，$\vec{i}$，则向量$\overrightarrow{OZ}=a\vec{e}+b\vec{i}$与复数 $z=a+bi$ 相对应．换言之，设P 为表示z的点，$\overrightarrow{OP}$为以原点 O 为始点，P 为终点的位置向量，则复数 z 与向量$\overrightarrow{OP}$ 是一一对应的．

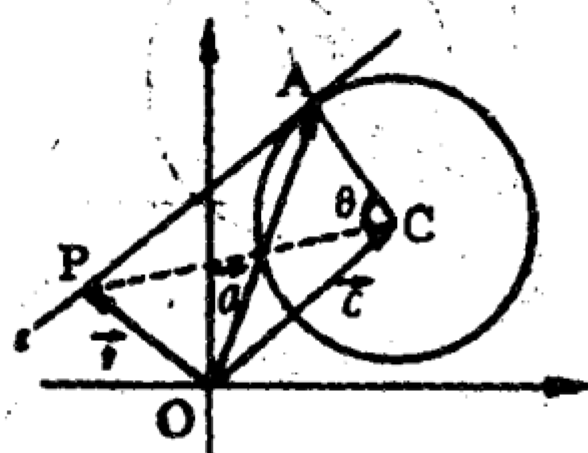


图 6-45

现设

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2),$$
$$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$$

是分别对应于复数

$$\alpha=a_1+a_2i,\quad \beta=b_1+b_2i,$$
$$\gamma=c_1+c_2i$$

的位置向量，则复数与向量的类似的关系式可列表如下：

公式	复数	向量
加法	$\alpha+\beta=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)i$	$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$
减法	$\alpha-\beta=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)i$	$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2)$
交换律	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
结合律	$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
与实数的积	$(mn)\alpha=m(n\alpha)$	$(mn)\vec{a}=m(n\vec{a})$
	$(m+n)\alpha=m\alpha+n\alpha$	$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$
	$m(\alpha+\beta)=m\alpha+m\beta$	$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$
内分点	$\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$	$\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$
重心	$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$	$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$
模	$\lvert\alpha\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$
二点间的距离	$\lvert\alpha-\beta\rvert$	$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert$

注意：复数的积与向量的内积或外积，其定义是根本不同的。

5·2 向量的旋转

【定理】1. 设 $\overrightarrow{O\omega}$ 是在复平面上把向量 $\overrightarrow{OZ}$ 围绕原点 O 旋转 θ 角后所得的向量，则其终点 ω 可表示成

$$\omega=z(\cos\theta+i\sin\theta).$$

证明 由于复数 z,ω 分别对应于向量 $\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{O\omega}$，把 $\overrightarrow{OZ}$ 围绕原点旋转 θ 角，即是把复数 z 围绕原点旋转 θ 角.因此，由 § 1.【定理】5，得

$$\omega=z(\cos\theta+i\sin\theta).$$ □

【定理】2. 设 $\overrightarrow{z_0\omega}$ 是在复平面上把向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 围绕 z_0 点旋转 θ 角后所得到的向量（图 6-46），则 $\overrightarrow{z_0\omega}$ 的终点 ω 可表示成

$$\omega=z_0+(z-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta).$$

证明 *由于把向量 $\overrightarrow{z_0z}$ 围绕 z_0 旋转 θ 角，* 即是把复数 z 围绕 z_0 旋转过 θ 角，所以根据 § 1.【定理】6，得

$$\omega=z_0+(z-z_0)(\cos\theta+i\sin\theta).$$ □

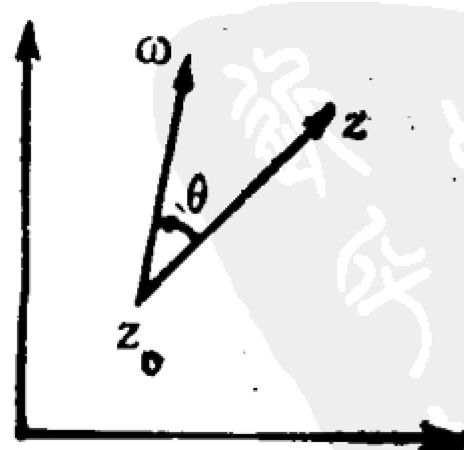


图 6-46

第七章 图形与方程

§1. 点与直线

1.1 直线上点的坐标

【定义】1. 有向直线 规定了正负方向的直线叫做有向直线.正方向常用箭头表示.

【定义】2. 有向线段 在有向直线上取两点 A、B, AB 方向由 A 到 B,当此方向与直线的正方向一致时,规定为正,与直线的正方向相反时,规定为负.这样定义了方向的线段 AB 叫做有向线段,如图 7-1 所示.

【定义】3. 有向距离(有向线段的长度) 有向线段上某两点 A,B间的距离,以一定长度为单位测定后,在得到的数值上附加有向线段 AB 的符号,这个结果叫做有向距离 AB(或有向线段 AB 的长度).当 A 与 B 重合时,取有向距离 $AB=0$.

注意 只要不致引起混乱,我们常常简单地用 AB 表示有向距离,与此相反,普通的距离(不取负值)用 $\overline{AB}$ 表示.

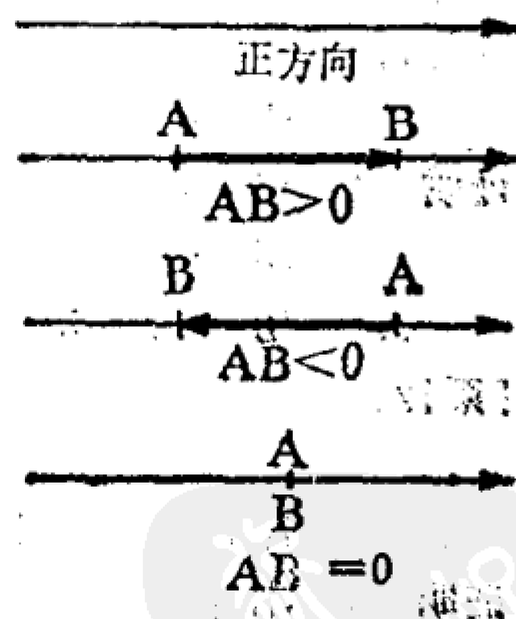


图7-1

【定理】1. 对于有向直线上的任意三点 A, B, C,下列等式成立

(1) 当 $A=B$ 时, $AB=0$(即 $AA=0$);

(2) $AB=-BA$;

(3) $AB+BC+CA=0$.

证明 (1) 根据【定义】3 可证.

(2) (i) 当 A 与 B 不重合时,两个有向线段 AB, BA 两端相同,仅仅符号相反,故 $AB=-BA$,如图 7-2 所示.

(ii) 当 A 与 B 重合时,由(1)有 $AB=0$, $BA=0$,所以 $AB=-BA$.

(3) (i) 当三点 A,B,C 中的任何两点都不重合时，直线上三点的相对的位置关系各不一样，如图 7-3 所示．全部共 A_3^3种，即 6 种．在各种情形下，正的线段（用实线表示）和负的线段（用虚线表示）的代数和都成为零，因而有 $AB+BC+CA=0$.

(ii) A,B,C 中有且仅有两点重合而另一点不同时，例如 $A\equiv B$（图 7-4），则由(1)，(2)有

$$AB=0,\ BC=-CA,\quad \therefore\quad AB+BC+CA=0.$$

其他情形也同样可证．

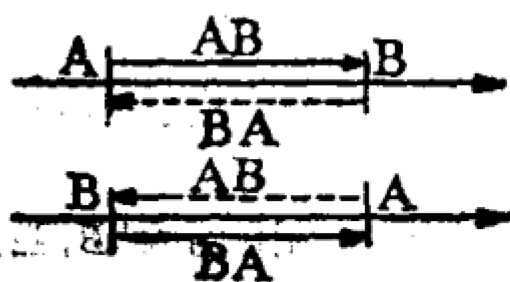
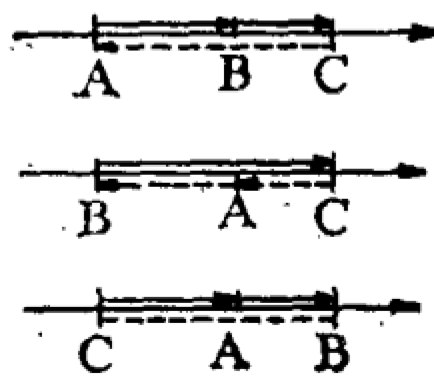


图7-2



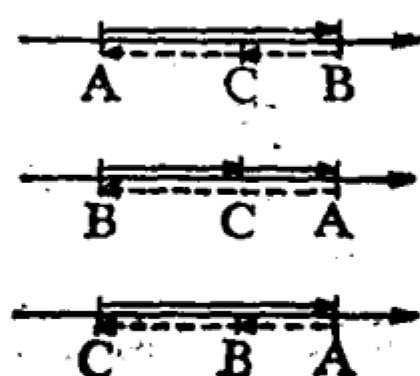


图7-3

(iii) A,B,C 三点都重合时，由(1)有

$$AB=BC=CA=0\quad \therefore\quad AB+BC+CA=0.$$ □

注意　不是有向距离的情形，(2)(3)不一定成立．

【系】1. 对于有向直线上的任意三点 A,B,C，下列等式成立．

$$AB+BC=AC.$$

证明　根据【定理】1(2)有 $CA=-AC$，把它代入(3)得

$$AB+BC-AC=0,$$

$$\therefore\quad AB+BC=AC.$$ □

【系】2. 对于有向直线上的任意 n 个点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$，下列等式成立．

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n.$$

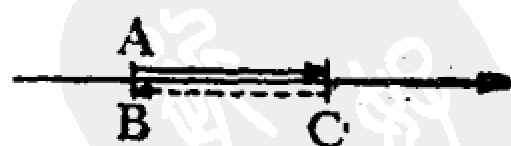


图7-4

证明　根据【系】1

$$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3,$$

$$\therefore\quad A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4=A_1A_3+A_3A_4$$
$$=A_1A_4.$$

反复应用【系】1，便可证明等式成立． □

讨论　严格的证明，应根据数学归纳法．

【定义】4. 坐标、原点、单位点 如图 7-5 所示，为了决定有向直线上点的位置，在直线上取一基准点 O，另外确定一点 E 使 $OE>0$. 对于直线上的一点 P，以 OE 为单位测定其长度，令有向距离 $OP=x$，这时直线上的点 P 和实数 x 一一对应。这个 x 叫做 P 点的坐标，写成 $P(x)$. O 点叫做坐标的原点，E 叫做单位点.

注意 除了特别需要的情形，单位点一般都不标出.

【定义】5. 数轴 引入了坐标（即规定了原点，正方向，单位长度）的直线叫做数轴.

【定理】2. 设数轴上两点 A，B 的坐标分别为 x_1，x_2，则下列等式成立

$$AB=x_2-x_1.$$

即 (有向距离)=(终点坐标)-(起点坐标).

证明 设 O 为原点，则根据【定义】4 有

$$OA=x_1,\quad OB=x_2.$$

其次，根据【定理】1 及【系】1，得

$$AB=AO+OB=-OA+OB=OB-OA=x_2-x_1. \qquad \square$$

注意 $\overline{AB}=|x_2-x_1|$.

【定理】3. 如图 7-6 所示，设 $P(x)$ 点在连结 $A(x_1)$，$B(x_2)$ 两点的线段上且 $AP:PB=m:n(m>0,n>0)$，则下式成立.

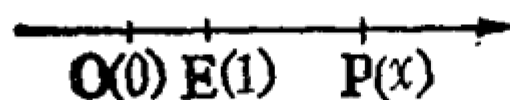


图 7-5

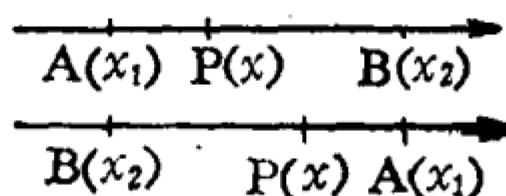


图 7-6

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

证明 因为 P 在线段 AB 上，所以 AP 与 PB 符号相同，且 $AP:PB=m:n$ 应用【定理】2，有

$$AP=x-x_1,\quad PB=x_2-x,$$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}，即 x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

【系】 连结两点 $A(x_1)$，$B(x_2)$ 的线段，其中点坐标是 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

略证　在【定理】3中，令 $m=n(\neq 0)$ 便可得证．□

【定理】4. 如图7-7所示，设 $P(x)$ 点从端点外侧把连结 $A(x_1)$，$B(x_2)$ 的线段从 A 算起外分为 $m:n(m>0,n>0,m\neq n)$，则下式成立

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}\left(=\frac{-mx_2+nx_1}{-m+n}\right).$$

证明　因为 P 点位于线段 AB 的延长线上，所以 AP 和 PB 异号，从而有

$$\frac{AP}{PB}=-\frac{m}{n},$$

$$\therefore\quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=-\frac{m}{n}.$$

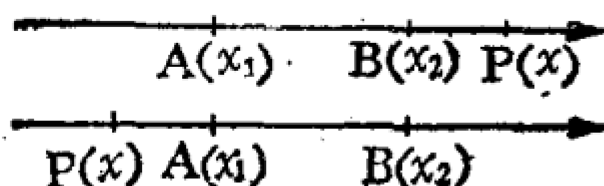


图 7-7

$$\therefore\quad (m-n)x=mx_2-nx_1,\ m-n\neq 0,$$

即
$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$
□

注意　在【定理】3中，当 m，n 中的一个取负时，则变成【定理】4．由此可见，如果约定

(1) 内分的情形，m、n 同号．

(2) 外分的情形，m、n 异号．

则内分、外分中任何一种情形，也都可原封不动地应用【定理】3的公式．

讨论　对于 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，　①

特别地，若令 $m=0(n\neq 0)$，则变为 $x=x_1$，即 $P(x)$ 与 A 重合；若令 $n=0$ $(m\neq 0)$，则变为 $x=x_2$，即 $P(x)$ 与 B 重合．从而根据【定理】3、4及上述注意事项可知，如果适当地选择 m、n，则①中的 x 可以表示数轴上任意一点的坐标．

例题　设 $A(x_1)$、$B(x_2)$ 是数轴上的两个不同点，$P(x)$ 是数轴上异于 B 的任一点，

(1) 试证明：若选择适当的常数 $\lambda(\neq -1)$，

则
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

(2) 当(1)中的入变化时，P 点怎样移动？

解　(1) 若令 $\dfrac{AP}{PB}=\lambda$，　①

则　$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,$$

$\therefore\quad (1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2,\quad 1+\lambda\neq 0,$

$$\therefore\quad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

(2) (i) 当 $\lambda=0$时，由①得 $AP=0$，因此 P 与 A 重合。

(ii) 当 $\lambda>0$ 时，由①得 AP, PB 同号，因此 P 位于线段AB上.

又由　$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

得到　$$x_2-x=\frac{x_2-x_1}{1+\lambda}, \text{即 } PB=\frac{AB}{1+\lambda} \qquad ②$$

如果 λ 增大，则 $\overline{PB}$ 减少，因为 P 点朝 B 点的方向移动. 当 $\lambda\to\infty$ 时，P 点无限靠近 B 点.

(iii) 当$-1<\lambda<0$ 时，有 $0<1+\lambda<1$，因此由②知，PB 和AB同号，$\overline{PB}>\overline{AB}$. 从而 P 点、B 点位于 A 点的两侧. 若 λ 减小，则 $\overline{PB}$ 增大，因此 P点逐渐远离 A 点，当 $\lambda\to-1+0$ 时，P 点无限远离 A 点.

(iv) 当 $\lambda<-1$ 时，有 $1+\lambda<0$，因此由②知，PB 和 AB 异号，从而 P 点、A 点位于 B 点的两侧，若 λ 减小，则 $\overline{PB}$ 减小，因此 P 点趋近于 B 点，当 $\lambda\to-\infty$ 时，P 点无限趋近于 B点. 另外，当 $\lambda\to-1-0$ 时，P 点无限远离 B点. 求解结果如图 7-8 所示.

讨论　上面例(2)的结果，可按下列方式考察如图 7-9 所示，当 λ 由$-\infty$ 增加时，P 点在 B 点的右侧远离 B 点. 当$\lambda\to-1-0$ 时，P 点无限远离 B 点. 其次，当 λ 由$-1+0$ 增加到$\lambda=0$ 时，P 点由 A 点左侧逐渐趋近于 A 点. 当 $\lambda=0$ 时，P 点与 A 点重合，当 $\lambda\to\infty$ 时，P 点无限靠近 B 点.

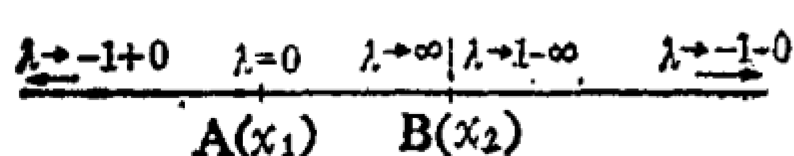


图7-8

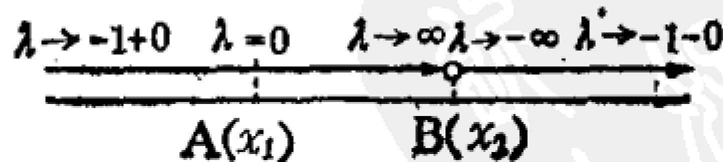


图7-9

注意　对于在【定理】3 中得到的公式，若令 $\frac{m}{n}=\lambda$，便得上例(1)的结果

如果再把【定理】4的注意事项结合起来考虑，则根据 λ 的符号，便可以确定 P 是线段 AB 的内分点还是外分点.

1·2 平面上点的坐标

【定义】6．直角坐标系.原点 平面上正交的两条数轴，分别叫做横轴和纵轴，这两者结合起来叫做直角坐标系．两坐标轴的交点(公共原点)叫做直角坐标系的原点．

注意 按惯例，横轴沿水平方向画出，纵轴沿竖直方向画出，原点用0表示，又，横轴常叫做 x 轴，纵轴常叫做 y 轴，但必要时，也有叫做 X 轴和 Y 轴或 ξ 轴和 η 轴的，如此等等．

【定义】7．直角坐标 如图 7-10 所示，在已建立了直角坐标系的平面上任意取定点 P，由 P 点向横轴、纵轴作垂线，设垂足分别为 M，N，且 M 在横轴上的坐标为 x，N 在纵轴上的坐标为 y，这时，P 点和一个有序实数对 (x, y) 一一对应.这个 x 叫做 P 点的横坐标(或 x 坐标)，y 叫做 P 的纵坐标(或 y)坐标).两者结合起来叫做 P 的直角坐标，或简称坐标，写成 $P(x, y)$.

注意 很多时候也要考虑平行于坐标轴的线段的方向．此时，若这个方向与坐标轴的正方向一致则为正，相反则为负．

【定义】8．坐标平面 在平面上规定了坐标系，从而平面上的一切点都引进了坐标，这样的平面叫做坐标平面．

【定义】9．象限 设 (x,y) 是坐标平面上的一点.由满足 $x>0, y>0$ 的全部点 (x, y) 所组成的区域，即

$\{(x,y)|x>0,\ y>0\}$，叫做第一象限．

类似地，$\{(x,y)|x<0,\ y>0\}$ 叫做第二象限．

$\{(x,y)|x<0, y<0\}$ 叫做第三象限。

$\{(x,y)|x>0, y<0\}$ 叫做第四象限。

【定理】5．设点 $P(x,y)$ 把连结相异二点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的线段从 A 算起内分为 $m:n(m>0, n>0)$，则下式成立。

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

证明 (i) 假设 AB 不平行于 x 轴，也不平行 y 轴，如图 7—11 所示，由 A，B，P 作平行于 x，y 轴的直线，与此轴的交点分别为 A'，B'，P' 及 A''，B''，P''，则在 x 轴上，$P'(x)$ 把连结 $A'(x_1)$，$B'(x_2)$ 的线段，从 A' 算起内分为 $m:n$，在 y 轴上，$P''(y)$ 把连接 $A''(y_1)$，$B''(y_2)$ 的线段，从 A'' 算起内分为 $m:n$。从而，根据【定理】3，下列等式成立，

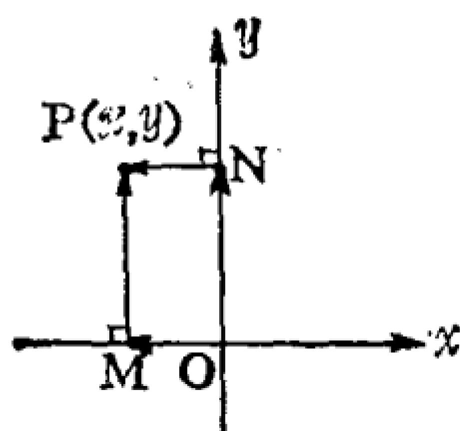


图 7-10

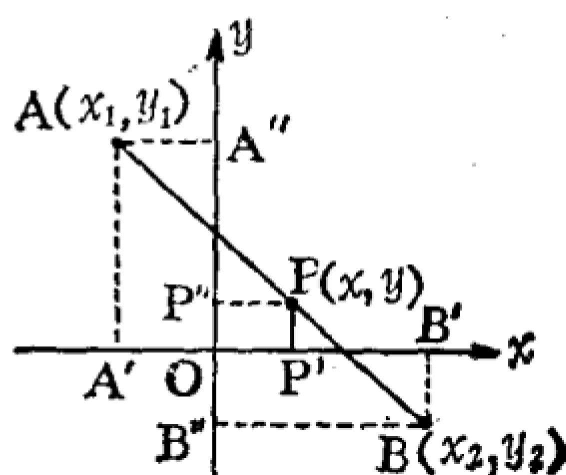


图 7-11

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},$$

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

(ii) 当 AB 平行于 x 轴时，如图 7—12 所示，与(i)的情形同样，有

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}.$$

又因 $y=y_1=y_2$，故有

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

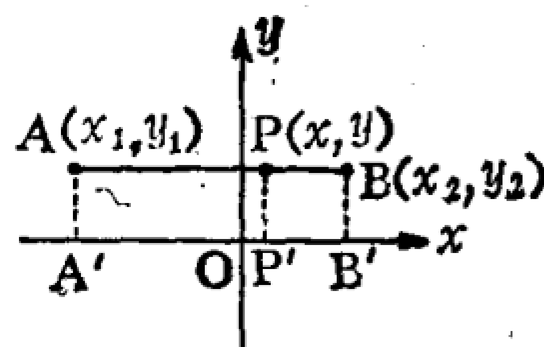


图7-12

(iii) 当 AB 平行于 y 轴时，与(i)的情形同样，有

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

又因 $x=x_1=x_2$，故　$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$.

根据以上所述，恒有

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$ □

【系】 连结两点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2, y_2)$的线段，其中点坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

略证　在【定理】5 中令 $m=n$ 便可得证。　□

【定理】6. 设 $p(x,y)$ 把连接两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的线段，从 A 算起外分为 $m:n$（$m>0$，$n>0$，$m\neq n$），则下式成立。

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\quad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$

证明　(i) 当 AB 不平行于 x、y 轴中的任何一个时，如图 7—13 所示，由 A、B、P 向 x，y 轴作垂线，设垂足分别为 A'，B'，P' 及 A''，B''，P'' 因 P' 在 x 轴上，把连结两点 $A'(x_1)$，$B'(x_2)$ 的线段，从 A' 的一方外分为 $m:n$，同时，P'' 在 y 轴上把连结二点 $A''(y_1)$，$B''(y_2)$ 的线段外分为 $m:n$，所以根据【定理】4，下式成立

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\quad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}.$$

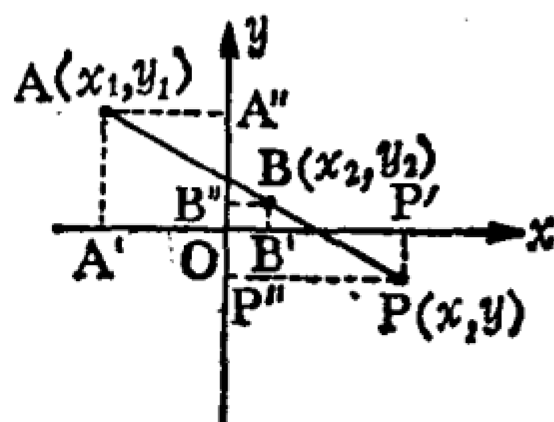


图 7-13

(ii) 当 AB 平行于 x 轴或 y 轴时，例如平行于 x 轴时，与(i)同样地可得 x 的表达式。

又因 $y=y_1=y_2$，故 $y=\dfrac{my_1-ny_1}{m-n}$ 成立。

当 AB 平行于 y 轴时也同样可证。　□

注意1. 类似于【定理】4 的注意事项，在【定理】5 中，若令 m，n 中的一个取负时，则可原封不动地用于外分情形。

2. 注意【定理】3 与 5，【定理】4 与 6 的对应关系，它们仅在维数上有一维与二维的区别。以后将看到，三维的情形也有同样的关系式成立。

讨论　对于 $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$.　①

特别地，若令 $m=0(n\neq0)$，则变成 $x=x_1$，$y=y_1$，即 $P(x,y)$ 点与 A 点重合；若令 $n=0(m\neq0)$，则变成 $x=x_2$，$y=y_2$，即 $P(x,y)$ 与 B 点重合，从而根据【定理】5，6 及上述注意事项知，如果适当选择 m，n，则满足①式的点 (x,y) 可以表示过二点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的直线上的任意一点（参照【定理】4 的讨论）。

例题　试求以三点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$ 为顶点的 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标。

解　如图（7—14）所示，G 点把连结 BC 中点 D 与顶点 A 的线段，从 A 算起内分成 2:1。

设 D，G 的坐标分别是(x_4, y_4)，(x, y)，则由【定理】5及其【系】，有

$$x_4=\frac{x_2+x_3}{2},\quad y_4=\frac{y_2+y_3}{2},\qquad ①$$

$$x=\frac{x_1+2x_4}{1+2},\quad y=\frac{y_1+2y_4}{1+2}.\qquad ②$$

把①代入②得

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

答 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

【定理】7. 二点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$之间的距离，可用下式求得

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ 。$$

证明　如图 7—15 所示，过 A 点作平行于 x 轴的直线，过 B 点作平行于 y 轴的直线，设这二直线的交点为 C，C 的坐标是(x_2, y_1)。

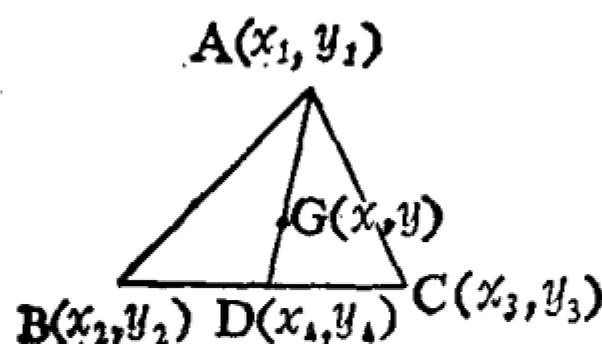


图 7-14

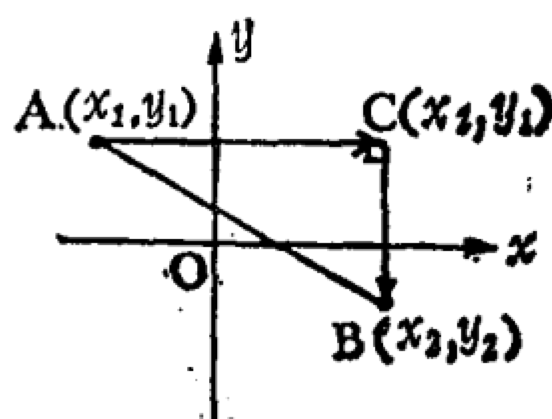


图 7-15

根据勾股定理，有

$$AB^2=AC^2+CB^2.$$

因为 AC，CB 是平行于坐标轴的线段，所以根据【定义】7 的注意事项及【定理】2，有

$$AC=x_2-x_1$$

$$CB=y_2-y_1$$

$$\therefore\quad AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

由于 $AB>0$，所以

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

注意 即使 ABC 不是三角形的情形，上面的证明中所用的全部等式也成立。

【系】 原点与点(x_1, y_1)之间的距离是$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$。

略证 在【定理】7 中令$x_2=0$，$y_2=0$便可得证。 □

【定义】10．斜交系，轴角，斜坐标 在平面上确定两个相交的数轴，分别命名为横轴(或 x 轴)、纵轴(或 y 轴)，两者合起来叫做坐标系，两坐标轴的交点叫做原点，两坐标轴正方向的夹角叫做轴角，当轴角不是直角时，这坐标系叫做斜交系，如图 7—16 所示。

假设过平面上的一点 P 作平行于 x，y 轴的直线，它们与 y 轴、x 轴的交点分别令为 N，M。当 M、N 在 x，y 轴上的坐标各为 x，y 时，x 叫做 P 的 x 坐标，y 叫做 P 的 y 坐标，两者统称为 P 的斜坐标，写成$P(x,y)$。

注意 当轴角是直角时，斜交系变为直角坐标系。把直角坐标系也包含在斜交系一词中常常是方便的。今后，如果没有特别说明，坐标系都表直示角坐标系。

【定义】11．平行坐标 直角坐标和斜坐标统称平行坐标，或用发明者的名字，称为笛卡尔坐标。

【定理】8． 在斜交轴中，把连接两点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的线段从(x_1, y_1)算起：

(1) 内分成 $m:n(m>0, n>0)$的点是$\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}, \dfrac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$；

(2) 外分成 $m:n$ $(m>0, n>0, m\neq n)$ 的点是$\left(\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n},\right.$

$\left.\dfrac{my_2+ny_1}{m-n}\right)$；

证明 如图 7—17 所示，设 A，B 各是点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$P(x, y)$ 是

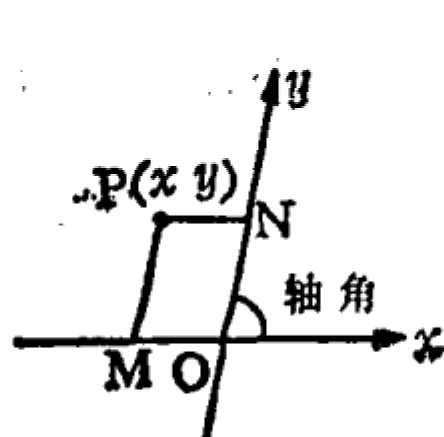
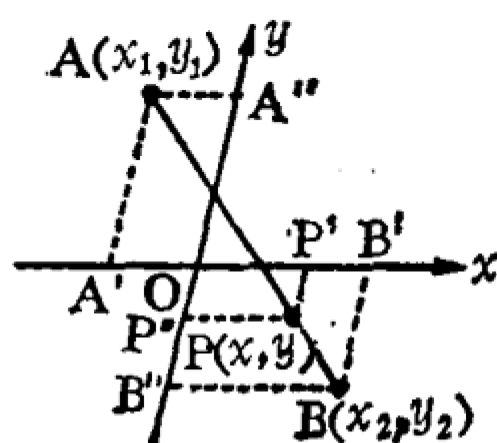


图 7-16



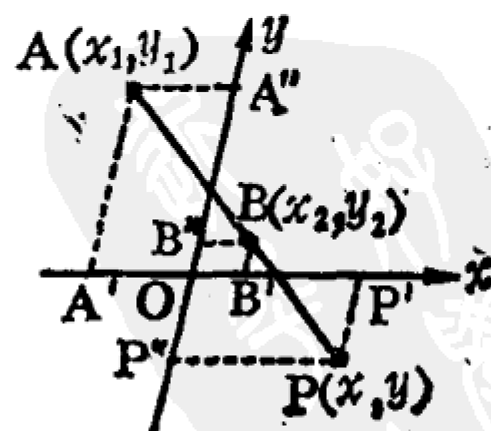


图 7-17

(1), (2)中的内分点或外分点。过 A, B, P 作平行于 y 轴, x 轴的直线, 它们与坐标轴的交点分别令为 A', B', P' 及 A'', B'', P''。以下的证明完全与【定理】5 及 6 相同。 □

注意 与【定理】6 的注意事项 1 相同, 若 m、n 中的一个取负, 则 (1) 中公式也可照样用于外分这一场合。

【定理】9. (直角坐标与斜坐标的关系)

设 x 轴, y 轴是轴角为 ω 的斜交轴。现作直角坐标轴 X 轴, Y 轴, 其中 X 轴与 x 轴重合, 原点也重合, 若令此平面上一点 P 的斜坐标为(x, y), 直角坐标为(X, Y), 则它们有下列关系。

$$(1)\begin{cases}X=x+y\cos\omega,\\ Y=y\sin\omega;\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}x=X-Y\operatorname{ctg}\omega\\ y=Y\csc\omega。\end{cases}$$

证明 如图 7—18 所示, 设 P 为点(x, y), 由 P 点向 x 轴(X 轴) 作垂线, 垂足为 M'。其次, 过 P 点作平行于 y 轴的有向直线 g, 使其正方向与 y 轴的正方向一致。若 g 与 x 轴的交点为 M, 则下列各式成立。

$$OM=x,\ OM'=X,\ MP=y,\ M'P=Y。$$

一般地, 若把一个有向线段 AB 在一直线 l 上的投影, 用记号$(AB)_l$表示, 则由投影定理, 有

$$(OP)x=(OM)x+(MP)x, \quad ①$$

$$(OP)y=(OM)y+(MP)y, \quad ②$$

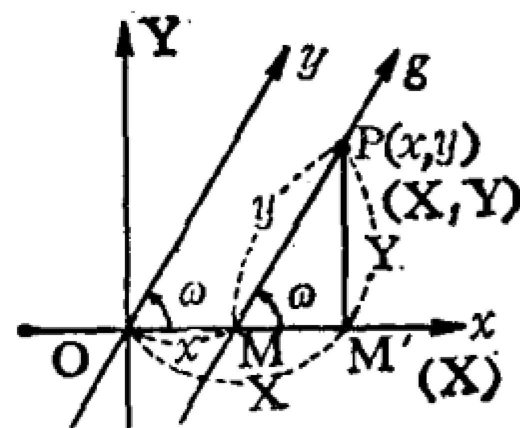


图 7-18

但是 $(OP)x=OM'=X$, $(OM)x=OM=x$。再者, 因为 x 轴的正方向与 y 的正方向之间的夹角为 ω, 所以

$$(MP)x=MP\cos\omega=y\cos\omega。$$

从而, 由①得 $\quad X=x+y\cos\omega。 \quad ③$

其次 $\quad (OP)y=M'P=Y$, $(OM)y=0$。

另外, 由于 Y 轴的正方向与 g 的正方向之间的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\omega$, 所以

$$(M'P)=MP\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=y\sin\omega。$$

从而, 根据②得 $\quad Y=y\sin\omega。 \quad ④$

由③、④, 便得定理的(1)式。

其次, 若把(1)对 x, y 求解, 便得到(2)、也就是说, 因为 ω 是轴角,

所以 $\sin\omega\neq0$，从而由④式得

$$y=\frac{Y}{\sin\omega}=Y\csc\omega。$$

把上式代入③式，得

$$x=X-Y\csc\omega\cos\omega=X-Y\operatorname{ctg}\omega。$$ □

【定理】10. 设 $f(X,Y)$ 是 X,Y 的整式，现用【定理】9的关系式把此式变换为 X,Y 的整式，令所得结果为 $g(X,Y)$，则 $f(X,Y)$ 关于 X,Y 的次数与 $g(X,Y)$ 关于 x,y 的次数相等。

证明 设 m，n 分别是 $f(X,Y)$、$g(x,y)$ 的次数。因为根据【定理】9，X，Y 是 x,y 的一次式，所以 $g(x,y)=f(x-y\operatorname{ctg}\omega,\ y\csc\omega)$ 的次数不大于 m。从而

$$m\geq n。$$ ①

同样地，有

$$m\leqslant n。$$ ②

由①、②两式得 $m=n$。 □

【定理】11. 对于轴角为 ω 的斜交系，二点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 之间的距离可用下式求得

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}。$$

证明 如【定理】9那样，作直角坐标 X 轴，Y 轴，设 A，B 对于这个直角坐标系的坐标分别是 (X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，则根据【定理】7，有

$$AB=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}。$$

但由【定理】9有

$$\begin{cases}X_1=x_1+y_1\cos\omega,\\ Y_1=y_1\sin\omega,\end{cases}\qquad \begin{cases}X_2=x_2+y_2\cos\omega,\\ Y_2=y_2\sin\omega,\end{cases}$$

$$\therefore\ AB=\sqrt{\{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\cos\omega\}^2+\{(y_2-y_1)\sin\omega\}^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2+x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}。$$ □

讨论 如图7-19所示，过 A，作平行于 x 轴的直线，过 B 作平行于 y 轴的直线，设它们交点为 c，则由

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{CB}\cos\angle ACB,\quad AC=x_2-x_1,CB=y_2-y_1$$

便得到结果。要注意其中的 $\angle ACB$，当 AC 与 CB 异号时，$\angle ACB=\omega$，而当 AC 与 CB 同号时，$\angle ACB=\pi-\omega$。

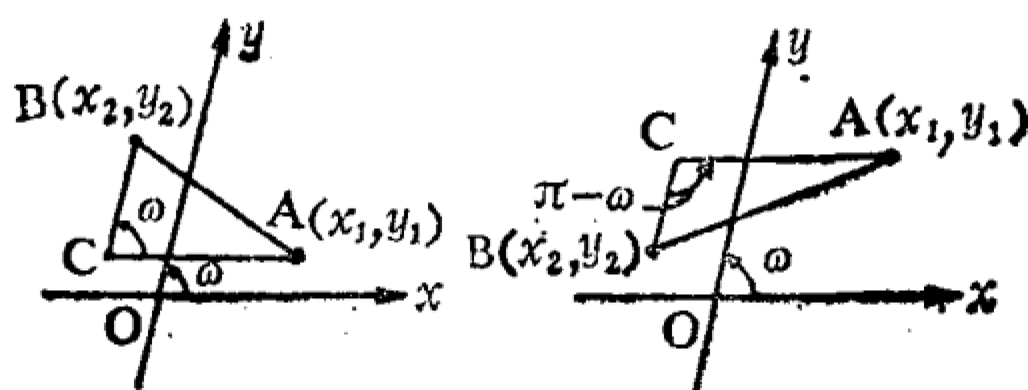


图 7-19

1·3 轨迹与方程

【定义】12．轨迹·轨迹的方程 满足一定条件E的点的集合F，叫做E的轨迹.也就是说，满足E的任意一点都包含在F中，反之，包含在F中的任意一点都满足条件E.

若引进坐标后，关于坐标的方程G与条件E等价，则F叫做方程G的图形，G叫做图形F的方程(或简称F的方程).

【定义】13．流动坐标 【定义】12中包含在方程G中，且表示F的任意一点的坐标，叫做流动坐标.

【定理】12． 当两个方程G,G'等价时，它们表示同一图形.

证明 满足一个方程的点也必然满足另一个方程. □

注意 要特别注意下述两点：

(1) 当k是非零的实数时，两个方程$A=0$，$kA=0$是等价的.

(2) 两端都非负的方程$A=B$与$A^2=B^2$等价.

例题1． 试求通过x轴上一点$(a,0)$而平行于y轴的直线的方程.

解 设此直线为l_1.如图7-20所示.若(x,y)是l_1上的任意一点，则$x=a$(y为任意实数).反之，满足$x=a$的点(x,y)位于l_1上.

根据以上分析，l_1的方程是

$$x=a.$$

例题2． 试求通过y轴上一点(o,b)而平行于x轴的直线的方程.

解 设此直线为l_2，如图7-21所示，若(x,y)是l_2上的任意一点，则$y=b$(x为任意实数).反之，满足$y=b$的点(x,y)位于l_2上.

根据以上分析，l_2的方程是

$$y=b.$$

例题3． 试求以原点为中心，$r(r>0)$为半径的圆的方程.

解 如图7-22所示，设O为原点，则此圆是满足

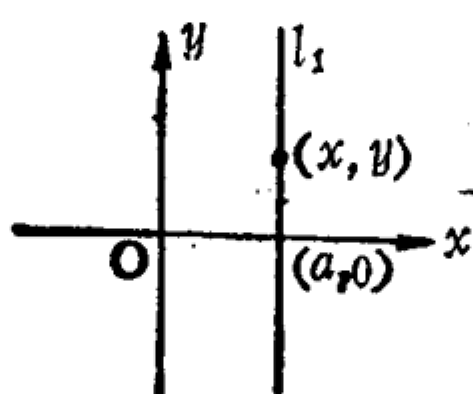


图 7-20

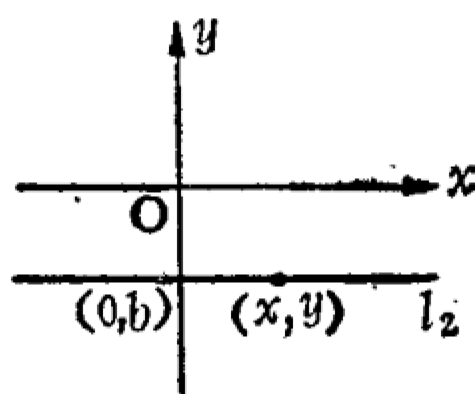


图 7-21

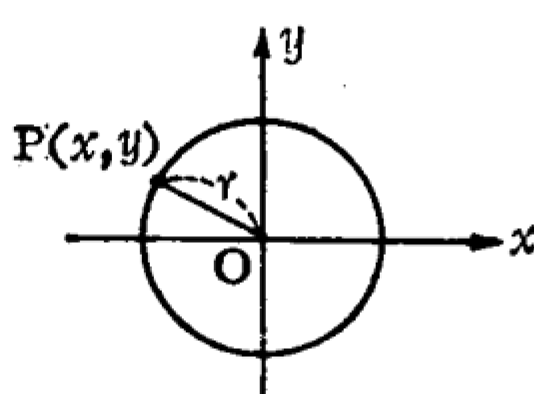


图 7-22

$$OP=r$$

的点 P 的轨迹.

若令 P 的坐标为(x,y)，则由【**定理7**】的【系】有

$$OP=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此①式与下式等价

$$\sqrt{x^2+y^2}=r. \qquad ②$$

②式两端都不为负，因此与两端平方后的下式等价

$$x^2+y^2=r^2.$$

注意 可以把②式作为所求的方程，但采用去掉根号的形式更方便些.

【定理】13. 设 G，G' 分别为图形 F、F' 的方程，则属于 F、F' 的公共部分 D 的点的坐标，可由求联立方程组 G、G' 的实根而得到.

证明 属于 D 的任意一点 P，同时包含在 F 和 F' 两者中.从而同时满足方程G、G'.而且，因为坐标都是实数，所以 P 的坐标是联立方程组 G、G' 的实根. □

注意 当联立方程组不具有实根时，F、F' 的公共部分不存在(空集). 但为了方便，有时也说 F、F' 具有公共虚点.

1·4 直线方程

【定义】14. 直线的方向角 如图 7-23 所示，为了考察坐标平面上的任一直线的方向，规定由 x 轴的正方向到此直线的正方向的夹角为 α，若$-\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$\alpha$叫做此直线的方向角.

注意 有时也规定直线的正方向使之满足 $0\leqslant\alpha<\pi$.

例题 在不平行于 y 轴的一直线上任取两点 P,Q，过 P 和 Q 分别做平行于

x 轴、y 轴的直线. 设两直线的交点为 R. 试证明$\frac{RQ}{PR}$(PR, RQ 是有向距离，参看【定义】7 注意事项)的值与 P, Q 的取法无关，且恒定.

解 (i) 当直线平行于 x 轴时，如图 7-24 所示，恒有 $RQ=0$,

$$\therefore\quad \frac{RQ}{PR}=0.$$

(ii) 当直线不平行于 x 轴时，在此直线上任取二点 P', Q', 过 P'、Q' 分别作平行于 x 轴、y 轴的直线，设两直线的交点为 R'. 在得到的两个直角三角形 PQR, P'Q'R' 中，

$$\angle P=P',\quad \angle Q=Q',$$

$$\therefore\quad \triangle PQR\sim\triangle P'Q'R'.$$

$$\therefore\quad \left|\frac{RQ}{PR}\right|=\left|\frac{R'Q'}{P'R'}\right|. \qquad ①$$

设此直线的方向角为 α,

(甲) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, 则如图 7-25 所示，PR, RQ; $P'R'$. $R'Q'$ 分别同号，因此

$$\frac{PQ}{PR}>0,\ \frac{R'Q'}{P'R'}>0.$$

从而，由①式得 $\frac{RQ}{PR}=\frac{R'Q'}{P'R'}$.

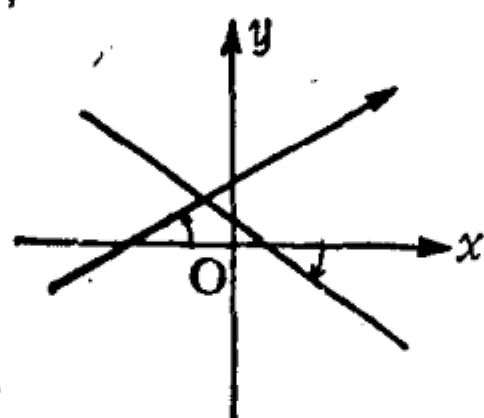


图 7-23

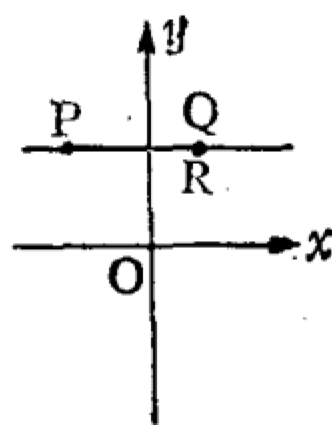


图 7-24

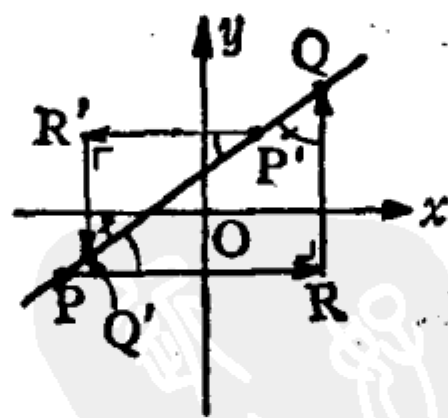


图 7-25

(乙) 若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$, 则如图7-26所示, PR, RQ; $P'R'$, $R'Q'$ 分别异号，因此

$$\frac{RQ}{PR}<0,\ \frac{R'Q'}{P'R'}<0,$$

从而，由①式得 $\frac{RQ}{PR}=\frac{R'Q'}{P'R'}$.

根据以上分析，$\frac{QR}{PR}$与 P,Q 的取法无关且恒定.

【定义】15．直线的斜率(或坡度)　对于不与 y轴平行的直线，在上述例题中的$\frac{RQ}{PR}$的值叫做此直线的斜率(或坡度).

注意　对平行于 y 轴的直线，通常都不考虑斜率.

讨论　由【定义】14 后面的例题及【定义】15，可以说"直线平行于 x轴的必要充分条件是其斜率为 0."

【定理】14． 通过不同两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$的直线的斜率为

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right).$$

其中，设 $x_2\neq x_1$.

证明 若过 A,B 分别作平行于 x,y 轴的直线，则两直线必相交于一点．设此点为C，C 的坐标为$(x_2,\ y_1)$，如图 7-27．根据【定理】2 及【定义】7 的注意事项，有

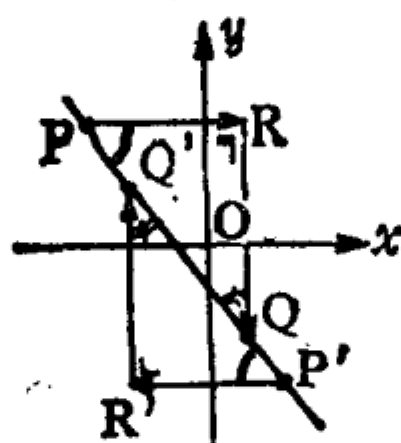


图 7-26

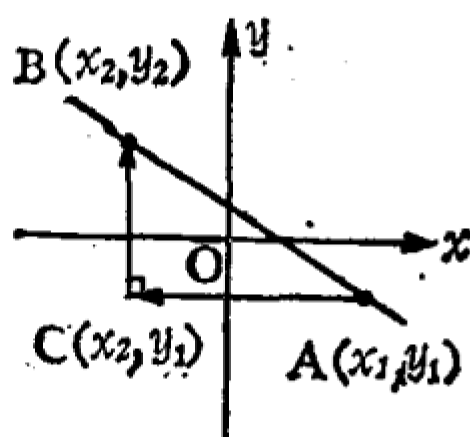


图 2-27

$$AC=x_2-x_1,\quad CB=y_2-y_1,$$

因此，此直线的斜率为

$$\frac{CB}{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ □

【系】1． 如图 7-28 所示，g 是不平行于 y 轴的一条直线，若以 g 上任意一点 P 作为起点，沿 x 轴平移有向距离 1，设其终点为 R，然后过 R 点作平行于 y 轴的直线，它和 g 的交点为 Q，则 g 的斜率等于有向距离 RQ.

略证 g 的斜率$=\frac{RQ}{PR}=RQ$($\because$ $PR=1$). □

【系】2. 如图 7-29 所示，设 g 是不平行于 y 轴的一条直线. 若过点 $F(-1,0)$ 作平行于 g 的直线，与 y 轴的交点为 G，则 g 的斜率等于有向距离 OG.

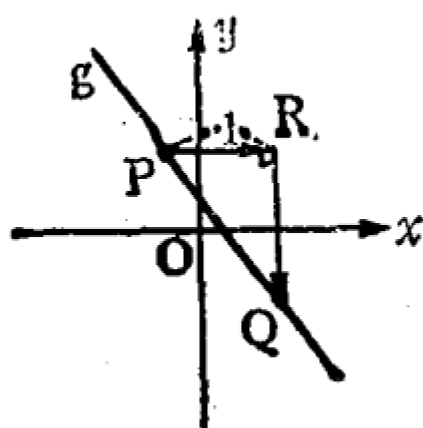


图 7-28

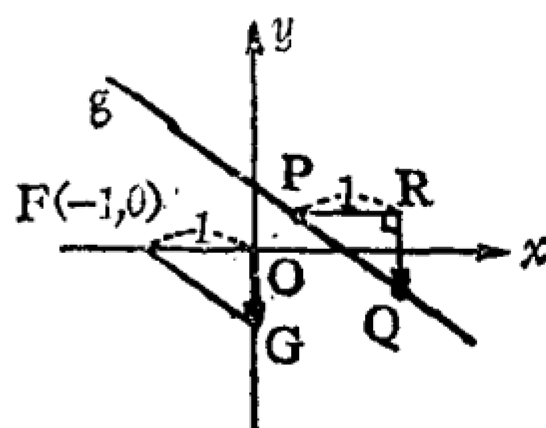


图 7-29

证明 设 P 为 g 上任意一点，过 P 作平行于 x 轴的直线，在此直线上选取 R 点使 $PR=1$. 然后过 R 作平行于 y 轴的直线，若它和 g 的交点为 Q，则根据【系】1，g 的斜率等于 RQ.

对于$\triangle PQR$及$\triangle FGO$，有

$$\angle P=\angle F,\quad \angle Q=\angle G,\quad PR=1=FO,$$

$$\therefore\quad \triangle PQR\cong\triangle FGO,\qquad \therefore\quad \overline{RQ}=\overline{OG}.$$

但是，RQ、OG 是同号的，因此 $RQ=OG$，即 g 的斜率等于有向距离 OG.

□

注意 当 PQR 不构成三角形时，$RQ=OG$ 也成立.

【定理】15. 设 g 是不平行于 y 轴的一条直线，若 g 的斜率为 m，方向角为 α，则当 x, y 轴的单位长度相等时，有 $m=\operatorname{tg}\alpha$.

证明 如图 7-30 所示，过点 $F(-1,0)$ 作平行于 g 的直线，设它与 y 轴的交点为 G，则以 FO 为始边，FG 为终边的角$\angle OFG$ 等于 α. 又由【系】2，$OG=m$，

$$\therefore\quad m=\frac{OG}{1}=\frac{OG}{FO}=\operatorname{tg}\alpha.$$ □

【定义】16. 直线在 x 轴和 y 轴上的截距 (x 截距、y 截距) 如图 7-31 所示，当一直线与 x 轴、y 轴相交时，设交点分别为 M、N，原点为 o. 这时，有向距离 OM(点 M 的 x 坐标)叫做此直线在 x 轴上截距（或简称 x 截距）. 有向距离 ON(点 N 的 y 坐标)叫做此直线在 y 轴上的截距(或简称 y 截距).

【定理】16. 通过点 $A(a,b)$、斜率为 m 的直线的方程是

$$y-b=m(x-a)^{*}.$$

证明　如图 7-32 所示.设此直线为 g.

(i) 令 $P(x,y)$ 为 g 上的任意一点.过 A，P 分别作平行于 x 轴与 y 轴的直线，设其交点为 R.

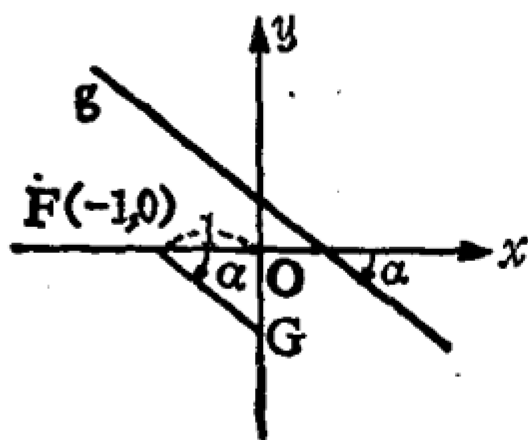


图7-30

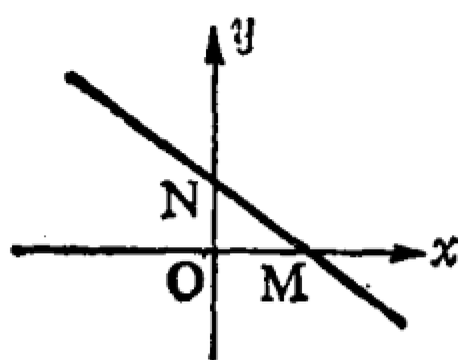


图7-31

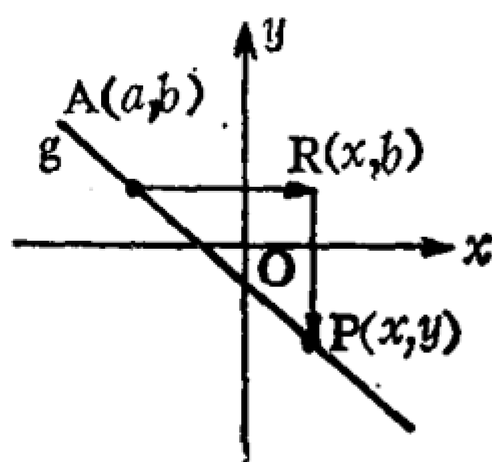


图7-32

当 P 与 A 不重合时，根据【定义】15 知，$\frac{RP}{AR}$ 等于 g 的斜率，从而 $\frac{RP}{AR}=m$.

但 R 的坐标为 (x,b)，故由【定理】2 及【定义】7的注意事项，有

$$AR=x-a,\quad RP=y-b,$$

$$\therefore\quad \frac{y-b}{x-a}=m，即\ y-b=m(x-a). \qquad ①$$

当 P 与 A 重合时，因有 $x=a,y=b$,故 x,y 满足①式.从而，g 上的任意一点 (x,y) 满足①式.

(ii) 反之，我们来考察满足①式的任意一点 (x,y).

$A(a,b)$的坐标满足①式，且 A 点确实位于 g 上.设 (x,y) 是满足①式的 A 以外的任意一点，则 $x\neq a$,且由【定理】14 知，过 A 和点 (x,y) 的直线的斜率为 $\frac{y-b}{x-a}$.

但由①式知，$y-b=m(x-a)$,

$$\therefore\quad \frac{y-b}{x-a}=m\quad (x-a\neq 0).$$

从而，满足①式的任意一点 (x,y) ,位于通过 A 点而斜率为 m 的直线上(即

* 此方程称为直线的点斜式方程——译注

位于 g 上).

根据以上(i)、(ii),证得 g 的方程是

$$y-b=m(x-a). \qquad \square$$

【系】 斜率为 m、y 截距为 n 的直线方程是

$$y=mx+n.^*$$

证明 所谓 y 截距是 n，即直线通过点(o,n).从而，此直线的方程是

$$y-n=m(x-0).$$

即 $$y=mx+n. \qquad \square$$

讨论 根据此【系】及【定理】12 的例题 1，坐标平面上的直线和方程的关系可归纳如下：

不平行于 y 轴的直线 $\rightleftharpoons y=mx+n$,

平行于 y 轴的直线 $\rightleftharpoons x=a$.

例题1. 试求通过不同的两点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)的直线的方程.

解 (i) 当 $x_1\neq x_2$时，根据【定理】14 求得其斜率为$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.而且，由于通过(x_1,y_1)点，故由【定理】16 可知，所求的方程是

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

即 $$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)^*.$$

或者变形得

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0。 \qquad ①$$

(ii) 当 $x_1=x_2$ 时，由于此直线通过(x_1, y_1)点而平行于 y 轴，故其方程是 $x=x_1$。

但在①式中，若令 $x_1=x_2$，则有

$$(y_2-y_1)x+x_1(y_1-y_2)=0。 \qquad ②$$

不过(x_1,y_1)、(x_2, y_2)是不同的两点，而且 $x_1=x_2$，故有 $y_1\neq y_2$，从而,由②式得 $x=x_1$。

也就是说，方程①也适用于(ii)的情形。从而，所求的方程如下：

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0。$$

注意 对于方程 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,必须 $x_1\neq x_2$，但当变成①的形

---

* 此方程称为直线的两点式方程——译注。

式时，也可包含 $x_1=x_2$ 的情形。

讨论1．也可求得斜率是$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$且通过点(x_2, y_2)的直线的方程，不言而喻，它是与①等价的方程。

2．三点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、(x_3, y_3)位于同一直线上的条件是

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)=(y_2-y_1)(x_3-x_1).$$

例题2．试证明：x 截距、y 截距分别为 a, $b(ab\neq0)$ 的直线，其方程可写成

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1^*.$$

解 如图 7—33 所示，此直线通过两点 (a, o)，(o, b)，因此由例题 1 知，其方程是

$$y=\frac{-b}{a}(x-a).$$

由此便得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

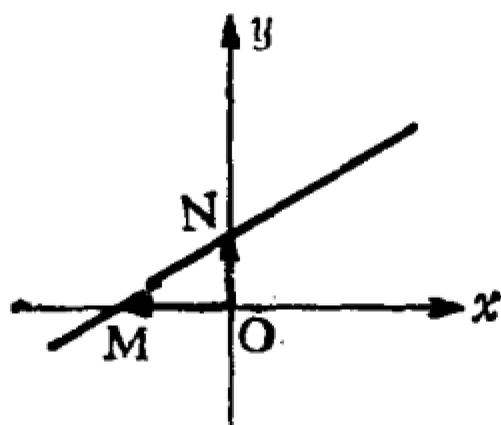


图 7-33

例题3．设 g 是通过两点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$的直线。

(1) 试证明：若 $p(x, y)$是 g 上除 B 外的任意一点，则存在常数 $\lambda(\neq -1)$ 使

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad ①$$

反之，凡以满足①式的 x, y 作坐标的点 $P(x, y)$都位于 g 上。

(2) 当 λ 变化时，按照①式确定的点 $p(x, y)$在 g 上怎样移动？

解 (1) 对于 g 上除 B 以外的一点 P，因 $PB\neq0$，故可确定常数$\frac{AP}{PB}=\lambda$。

以下按【定理】5同样的办法，得到下列关系式

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad ①$$

---

* 此方程称为直线的截距式方程——译注

反之，对于常数 $\lambda(\neq -1)$，选取满足①式的点 $p(x, y)$。根据【定理】16 后面的例题 1，g 的方程式是

$$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1) \qquad ②$$

对于①中的 x，y，

$$②的左端=(x_2-x_1)\left(\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}-y_1\right)$$

$$=\frac{\lambda}{1+\lambda}(x_2-x_1)(y_2-y_1),$$

$$②的右端=(y_2-y_1)\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}-x_1\right)$$

$$=\frac{\lambda}{1+\lambda}(y_2-y_1)(x_2-x_1).$$

它们满足②式，即 P 位于 g 上。

(2) 当 g 不平行于 y 轴时，点 P 的运动由此点在 x 轴上的投影 P′(即①中的 x)的运动确定。从而，参看【定理】4 的例题，变成下列形式。见图 7－34：

若 λ 由零增大，则 P点由 A 点出发向 B 的方向运动，当 $\lambda\to\infty$ 时无限接近 B。

当 $-1<\lambda<0$ 时，若 λ 由零减小，则 P 点由 A 向背离 B 的方向运动，$\lambda\to -1+0$ 时，无限远离 A。

当 $\lambda<-1$ 时，P 和 A 位于 B 的两侧，当 λ 减小时，P 靠近 B，$\lambda\to-\infty$ 时无限靠近 B，又，当 $\lambda\to -1-0$ 时，P 无限远离 B。

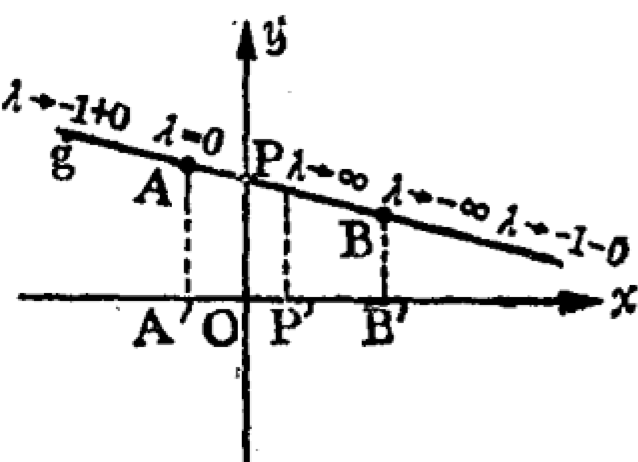


图 7-34

当 g 平行于 y 轴时，考察 P 点在 y 轴上的投影(即①式中 y)的运动，可得同样的结论。

【定理】17．x，y 的线性方程的轨迹是直线。反之，直线方程对 x，y 都是线性的。

证明　x，y 的线性方程可以表示成下列形式

$$ax+by+c=0\ (a,b \text{ 中至少一个不为 } 0), \qquad ①$$

由此得　$by=-ax-c$。

(i) 当 $b\neq 0$ 时，$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，上式表示斜率为 $-\frac{a}{b}$、y 截距为

$-\frac{c}{b}$的直线。

(ii) 当$b=0$时，由①式得

$ax+c=0$，$\therefore x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq 0)$，上式表示通过点$\left(-\frac{c}{a},0\right)$而平行于$y$轴的直线(参看【定理】12的例题1)。

根据以上讨论，证明了①的轨迹是直线。

反之，坐标平面上的直线或者平行于y轴或者不平行于y轴，从而，如在【定理】16【系】的讨论中所看到的那样，直线方程是下列两种形式之一种：

$$x=k \quad 或 \quad y=mx+n。$$

前者可化为 $1\cdot x+0\cdot y-k=0$ (x的系数$\neq 0$)，

后者可化为 $mx+(-1)y+n=0$ (y的系数$\neq 0$)，

两者都是x，y的线性方程。 □

注意 今后如果说到x,y的线性方程，那末假定x，y的系数中至少有一个不为o。再者，当直线方程是$ax+by+c=0$时，往往可以简单地说成"直线$ax+by+c=0$"※。

【系】 对于直线g：$ax+by+c=0$；

(1) g平行于x轴的充分必要条件是$a=0$，

(2) g平行于y轴的充分必要条件是$b=0$。

略证 由【定理】12的例题1、例题2显然可证。 □

【定理】18. 在以x轴，y轴为坐标轴的斜坐标系中，表示x，y的线性方程的图形是直线，反之，直线可用线性方程式表示

证明 作直角坐标轴X、Y，使X轴与x轴相同，原点o重合，若设平面上一点的斜坐标为(x, y)，直角坐标为(X,Y)，则由【定理】10，x，y的线性方程可变换为X，Y的线性方程，反之也成立。从而，根据【定理】17，定理得证。

讨论 如果不以直角坐标轴作为媒介，也可以仿效【定理】12的例题1及【定理】16，直接求方程式。结果如图7—35所示。

(1) 通过点(k, o)而平行于y轴的直线，其方程式是$x=k$。

(2) 通过点(a,b)不平行于y轴的直线，其直线方程是

$$y-b=m(x-a) \quad (m是常数)。$$

※它称为直线方程的一般方程——译注

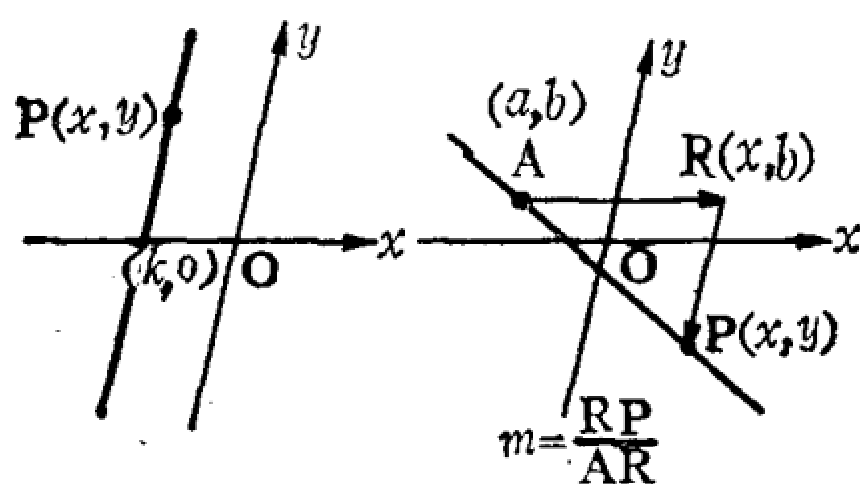


图 7-35

1.5 两条直线平行与垂直的条件

【定理】19. 两条直线 g_1: $y=m_1x+n_1$, g_2: $y=m_2x+n_2$, 平行的充分必要条件是 $m_2=m_1$(即斜率相等)。

证明 如图 7—36 所示，为了使 g_1, g_2 平行，充分必要的条件是：过点 $F(-1,0)$分别作出的平行于它们的直线应重合。由于 g_1,g_2 都不平行于 y 轴所以过 F 点所作的平行直线与 y 轴相交，设其交点为 G，则由【定理】14【系】2，有向距离 OG 等于两直线的斜率。从而，$m_1=m_2$ 是必要充分的。

【系】 两条直线 g_1:$y=m_1x+n_1$, g_2:$y=m_2x+m_2$ 重合的充分必要条件，是 $m_1=m_2$, $n_1=n_2$ 同时成立。

证明 为了使 y_1, y_2 重合，根据【定理】19知，$m_1=m_2$ 是必要的。这时，它们重合的充分必要条件是两条直线至少有一个公共点。如果选择它们与 y 轴相交的点作为此点，则此条件变为 $n_1=n_2$。从而 $m_1=m_2$, $n_1=n_2$ 是充分必要的。 □

【定理】20. 两条直线 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ 正交的充分必要条件是 $m_1m_2=-1$(即斜率的积等于-1)。

证明 如图 7—37 所示，为了使所给出的两条直线正交，充分必要的条件

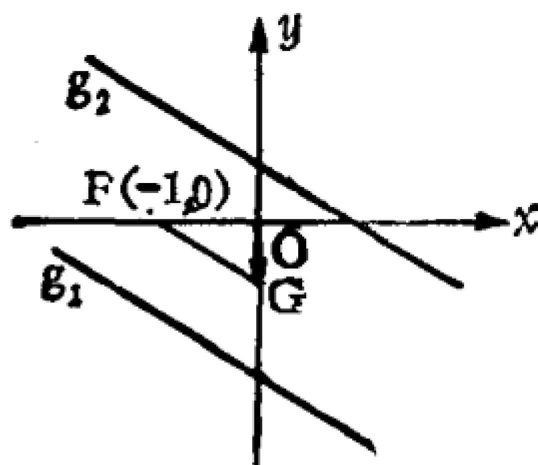


图 7-36

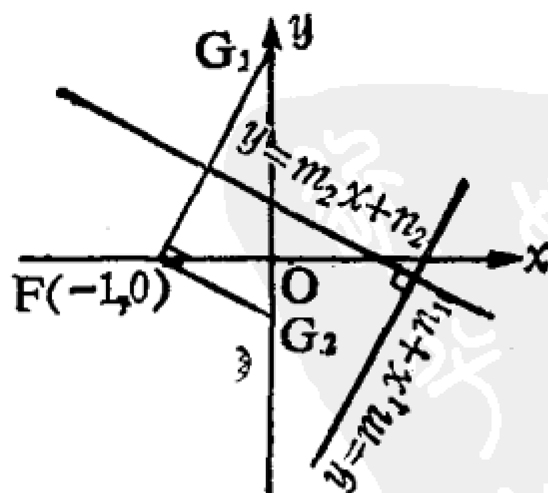


图 7-37

是，过点 $F(-1,\ 0)$分别作出的平行于它们的直线应正交。由于所作的这两条直线与 y 轴相交，故若令交点各为 G_1，G_2，则$\angle G_1FG_2=90°$，从而由勾股定理，FG_1 与 FG_2 正交，等式

$$G_1G_2^2=FG_1^2+FG_2^2 \qquad ①$$

成立是充分必要的条件

$Fo=1$，且由【定理】14【系】2，$OG_1=m_1$，$OG_2=m_2$，从而，由 $G_1(o,m_1)$，$G_2(o,m_2)$，根据【定理】2 得

$$G_1G_2=m_2-m_1。$$

根据以上讨论

$$G_1G_2^2=m_2^2-2m_1m_2+m_1^2,$$
$$FG_1^2=Fo^2+OG_1^2=1+m_1^2,$$
$$FG_2^2=FO^2+OG_2^2=1+m_2^2,$$

将上列各式代入①式得

$$m_2^2-2m_1m_2+m_1^2=1+m_1^2+1+m_2^2,$$
$$\therefore\quad m_1m_2=-1。$$

□

【定理】21. 两条直线 $g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行的充分必要条件是 $a_1b_2=a_2b_1$。

证明 (i) 当 $b_1\neq0$ 时，因 g_1 不平行于 y 轴，故 g_2 也不平行于 y 轴，即 $b_2\neq0$。这时，有

$$y_1:\ y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1},$$

$$y_2:\ y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2},$$

因此，根据【定理】19，g_1，g_2 平行的充分必要条件是

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}，即a_1b_2=a_2b_1。 \qquad ①$$

(ii) 当$b_1=0$ 时，根据【定理】17 的【系】可知，g_1 平行于 y 轴。因而，为了使 g_1，g_2 平行，充分必要的条件是，g_2 也平行于 y 轴，即 $b_2=0$。在此情形下，由于有 $a_1b_2=0$，$a_2b_1=0$，故①式成立。

根据(i)、(ii)，g_1 和 g_2 平行的充分必要条件是

$$a_1b_2=a_2b_1。$$

□

【定理】22. 两条直线 $g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 重合的充分必要条件是

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$。(即对应系数成比例)，其中，我们约定分母为 0 时对应的分子也为 0。

证明 (i) 当 $b_1\neq 0$ 时，仿【定理】21，同样有 $b_2\neq 0$。由此，

$$g_1:\ y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1},$$

$$g_2:\ y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2},$$

所以，根据【定理】19 的【系】，g_1 和 g_2 重合的充分必要条件是

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}, \quad ①$$

$$-\frac{c_1}{b_1}=-\frac{c_2}{b_2} \quad ②$$

同时成立。

(甲) 当 $a_2\neq 0$，$c_2\neq 0$ 时，①、②式与下式等价：

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}. \quad ③$$

(乙) 当 $a_2=0$ 时，由①有 $a_1=0$ ⎫
(丙) 当 $c_2=0$ 时，由②有 $c_1=0$ ⎭ 按约定，③成立。

(ii) 当 $b_1=0$ 时，$a_1\neq 0$。

这时，仿照【定理】21(ii)的情形，同样有 $b_2=0$，但 $a_2\neq 0$，从而得

$$g_1:\ x=-\frac{c_1}{a_1},\qquad g_2:\ x=-\frac{c_2}{a_2}.$$

这两条直线重合的充分必要条件是

$$b_1=b_2=0,\ -\frac{c_1}{a_1}=-\frac{c_2}{a_2}.$$

因此，与(i)的(乙)、(丙)情形同样地考察，按照约定，③可作为充分必要的条件。

由以上(i)、(ii)讨论知，$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$成立，对于 g_1，g_2 重合是充分必要条件　□

注意 在【定理】22中，对几个相等分数中有分母为零时所作的约定，今后将多次出现，且多数是没有事先说明而加以应用的。

【系】 两个线性方程 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ 表示同一条直线

的充分必要条件是：对于某一不为 0 的常数 k，有

$$a_2x+b_2y+c_2=k(a_1x+b_1y+c_1).$$

略证　根据【定理】22，$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$成立是充分必要条件。设这些比值为$\dfrac{1}{k}$，则有 $a_2=ka_1$，$b_2=kb_1$，$c_2=kc_1$，故得证。 □

注意　对于此【系】，还可参看【定理】12的注意(1)。

【定理】23　两条直线g_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$,
g_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$正交(即$g_1\perp g_2$)的充分必要条件是：

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

证明　(i) 当 $b_1\neq 0, b_2\neq 0$ 时，有

$$g_2: y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1},$$

$$g_2: y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}.$$

这时，根据【定理】20，$g_1\perp g_2$的充分必要条件是

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1,$$

亦即　$a_1a_2+b_1b_2=0.$

(ii) 当 $b_1=0$ 时，

由于g_1 平行于 y 轴，从而，g_2平行于 x 轴(即 $a_2=0$)是 $g_1\perp g_2$的充分必要条件.这时，因为 $a_1a_2=0$，$b_1b_2=0$.所以有

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$

(iii) 当 $b_2=0$ 时，

这时 g_2平行于 y 轴.从而，g_1 平行于 x 轴(即 $a_1=0$)是 $g_1\perp g_2$的充分必要条件．与(ii)的情形同样地讨论，得 $a_1a_2+b_1b_2=0$.

根据以上(i)、(ii)、(iii)的讨论，$g_1\perp g_2$的充分必要条件是

$$a_1a_2+b_1b_2=0.$$ □

1·6　通过两直线交点的直线

【定理】24. 当两条直线 g_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$，g_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ 交于一点时，方程

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad ①$$

(λ、μ为常数，其中至少有一个不为 0)

表示通过 g_1和 g_2 交点的直线，反之，若适当地选择 λ、μ，则方程①可表示通过 g_1和 g_2 的交点的任意直线.

证明 首先，证明①是 x，y 的线性方程.把①变形为

$$(\lambda a_1+\mu a_2)x+(\lambda b_1+\mu b_2)y+(\lambda c_1+\mu c_2)=0.$$

如果令 x，y 的系数同时为 0，则

$$\lambda a_1+\mu a_2=0, \qquad ②$$

$$\lambda b_1+\mu b_2=0. \qquad ③$$

λ、μ中至少有一个不为 0，例如，令$\lambda\neq 0$.

由②$\times b_2-$③$\times a_2$ 得　$\lambda(a_1b_2-a_2b_1)=0$.

因为 $\lambda\neq 0$，所以 $a_1b_2-a_2b_1=0$，即 $a_1b_2=a_2b_1$.

从而，根据【定理】12，g_1 和 g_2变为相互平行或重合．这与交于一点的假定矛盾.从而，x、y 的系数不同时为 0.

$\mu\neq 0$ 的情形也可同样论证.

根据以上讨论，①式是x，y 的线性方程，因而表示直线．若令(x_0,y_0)是g_1，g_2的交点，则有

$$\begin{cases}a_1x_0+b_1y_0+c_1=0,\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0.\end{cases}$$

从而，不论 λ、μ 取什么值，当 $x=x_0$，$y=y_0$时，①式被满足.也就是说，①式表示通过 g_1、g_2交点的直线.

其次，若令(x_1,y_1)为 g_1、g_2 交点以外的任意一点(图7-38)，则

$$a_1x_1+b_1y_1+c_1\neq 0,$$

或　$$a_2x_1+b_2y_1+c_2\neq 0.$$

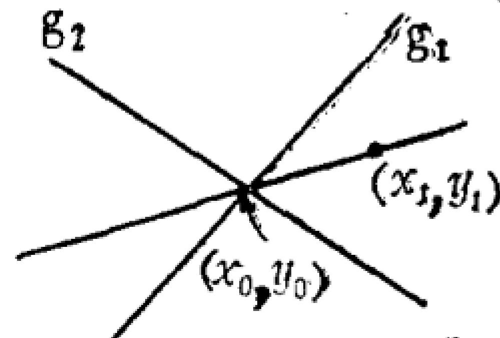


图 7-38

为了使①式表示通过 g_1、g_2 的交点和点(x_1,y_1)的直线，只要能确定常数 λ、μ 使

$$\lambda(a_1x_1+b_1y_1+c_1)+\mu(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$$

成立即可，为此，

当 $a_1x_1+b_1y_1+c_1\neq 0$ 时，只要取

$$\lambda=-\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2}{a_1x_1+b_1y_1+c_1},\mu=1,$$

当 $a_2x_1+b_2y_1+c_2\neq 0$时，只要取

$$\lambda=1,\mu=-\frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+c_2}$$

即可. □

讨论 当 $\lambda\neq 0$，$\mu=0$ 时，①式表示 g_1. 当 $\lambda=0$，$\mu\neq 0$ 时，①式表示 g_2. 而当 $\lambda\neq 0$，$\mu\neq 0$ 时，①式表示 g_1, g_2 以外的直线.

【系】1. 当两条直线 $g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 交于一点时，方程

$$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad (k\text{为常数}) \qquad ①$$

若适当选择 k，可表示通过 g_1 和 g_2 交点的任意直线(但不包括直线 g_2).

证明 根据【定理】24，①式表示通过 g_1、g_2 交点的直线.

如果令①式表示 g_2，则由【定理】22，有

$$\frac{a_1+ka_2}{a_2}=\frac{b_1+kb_2}{b_2}=\frac{c_1+kc_2}{c_2},$$

即 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

再一次由【定理】22 知，g_1 和 g_2 重合. 这与假设矛盾，故①式不能表示 g_2.

若令 (x_1, y_1) 是 g_1, g_2 交点之外且不在 g_2 上的任意一点，则 $a_2x_1+b_2y_1+c_2\neq 0$，故仿效【定理】24，若令 $k=-\dfrac{a_1x_1+b_1y_1+c_1}{a_2x_1+b_2y_1+c_2}$，则①式表示通过 g_1，g_2 的交点和点 (x_1, y_1) 的直线. □

【系】2. 设有相异三条直线

$g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$，

$g_3: a_3x+b_3y+c_3=0$，

其中任何两条都不平行，则这三条直线交于一点的充分必要条件是，存在同时不为 0 的常数 λ, μ, γ 使

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3)=0$$

恒成立.

证明 相异的三条直线 g_1, g_2, g_3 交于一点，与 g_3 通过 g_1, g_2 的交点是一回事.

根据【定理】24的讨论，若选择适当的非零的常数 λ, μ，则过 g_1，g_2 交点的直线可表示成.

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0.$$

从而，根据【定理】22【系】，适当地选择非零的常数 γ，有

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=-\gamma(a_3x+b_3y+c_3),$$

即

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma(a_3x+b_3y+c_3)=0$$

是 g_1, g_2, g_3 共点的充分必要条件 □

【定理】25. 当两条直线 $g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 平行时，如果方程式

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad (\lambda,\mu \text{ 是常数}) \qquad ①$$

表示直线，则此直线平行于 g_1, g_2 或者至少与其中的一条重合.

证明 由于 g_1, g_2 平行，故由【定理】21，下式成立

$$a_1b_2=a_2b_1. \qquad ②$$

又由①有

$$(\lambda a_1+\mu a_2)x+(\lambda b_1+\mu b_2)y+(\lambda c_1+\mu c_2)=0.$$

因此，根据【定理】21，为了使此直线与 g_1 平行，须有

$$a_1(\lambda b_1+\mu b_2)=(\lambda a_1+\mu a_2)b_1$$

即

$$\mu a_1b_2=\mu a_2b_1 \qquad ③$$

但因②式成立，故③式成立.因此，直线①平行于 g_1, g_2. 当 $\lambda=0$ 时，它与 g_2 重合.当 $\mu=0$ 时，它与 g_1 重合.

1·7 点到直线的距离

【定理】26. 设有某直线 l，过原点 0 作垂直于 l 的有向直线 g，与 l 的交点为 G.若设 α 是由 x 轴正方向到 g 的正方向所转过的角，有向距离 $OG=P$，则 l 的方程式为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

证明 如图 7-39 所示，设 $P(x,y)$ 是 l 上的任意一点，用 $\overrightarrow{n_0}$ 表示直线 g 上的单位向量(即直线 l 的单位法向量)，则不难知道

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_0}=|\overrightarrow{OP}|\cdot 1\cdot\cos\angle(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{n_0})=p.$$

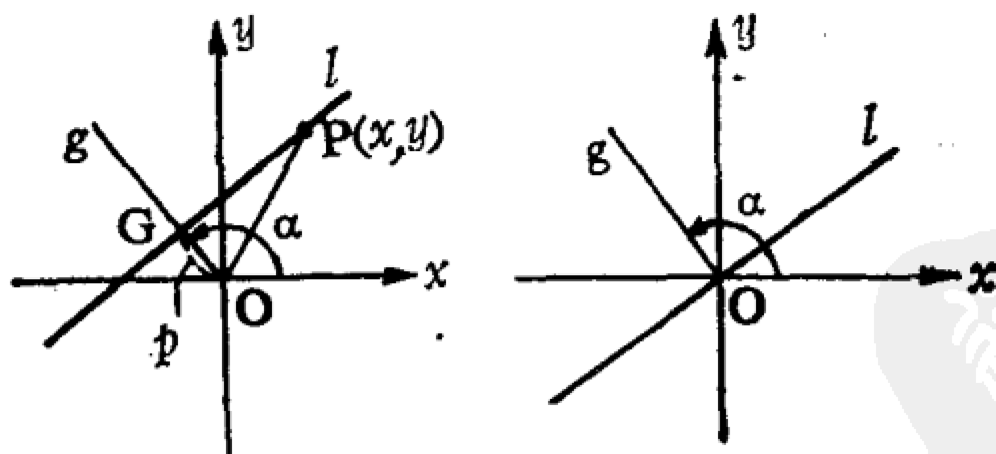


图 7-39

另一方面，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{n_0}=x\cos\alpha+y\sin\alpha$，

所以 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，

即对于 l 上任一点 $P(x,y)$ 有

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p. \qquad ②$$

因②式是 x,y 的线性方程，故由【定理】17，它表示直线且 (x,y) 在 l 上，亦即②式表示 l。

【定义】17．直线的标准形　用【定理】26 中的形式表示的方程叫做直线的(黑塞)标准形*.

注意　在【定理】26 中，当 l 不通过原点时，可以规定 g 的正方向使 $OG=p>0$. 大多数情形都遵从这个规定.

【定理】27． 直线方程 $ax+by+c=0$ 可变形成如下的标准形

$$\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \qquad (a^2+b^2\neq 0).$$

证明　假设把

$$ax+by+c=0 \qquad ①$$

变形成标准形

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0. \qquad ②$$

由于①、②式表示同一条直线，故由【定理】22 有

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\sin\alpha}{b}=\frac{-p}{c}.$$

若令 k 为这个公共的比值，则有

$$\begin{cases}\cos\alpha=ka, & ③\\ \sin\alpha=kb, & ④\\ -p=kc. & ⑤\end{cases}$$

由③、④得

$$k^2a^2+k^2b^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$

$$\therefore\quad k^2(a^2+b^2)=1.$$

即

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a^2+b^2\neq 0).$$

把此值代入③、④、⑤式，得

※ 又称为直线的法线式方程——译注

$$\begin{cases}\cos\alpha=\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \sin\alpha=\pm\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \text{(同取正号或同取负号)}\\ -p=\pm\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

把上列各式代入②式，便得

$$\pm\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0.$$ □

注意 如象在【定理】26 的注意事项中所述的那样，当直线不通过原点时，若规定 $p>0$，则对于⑤有 $kc<0$，因此 k 与 c 异号.从而，标准形可写成下列形式

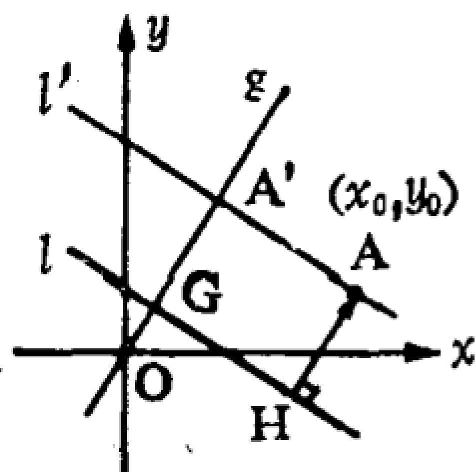
$$\varepsilon\cdot\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0 \quad (\text{其中 } \varepsilon^2=1, \varepsilon c<0).$$

另外，当直线通过原点时，$p=0$，此时通常规定 g 的正方向使在【定理】26 中的角 α 满足 $0\leqslant\alpha<\pi$.

【定理】28. 假设直线 l 用准标形表示成 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，而 g 是通过原点 O 且垂直于 l 的直线，现规定 g 的正方向使 $p\geqslant0$. 由一点 $A(x_0, y_0)$ 向 l 作垂线，垂足为 H.这时，平行于 g 的有向距离 HA 用下式给定

$$HA=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p.$$

证明 如图 7-40 所示，通过点 A 作平行于 l 的直线 l'.若 g 与 l、l' 的交点分别是 G、A'，则 $OG=p$.



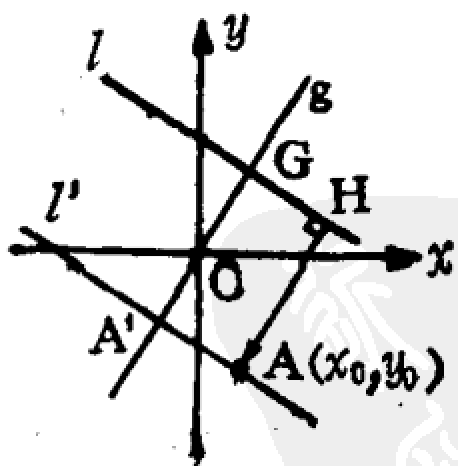


图 7-40

根据【定理】26，l' 的方程式可写为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-q=0,$$

由于 A 位于 l' 上，故有

$$x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-q=0,$$

$$\therefore\quad OA'=q=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad HA=GA'=OA'-OG$$

$$=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p.$$ □

注意　HA 是有向距离，不一定为正.

【系】1.　点 $A(x_0,y_0)$ 与标准形直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 之间的距离等于 $|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$.

【系】2. 点 $A(x_0,y_0)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的距离等于 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

略证　根据【定理】27，把 $ax+by+c=0$ 变形成标准形，再应用【系】1，便得证。 □

例题　试求以三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ 为顶点的三角形的面积 S.

解　如图 7-41 所示，由 A 向直线 BC 作垂线，垂足为 H. 根据【定理】16后面的例题1，BC 的两点式方程是

$$(x_3-x_2)(y-y_2)=(y_3-y_2)(x-x_2),$$

即　$$(y_3-y_2)x-(x_3-x_2)y+(x_3y_2-x_2y_3)=0.$$

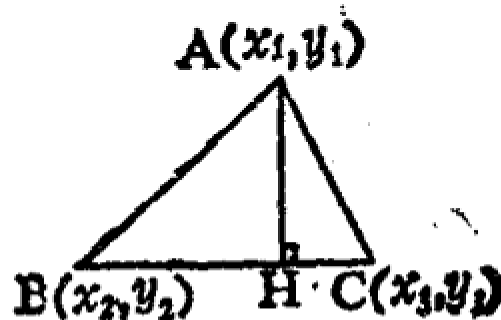


图 7-41

从而，根据上述【系】2，有

$$AH=\frac{|(y_3-y_2)x_1-(x_3-x_2)y_1+(x_3y_2-x_2y_3)|}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}$$

$$=\frac{|(y_3-y_2)(x_1-x_2)-(x_3-x_2)(y_1-y_2)|}{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}.$$

又根据【定理】7，$BC=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$，

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}\Big|(y_3-y_2)(x_1-x_2)-(x_3-x_2)(y_1-y_2)\Big|.$$

讨论　特别地若三点 A,B,C 位于同一直线上，则 $S=0$. 从而

$$|(y_3-y_2)(x_1-x_2)-(x_3-x_2)(y_1-y_2)|=0.$$

这与在【定理】16 例题 1 的讨论 2 中所得的结果是等价的.

【定义】18．线性式的正区域、负区域　令 $L(x,y)=ax+by+c$. 满足 $L(x,y)>0$ 的点的集合，叫做 $L(x,y)$ 的正区域，满足 $L(x,y)<0$ 的点的集合，

叫做 $L(x,y)$的负区域.

【定理】29. 设 $L(x,y)=ax+by+c$(a,b 中至少有一个不为 0).平面被直线 l:$L(x,y)=0$ 所分成的两部分中，一个是 $L(x,y)$的正区域，另一个是 $L(x,y)$的负区域.

证明 如图 7-42 所示，设 g 是与 l 相交的任意有向直线，若在 g 上任取三个不同的点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$、$P_3(x_3,y_3)$，则由【定理】16 后面的例题 3，可知

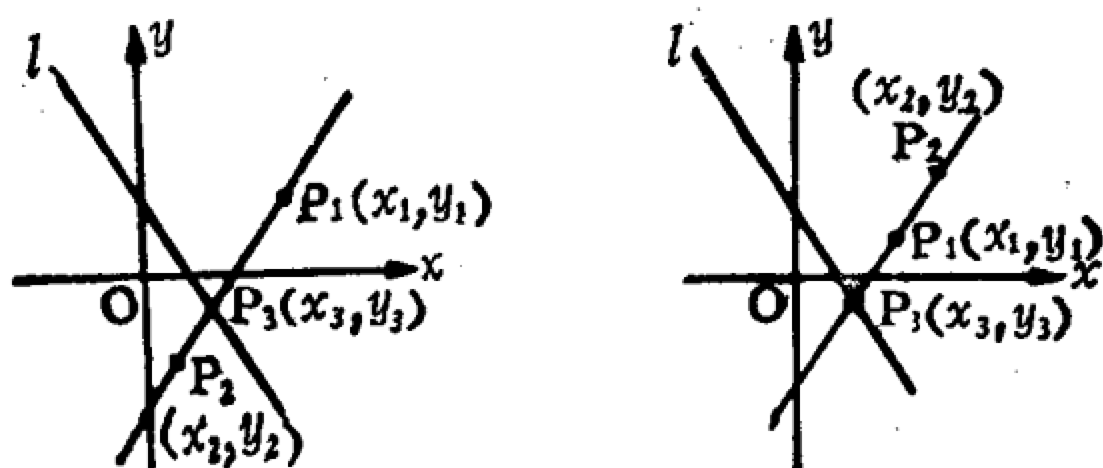


图 7-42

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},$$

$$y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

这时，若 P_3位于线段 P_1P_2上，则 $\lambda>0$;若 P_3位于线段 P_1P_2 外，则 $\lambda<0$.

$$L(x_3,y_3)=a\cdot\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}+b\cdot\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}+c$$

$$=\frac{(ax_1+by_1+c)+\lambda(ax_2+by_2+c)}{1+\lambda}$$

$$=\frac{L(x_1,y_1)+\lambda L(x_2,y_2)}{1+\lambda}$$

若 P_3 位于 l 上，则 $L(x_3,y_3)=0$，因此 $L(x_1,y_1)=-\lambda L(x_2,y_2)$.

当 P_1,P_2不在 l 上时，有 $L(x_1,y_1)\neq 0$，$L(x_2,y_2)\neq 0$.

若 P_1,P_2位于 l 的两侧，则 $\lambda>0$，因此 $L(x_1,y_1)$、$L(x_2,y_2)$异号.

若 P_1,P_2 位于 l 的同侧，则 $\lambda<0$,因此 $L(x_1,y_1)$、$L(x_2,y_2)$同号.

也就是说，$L(x,y)$以直线 l 为界线，一侧为正，另一侧为负．□

例题1. 由等腰三角形 ABC 的底边 BC 上任意一点 P，作其他两边 AB，AC 的垂线，设垂足分别为 H,K，试用坐标法证明 $PH+PK$ 为定值．

证明 如图 7-43 所示，设 BC 边的中点为 0，则 $AO\perp BC$．建立以直线 BC 为 x 轴，直线 OA 为 y 轴的直角坐标系．在图中，若令 $BC=2a$，$OA=b$，则各顶点的坐标为 $A(o,b)$，$B(-a,o)$，$C(a,o)$．

根据【定理】16 的例题 2 知，直线 AB、AC 的方程分别是

$$\frac{x}{-a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

即　　$bx-ay+ab=0$，$bx+ay-ab=0$．

若令 P 点的坐标为 $(x_1,0)$，则由【定理】28 的【系】2 有

$$PH=\frac{|bx_1+ab|}{\sqrt{b^2+a^2}},PK=\frac{|bx_1-ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

对于 $bx-ay+ab$，若令 $x=0$，$y=0$，则 $b\cdot0-a\cdot0+ab=ab>0$．

对于 $bx+ay-ab$，若令 $x=0$，$y=0$，则 $b\cdot0+a\cdot0-ab=-ab<0$．

因此，关于直线 AB，原点一侧是 $bx-ay+ab$ 的正区域．关于直线 AC，原点一侧是 $bx+ay-ab$ 的负区域．

由于 P 点对 AB、AC 都是在原点一侧，因此有

$$bx_1-a\cdot0+ab=bx_1+ab>0,$$

$$bx_1+a\cdot0-ab=bx_1-ab<0,$$

$$\therefore\quad PH=\frac{bx_1+ab}{\sqrt{b^2+a^2}},\quad PK=-\frac{bx_1-ab}{\sqrt{b^2+a^2}}.$$

即　　$$PH+PK=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

这是与点 P 的 x 坐标 x_1 无关的常数．

例题2. 试求两条直线 l_1：$2x-3y+4=0$，l_2：$x+2y-6=0$ 的夹角的平分线的方程．

解 如图 7-44 所示，两条直线夹角的平分线是距此二直线等距离的点的轨迹，因而，所求的方程是

$$\frac{|2x-3y+4|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}\qquad ①$$

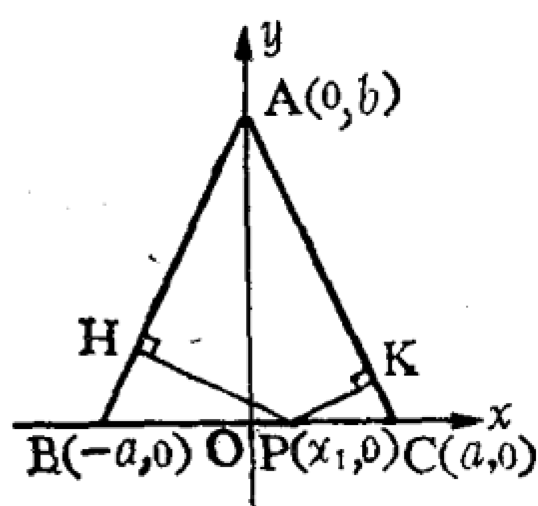


图 7-43

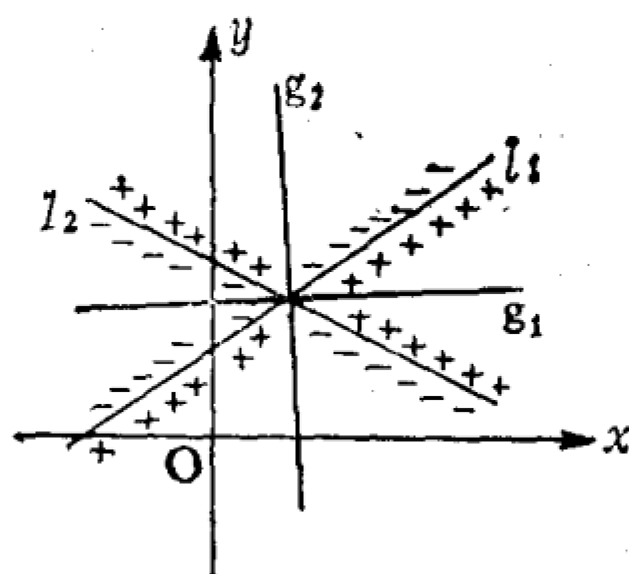


图 7-44

对于 l_1: $2x-3y+4$，若令 $x=0, y=0$，则得 $2\cdot0-3\cdot0+4=4>0$.

对于 l_2: $x+2y-6$，若令 $x=0$，$y=0$，则得 $0+2\cdot0-6=-6<0$.
因此，关于直线 l_1，原点一侧是 $2x-3y+4$ 的正区域，关于直线 l_2 原点一侧是 $x+2y-6$ 的负区域.

从而，在图上的两条平分线中，对于 g_1 上的点 (x,y)，$2x-3y+4$、$x+2y-6$ 是同号的，因此根据①式，其方程是

$$\frac{2x-3y+4}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{x+2y-6}{\sqrt{1^2+2^2}},$$

即 $$(2\sqrt{5}-\sqrt{13})x-(3\sqrt{5}+2\sqrt{13})y+(4\sqrt{5}+6\sqrt{13})=0.$$

同样地，g_2 的方程是

$$\frac{2x-3y+4}{\sqrt{13}}=-\frac{x+2y-6}{\sqrt{5}},$$

即 $$(2\sqrt{5}+\sqrt{13})x-(3\sqrt{5}-2\sqrt{13})y+(4\sqrt{5}-6\sqrt{13})=0.$$

讨论　一般地，当两条直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ 相交于一点时，它的交角的平分线的方程是

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

例题3. 试用坐标法证明，三角形三个顶角的平分线交于一点.

证明　如图 7-45 所示，设三角形为 ABC，在此三角形内部取定原点建立直角坐标系，把三边的方程用标准形表示如下：

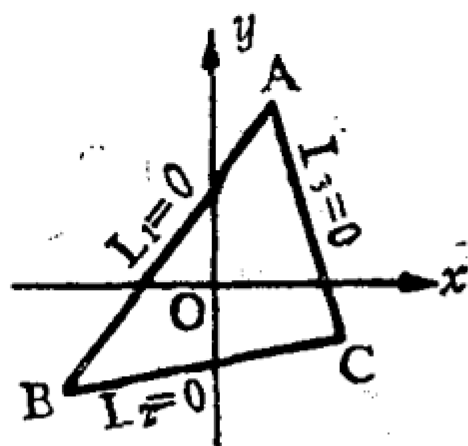


图 7-45

AB: $L_1\equiv x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0(p>0)$,
BC: $L_2\equiv x\cos\beta+y\sin\beta-q=0(q>0)$,
CA: $L_3\equiv x\cos\gamma+y\sin\gamma-r=0(r>0.)$.

对于 L_1，若令$x=0,y=0$，则变为$-p(<0)$，因此关于 AB，原点一侧是 L_1的负区域.同样地，关于 BC，原点一侧是 L_2的负区域.关于CA，原点一侧是L_3的负区域.也就是说，在 $\triangle ABC$ 内部，L_1、L_2、L_3 同号.从而，由【定理】28，角 A 的平分线 方程是

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=x\cos\gamma+y\sin\gamma-r,$$

即　　$L_1-L_3=0$.

同样，角 B、C 的平分线的方程分别是

$$L_2-L_1=0,L_3-L_2=0.$$

因为

$$(L_1-L_3)+(L_2-L_1)+(L_3-L_2)\equiv 0,$$

所以，根据【定理】24的【系】2，这三条直线交于一点.　□

注意　这里，相当于【系】2 中 $\lambda=\mu=\gamma=1$ 的情形.

1·8　两条直线的交角

【定理】30. 若令 θ 是从直线 g_1: $y=m_1x+n_1$ 的正方向到直线 g_2: $y=m_2x+n_2$ 的正方向的角，则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.$$

其中所谓直线的正方向，即是【定义】14 中所规定的方向；又当 $1+m_1m_2=0$ 时，规定 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

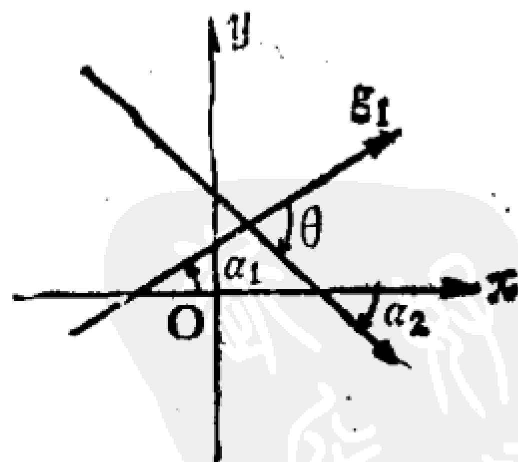


图7-46

证明　如图 7-46 所示，若令 α_1，α_2 分别为 g_1，g_2的方向角，则由【定理】15，

$$\operatorname{tg}\alpha_1=m_1,\operatorname{tg}\alpha_2=m_2.$$

一般地，若用记号$\angle(l_1,l_2)$表示从有向直线 l_1的正方向到有向直线 l_2的正方向的角，则有

$$\angle(g_1,g_2)=\angle(Ox,g_2)-\angle(Ox,g_1),$$

$$\therefore\quad \theta=\alpha_2-\alpha_1.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_1}$$

$$=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.\qquad\square$$

注意　$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$或$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$的值是不存在的，但为了方便，常常也把它叫做无穷大(用记号∞)．如果$\operatorname{tg}\theta=\frac{B}{A}$且$\theta=\frac{\pi}{2}$或$-\frac{\pi}{2}$，通常为了方便，就约定$B\neq0, A=0$．

讨论　根据【定理】30，为了使g_1，g_2平行，即是要$\theta=0$，故$m_2=m_1$是充分必要条件；为了$g_1\perp g_2$，即要$\theta=\frac{\pi}{2}$，故条件$1+m_1m_2=0$是充分必要的(参看【定理】19、20)．

【系】　若令θ是从直线g_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$的正方向到直线g_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$的正方向的夹角，则有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

证明　设α_1,α_2分别是g_1,g_2的方向角．

(i) 当$b_1\neq0, b_2\neq0$时，g_1: $y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$　g_2: $y=-\frac{a_2}{b_2}x-\frac{c_2}{b_2}$．因此，应用【定理】30，得

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{a_2}{b_2}-\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)}{1+\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}\qquad①$$

(ii) 当$b_1=0$，$b_2\neq0$时，由于$a_1\neq0$，g_1平行于y轴，从而$\alpha_1=\frac{\pi}{2}$，

因此　$\theta=\alpha_2-\frac{\pi}{2}$，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=-\frac{1}{-\frac{a_2}{b_2}}=\frac{b_2}{a_2}.$$

这可在①式中令$b_1=0$得到．

(iii) 当$b_1\neq0$，$b_2=0$时，与(ii)同样地，可在①式中令$b_2=0$得到．

(iv) 当$b_1=0, b_2=0$时，由于$a_1\neq0, a_2\neq0$，g_1, g_2都平行于y轴，从而$\theta=0$．

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\theta=0$$

这可在①式中令 $b_1=0, b_2=0$ 得到.

通过上述全部情形的分析可知，①式成立. □

讨论 与【定理】30 后面的讨论同样地考虑，可再一次得到【定理】21，23 的结果：

g_1, g_2 平行的条件是　　$a_1b_2-a_2b_1=0$，

$g_1\perp g_2$ 的条件是　　$a_1a_2+b_1b_2=0$.

§2.　圆的方程

2·1　圆的方程

【定义】1. 圆、圆心、半径　到一个定点的距离为定值的点的轨迹叫做圆. 这个定点叫做圆心. 这个定距离叫做半径.

【定理】1. 以点 (a,b) 为圆心，γ 为半径（$\gamma>0$）的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\gamma^2.$$

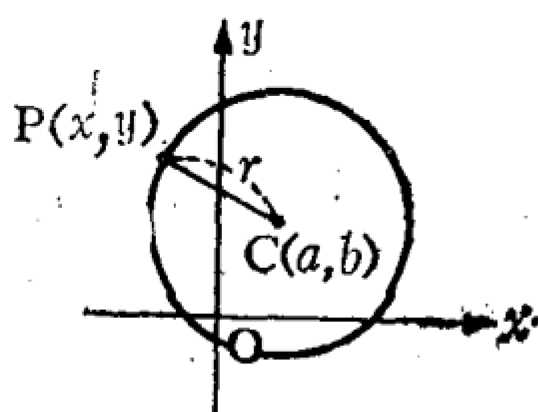


图7-47

证明　如图 7-47 所示，设圆心为 C，则满足条件的点 P 的轨迹是圆.

$$CP=\gamma \qquad ①$$

若令 P 的坐标为 (x,y)，则由 § 1.【定理】7，可把①改写成

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=\gamma.$$

由于两端都非负，故与两端平方后的式子等价

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\gamma^2. \qquad □$$

【系】　以原点为圆心、γ 为半径的圆的方程是 $x^2+y^2=\gamma^2$.

证明　在上述定理中，令 $a=0$，$b=0$ 便得证. □

注意　这个结果与 § 1.【定理】12 的例题 3 中所得的结果相同.

【定理】2. 圆的方程具有下列形式

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0. \qquad ①$$

反之，方程①在 $A^2+B^2-4C>0$ 时表示圆，

在 $A^2+B^2-4C=0$ 时表示一点，

在 $A^2+B^2-4C<0$ 时不表示图形.

证明　若令 (a,b) 为圆心，γ 为半径，则圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\gamma^2.$$

把上式变形得

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-\gamma^2)=0.$$

再令 $-2a=A$, $-2b=B$, $a^2+b^2-\gamma^2=C$，便得①式.

反之，当给定①式时，把它变形得

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2-4C), \quad ②$$

当 $A^2+B^2-4C>0$ 时，由②式得

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}\right)^2.$$

显然上式表示圆心为 $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$ 的圆.

当 $A^2+B^2-4C=0$ 时，由②式得

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=0.$$

满足上式的实数 x,y 只有 $x=-\frac{A}{2}$, $y=-\frac{B}{2}$，因而表示一点 $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

当 $A^2+B^2-4C<0$ 时，因②式左端为正或 0，而右端是负的，故这时满足②式的实数 x，y 不存在. 从而②式不表示图形. □

【定义】2. 点圆、虚圆 方程 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 在 $A^2+B^2-4C=0$ 或 $A^2+B^2-4C<0$ 的情形下，不表示圆，但为了方便起见，有时把前一种情形叫做点圆，后一种情形叫做虚圆.

【系】 x，y 的方程 $f(x,y)=0$ 表示圆(包括点圆、虚圆)的充分必要条件是下列各条件同时成立：

(1) $f(x,y)=0$ 是 x,y 的二次方程；

(2) $f(x,y)$ 中 x^2 的系数等于 y^2 的系数，$(\neq 0)$；

(3) xy 的系数等于零.

证明 根据【定理】2，圆的方程满足(1)、(2)、(3)条.

反之，满足(1)、(2)、(3)条的 x,y 的二次方程 $f(x,y)=0$ 可表示为

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d=0 \ (a\neq 0).$$

由于 $a\neq 0$，故两端可用 a 相除，写成

$$x^2+y^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}y+\frac{d}{a}=0.$$

根据【定理】2，这个方程式表示圆(包括点圆、虚圆). □

2·2　圆与直线

【定理】3. 圆与直线的公共点的个数最多是两个.

证明　圆与直线的方程，可分别表示成下列形式：

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \qquad ①$$

$$ax+by+c=0\quad (a,b\text{ 中至少有一个不是 }0). \qquad ②$$

两图形的公共点，可从联立的方程①、②求实根得到.

(i) 当 $b\neq0$ 时，由②有

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}, \qquad ③$$

把③代入①得

$$x^2+\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)^2+Ax+B\left(-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)+C=0,$$

$$\therefore\quad (a^2+b^2)x^2+(2ac+b^2A-abB)x+(c^2-bcB+b^2C)=0. \qquad ④$$

对于由此得到的一个根 x 的值，把它代入③式，可得到 y 的对应的一个值，而且，若 x 是实数，则 y 也是实数，x 是虚数，y 也是虚数. 从而，圆和直线的实交点的个数，等于由④所得到的实根 x 的个数.

因为 a,b 中至少有一个不为 0，故有 $a^2+b^2\neq0$. 从而④式是 x 的二次方程，实根的个数至多是两个.

(ii) 当 $b=0$ 时，由②知 $a\neq0$，因而

$$x=-\frac{c}{a}. \qquad ⑤$$

将上式代入①式得

$$\left(-\frac{c}{a}\right)^2+y^2+A\left(-\frac{c}{a}\right)+By+C=0,$$

$$\therefore\quad a^2y^2+a^2By+(c^2-acA+a^2C)=0. \qquad ⑥$$

由⑤式知 x 是实数. 又因 $a^2\neq0$，故⑥式是 y 的二次方程式.

以下，与前面同样考虑，可知圆与直线的公共点至多是两个.　□

【定义】3. 圆的切线、切点　当圆与直线仅仅有一公共点(重合的两点)时，这条直线叫圆的切线，公共点叫做切点.

【定理】4. 圆与直线相切的充分必要条件是，圆和直线的联立方程组具有重根. 而且这个(重)根给出了切点的坐标.

证明　正如在【定理】3 的证明中所看到的，由圆与直线的联立方程可得到

一个一元二次方程.从而，圆与直线相切就相当于此二次方程具有重根.□

讨论　综合以上分析，可写出下列等价关系：

不同的两个实根⟺在不同的两点相交；

重　　　　根⟺相切；

虚　　　　根⟺没有公共点。

【定理】5. 圆 $x^2+y^2=r^2$　①

的切线方程：

(1) 当斜率为 m 时，是 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}\,r$；

(2) 当平行于 y 轴时，是 $x=\pm r$.

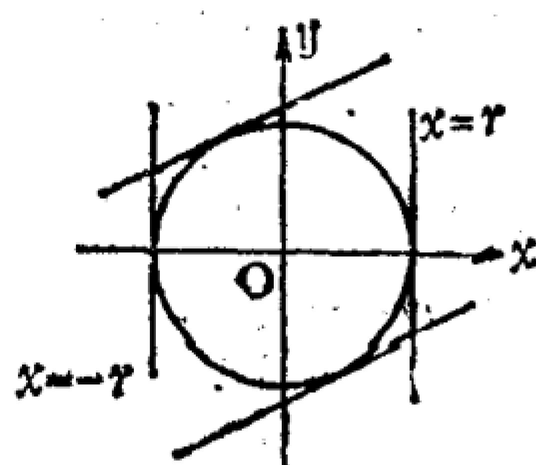


图 7-48

证明　如图 7-48 所示.

(1) 斜率为 m 的直线的方程可写成

$$y=mx+n.\qquad ②$$

把②代入①得

$$x^2+(mx+n)^2=r^2,$$

即 $(1+m^2)x^2+2mnx+(n^2-r^2)=0.$ ③

②是①的切线的充分必要条件是，③具有重根，从而

$$(mn)^2-(1+m^2)(n^2-r^2)=0,$$

$$\therefore\quad n^2=(1+m^2)r^2,\quad 即\quad n=\pm\sqrt{1+m^2}\,r.$$

把上式代入②式，得

$$y=mx\pm\sqrt{1+m^2}\,r.$$

(2) 平行于 y 轴的直线，可写成

$$x=k,\qquad ②$$

把④代入①，得　$y^2=r^2-k^2$.

为了使上式具有重根，须有

$$r^2-k^2=0,\qquad \therefore\quad k=\pm r,$$

把上述结果代入④，便得

$$x=\pm r.$$ □

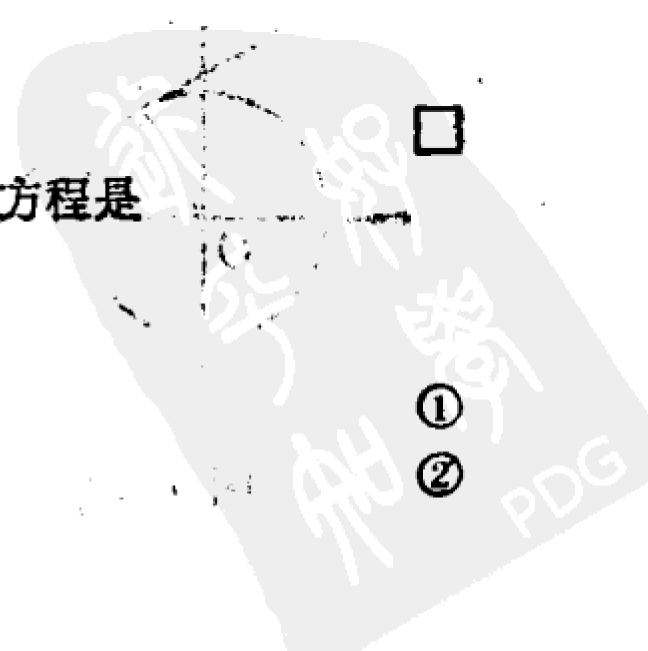
【定理】6. 过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上的一点 $P(x_1,y_1)$ 的切线方程是

$$x_1x+y_1y=r^2.$$

证明　如图 7-49 所示.因 P 点位于圆

$$x^2+y^2=r^2\qquad ①$$

上，故有　$x_1^2+y_1^2=r^2$　②



(i) 通过 P 点不平行于 y 轴的直线，若其斜率为 m，则其方程为

$$y-y_1=m(x-x_1). \qquad ③$$

由③得 $y=mx+(y_1-mx_1)$.

参看【定理】5 的证明可知，上式为圆①的切线，其充分必要的条件是

$$(y_1-mx_1)^2=(1+m^2)r^2.$$

把②代入上式得

$$(y_1-mx_1)^2=(1+m^2)(x_1^2+y_1^2),$$

$\therefore\quad m^2y_1^2+2mx_1y_1+x_1^2=0$，即 $(my_1+x_1)^2=0$.

$$\therefore\quad my_1=-x_1. \qquad ④$$

若令 $y_1=0$，则由④得 $x_1=0$，但它不满足②式. 因而 $y_1\neq 0$，故由④得

$$m=-\frac{x_1}{y_1}.$$

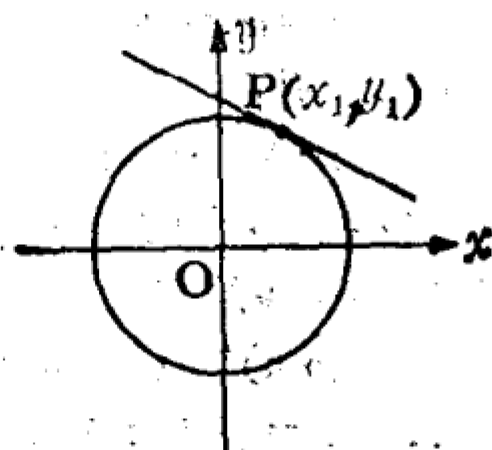


图 7-49

把上式代入③，得

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

$$\therefore\quad x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2.$$

再一次应用②，便得

$$x_1x+y_1y=r^2. \qquad ⑤$$

(ii) 当通过 P 点的切线平行于 y 轴时，根据【定理】5 可知，其方程是 $x=\pm r$. 从而，切点变为$(\pm r, 0)$.

但是在⑤中，若令 $x_1=\pm r$，$y_1=0$，则可得 $x=\pm r$. 因此，在这种情形下，切线方程也可以看作是⑤式. □

【系】 圆的切线垂直于通过切点的半径.

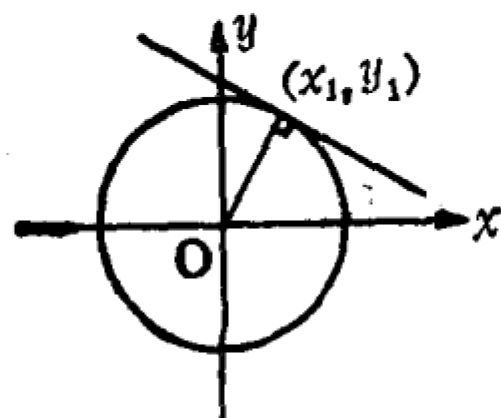


图 7-50

证明 如图 7-50 所示. 以圆心为原点作坐标系，设圆的半径为 r，则此圆的方程变为下式

$$x^2+y^2=r^2.$$

设 $P(x_1,y_1)$是圆上任意一点，则根据【定理】6 知，过 P 点的切线的方程是

$$x_1x+y_1y=r^2. \qquad ①$$

又因过 P 点的半径是连结 P 点和原点的直线，所以根据 § 1.【定理】16 的例题 1，得

$y_1x-x_1y=0$. ②

根据§1.【定理】23，两直线①、②满足正交条件

$x_1y_1+y_1(-x_1)=0$,

所以，圆的切线垂直于通过切点的的半径. □

注意 由这个性质，切线也可以定义成："圆的切线是通过圆上一点而垂直于过此点的半径的直线."

讨论 根据上述讨论，得出下列结果：

圆和直线相切⟺圆心和直线的距离等于圆的半径.

例题 从圆 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 外一点 $P(x_1,y_1)$ 作此圆的切线，设切点为 Q，试求 PQ 的长度.

解 如图 7-51 所示，由 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$，可得

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$$

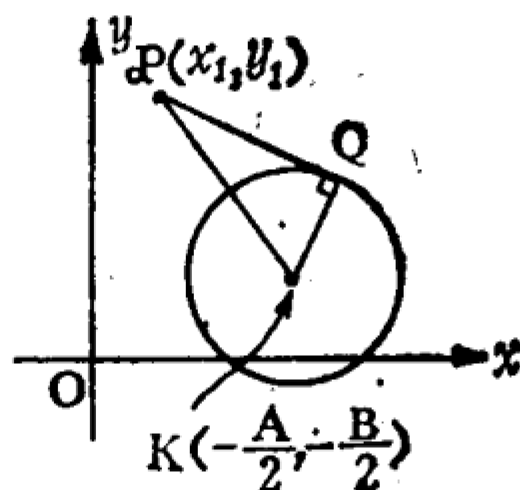


图 7-51

因此，若令此圆的圆心为 K，则 K 的坐标为 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$ 半径为 $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$. 根据上面的【系】，$\angle PQK=90°$，所以由勾股定理得

$$PQ^2=PK^2-KQ^2$$

$$=\left(x_1+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y_1+\frac{B}{2}\right)^2-\frac{A^2+B^2-4C}{4}$$

$$=x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C,$$

$$\therefore\quad PQ=\sqrt{x_1^2+y_1^2+Ax_1+By_1+C}.$$

【定义】4. 极点、极线 对于圆 $K: x^2+y^2=r^2$ 和点 $P(x_1,y_1)$，考察直线 p: $x_1x+y_1y=r^2$. 直线 p 叫做 P 点关于圆的极线，反之，P 叫做此直线 p 的极点.

注意1：当 P 点位于圆上时，P 的极线是通过 P 点的切线. 也就是说，切线是极线的特殊情形.

(2) 当 P 点是原点时，因 $x_1=y_1=0$，故 $x_1x+y_1y=r^2$ 不表示直线. 也就是说，圆心关于该圆无极线.

例题 试求直线 $ax+by+c=0\,(c\neq0)$ 关于圆 $x^2+y^2=r^2$ 的极点的坐标.

解 设 (x_1,y_1) 为极点，则由【定义】4可知，此点的极线是

$x_1x+y_1y=r^2$,

这应和所给出的直线重合，因此根据§1.【定理】22有

$$\frac{x_1}{a}=\frac{y_1}{b}=\frac{-r^2}{c},$$

$$\therefore\quad x_1=-\frac{ar^2}{c},y_1=-\frac{br^2}{c}.$$

也就是说，所求的极点是$\left(-\frac{ar^2}{c},\ -\frac{br^2}{c}\right)$.

【定理】7. 对于一个圆，若 P 点的极线 p 通过 Q 点，则 Q 点的极线 q 通过 P 点.

证明　如图 7-52 所示，设圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，P、Q 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2).

P 点的极线是 $x_1x+y_1y=r^2$，因为按题设它通过 Q 点，故有

$$x_1x_2+y_1y_2=r^2.$$

上式表示 P 点又位于 Q 点的极线 $x_2x+y_2y=r^2$ 上.　□

【系】. 通过一个定点 P 的直线，其极点的轨迹是 P 的极线.

证明　如图 7-53 所示，设 q 为通过 P 点的任意直线，q 的极点为 Q，则Q的极线是 q，P 点位于此直线上，根据【定理】7 可知，Q 位于 P 的极线 p 上.

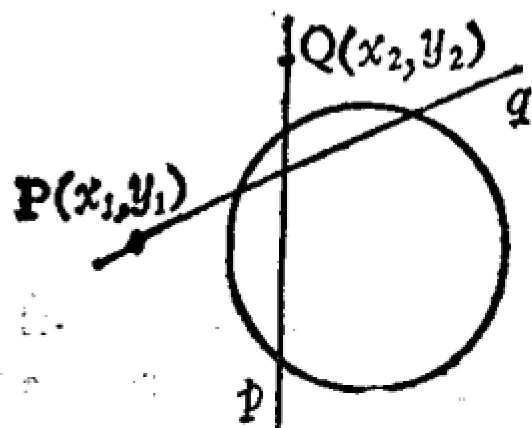


图 7-52

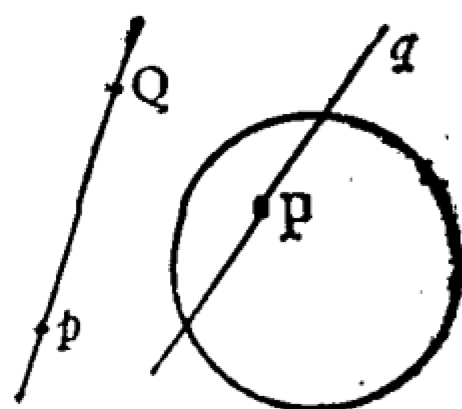


图 7-53

也就是说，适合条件的任意的点都位于 p 上.

反之，若令 Q 为 p 上的任意一点，它的极线为 q，则 Q 位于 P 的极线 p 上.从而，由【定理】7 可知，P 位于 Q 的极线 q 上，亦即 Q 适合条件.

根据以上所述得到结论：通过 P 点的直线，其极点的轨迹是 P 的极线.　□

【定理】8. 由点 P 向圆 $x^2+y^2=r^2$引两条切线，则通过两条切线切点的直线

是 P 的极线.

证明　如图 7-54 所示，设 P 的坐标为 (x_1,y_1)，两切点为 $Q(x_2,y_2)$，$R(x_3,y_3)$.

此圆在 Q 点的切线方程式是 $x_2x+y_2y=r^2$，因 P 位于此切线上，故有

$$x_2x_1+y_2y_1=r^2.$$

这表示 Q 点位于 P 的极线 $x_1x+y_1y=r^2$ 上.

也就是说，P 的极线通过 Q 点. 同样，P 的极线通过 R 点.

由于 Q、R 是不同的两点，故直线 QR 是 P 的极线. □

【系】　通过圆内一点 P 的弦的两端作圆的切线，其交点的轨迹是 P 的极线.

证明　如图 7-55 所示. 根据【定理】8 可知，在过 P 点的弦的两端作的切线，其交点是此弦的极点. 从而，根据【定理】7 的【系】知，这样的极点的轨迹是 P 的极线. □

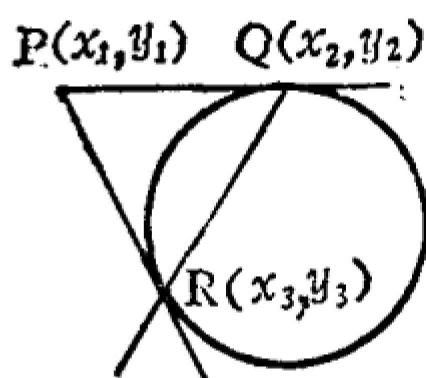


图 7-54

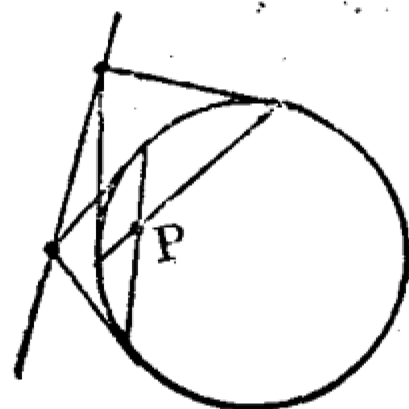


图 7-55

2.3 通过圆与圆或圆与直线交点的圆

【定理】9　若圆 $K(x,y)\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 与直线 $L(x,y)\equiv ax+by+c=0$ 具有两个交点，则方程 $K+\lambda L=0$（λ 是常数）在适当选择 λ 时，表示通过这两个交点的任意的圆.

证明　如图 7-56 所示，因为

$$\begin{aligned}K(x,y)+\lambda L(x,y)=x^2+y^2\\+(A+\lambda a)x+(B+\lambda b)y\\+(C+\lambda c),\end{aligned}$$

所以根据【定理】2 的【系】，方程 $K+\lambda L=0$ 表示圆.

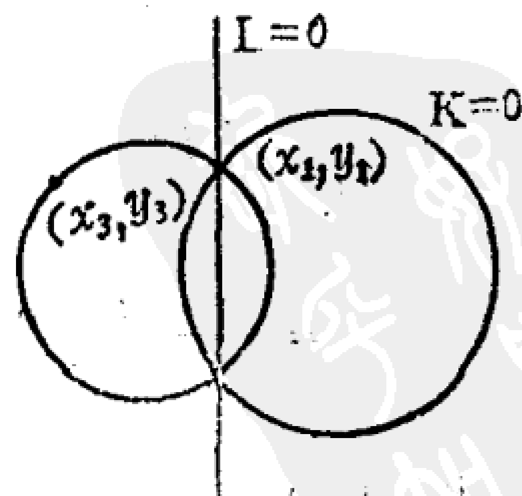


图 7-56

设 (x_1,y_1) 是圆和直线的一个交点，则

$$K(x_1,y_1)=0,\ L(x_1,y_1)=0$$

同时成立.因而，不论 λ 值如何变化，都有

$$K(x_1,y_1)+\lambda L(x_1,y_1)=0.$$

即上式都表示圆 $K+\lambda L=0$ 通过点(x_1,y_1).

同样地，此圆也通过圆 $K=0$ 和直线 $L=0$ 的另一个交点.

其次，若令点(x_3,y_3)是不在直线 $L=0$ 上的任意一点，则有 $L(x_3,y_3)\neq 0$.

如果选择常数λ使

$$K(x_3,y_3)+\lambda L(x_3,y_3)=0,\quad 即\ \lambda=-\frac{K(x_3,y_3)}{L(x_3,y_3)}.$$那么,圆$K+\lambda L=0$ 表示通过 原来 的 圆 $K=0$ 和直线 $L=0$ 的两交点以及点(x_3,y_3) 的圆

□

【定义】5. 两圆相切　若两个圆有一个公共点，则称这两个圆相切.

【定理】10. 若圆 $K\equiv x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 与 直 线 $L\equiv ax+by+c=0$ 相切，则方程 $K+\lambda L=0$ 在适当选择常数 λ 时,可表示在此切点与圆 $K=0$ 相切的任意的圆.

证明　与【定理】9 的情形同样，方程 $K+\lambda L=0$ 表示一个圆. 此圆通 过圆 $K=0$ 和直线 $L=0$ 的公共点(现在即切点).

假设圆 $K=0$ 的圆心为 C_1，半径为 r_1，圆 $K+\lambda L=0$ 的圆心为 C_2，半径为 r_2(图 7-57)，则参照【定理】2及【定理】9，有

$$C_1\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right),\ r_1^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4};$$

$$C_2\left(-\frac{A+\lambda a}{2},\ -\frac{B+\lambda b}{2}\right),$$

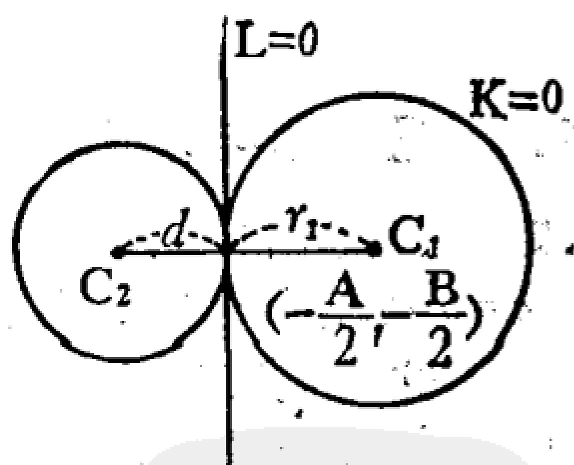


图 7-57

$$r_2^2=\frac{(A+\lambda a)^2+(B+\lambda b)^2-4(C+\lambda c)}{4}$$

$$=\frac{A^2+B^2-4C+2(Aa+Bb-2c)\lambda+\lambda^2(a^2+b^2)}{4}.$$

由于圆 $K=0$ 和直线 $L=0$ 相切，所以由 C_1 向直线 $L=0$ 所作的垂线，其长度等于 r_1.应用 § 1.【定理】28 的【系】2，得

$$\left(\frac{\left|-\frac{A}{2}a-\frac{B}{2}b+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4},$$

$$\therefore\quad (Aa+Bb-2c)^2=(a^2+b^2)(A^2+B^2-4C).\qquad ①$$

若令 d 是从 C_2 向直线 $L=0$ 所作的垂线的长度，则

$$d^2=\left(\frac{\left|-\frac{A+\lambda a}{2}a-\frac{B+\lambda b}{2}b+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2$$

$$=\frac{\{Aa+Bb-2c+\lambda(a^2+b^2)\}^2}{4(a^2+b^2)}$$

$$=\frac{(Aa+Bb-2c)^2+2(Aa+Bb-2c)(a^2+b^2)\lambda+\lambda^2(a^2+b^2)^2}{4(a^2+b^2)}.$$

应用①式，又得

$$d^2=\frac{A^2+B^2-4C+2(Aa+Bb-2c)\lambda+\lambda^2(a^2+b^2)}{4}$$

$$=\bar{r}_2^2.$$

因而 $d=\bar{r}_2$，圆 $K+\lambda L=0$ 与直线 $L=0$ 相切.(参看【定理】6【系】的讨论.)

从而，圆 $K=0$ 与圆 $K+\lambda L=0$ 在同一点与直线 $L=0$ 相切，这就证明了两圆相切. □

【定理】11. 设两个圆 $K_1(x,y)\equiv x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$，$K_2(x,y)\equiv x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于两点.对于不同时为零的常数 λ,μ，方程

$$\lambda K_1+\mu K_2=0,$$

(1) 当 $\lambda+\mu\neq0$ 时，表示通过两个圆交点的圆.

(2) 当 $\lambda+\mu=0$ 时，表示通过两个圆交点的直线(即公共弦所在的直线).

证明 设 (x_1,y_1) 是两个圆 $K_1=0$，$K_2=0$ 的一个交点，则

$$K_1(x_1,y_1)=0,\quad K_2(x_1,y_1)=0$$

同时成立.从而，不论 λ,μ 的值如何，只要 λ,μ 不同时为零，方程 $\lambda K_1+\mu K_2=0$ 所表示的图形都通过点 (x_1,y_1).

同样，这图形也通过两个圆的另一个交点.其次，因为

$$\lambda K_1+\mu K_2=(\lambda+\mu)(x^2+y^2)+(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)=0,$$

故当 $\lambda+\mu\neq0$ 时，根据【定理】2 的【系】可知，它表示圆.

当 $\lambda+\mu=0$ 时，$\lambda\neq0$.这时

$$\lambda K_1+\mu K_2=\lambda(A_1-A_2)x+\lambda(B_1-B_2)y+\lambda(C_1-C_2)=0,$$

$$\therefore\quad (A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(C_1-C_2)=0.$$

若 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$，则原来的两圆的圆心重合，这与假设矛盾.

从而，A_1-A_2，B_1-B_2中至少有一个不为 0.因此 $\lambda K_1+\mu K_2=0$ 表示两圆公共弦所在的直线. □

【系】 设两个圆 $K_1\equiv x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$，$K_2\equiv x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0$ 相交于两点.方程

$$K_1+kK_2=0\ (k\ 是常数),$$

(1) 当 $k\neq-1$ 时，表示通过二圆交点的圆.

(2) 当 $k=-1$ 时，表示通过二圆交点的直线(即公共弦 所在的直线)

略证 在【定理】11 中令 $\lambda=1$，$\mu=k$ 即得证. □

【定义】6. 根轴 当两个圆 $K_1\equiv x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0$，$K_2\equiv x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0$ 不同心时，直线 $K_1-K_2=0$ 叫做两个圆的根轴.

例题 试证明，相离的两个圆，其根轴是使得向两圆所作的切线长度相等的点的轨迹.

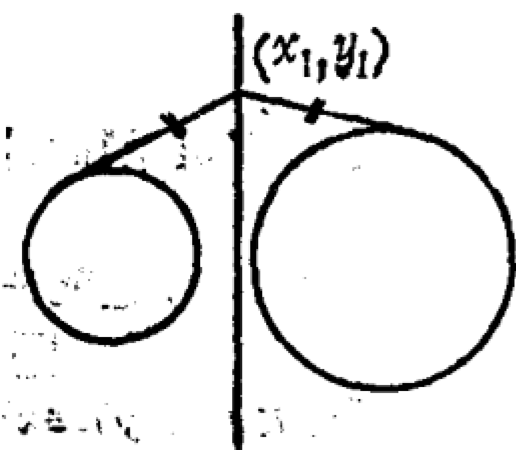


图 7-58

证明 如图 7-58 所示，设相离两圆的方程分别是

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2=0.$$

根据【定理】6 的例题可知，由点(x_1,y_1)向两圆所作的切线，其长度分别为

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+A_1x_1+B_1y_1+C},$$
$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+A_2x_1+B_2y_1+C_2}.$$

从而，使两者相等的点的轨迹方程，以(x_1,y_1)作流动坐标便是

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+A_1x_1+B_1y_1+C_1}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+A_2x_1+B_2y_1+C_2}.$$

因为两端都非负，故平方后等价.再有，如果把流动坐标变换为(x,y)，则得

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1=x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2.$$

此即两个圆的根轴. □

§3. 二次曲线

3·1 抛物线.椭圆.双曲线的方程

【定义】1. 抛物线及其焦点.准线.轴.顶点 如图7-59所示,平面内到一个定点和不通过那点的一条定直线的距离相等的动点的轨迹,叫做抛物线.此定点叫做抛物线的焦点,定直线叫做抛物线的准线.通过焦点而垂直于准线的直线叫做抛物线的主轴(或简称轴).轴和抛物线的交点叫做抛物线的顶点.

【定理】1. 设抛物线的轴为 x 轴,顶点为直角坐标轴的原点,焦点的坐标为 $(p,0)(p\neq0)$,则此抛物线的方程是

$$y^2=4px.$$

证明 仍如图 7-59 所示,准线与轴垂直.又因顶点是抛物线上的点,所以原点是距焦点和准线的距离相等的点.因而,准线的方程是 $x=-p$.

设焦点为 F,由平面上的一点 P 向准线作垂线,垂足为 H,这时满足 $\overline{dH}=\overline{PF}$ 的点 P,其轨迹是抛物线.

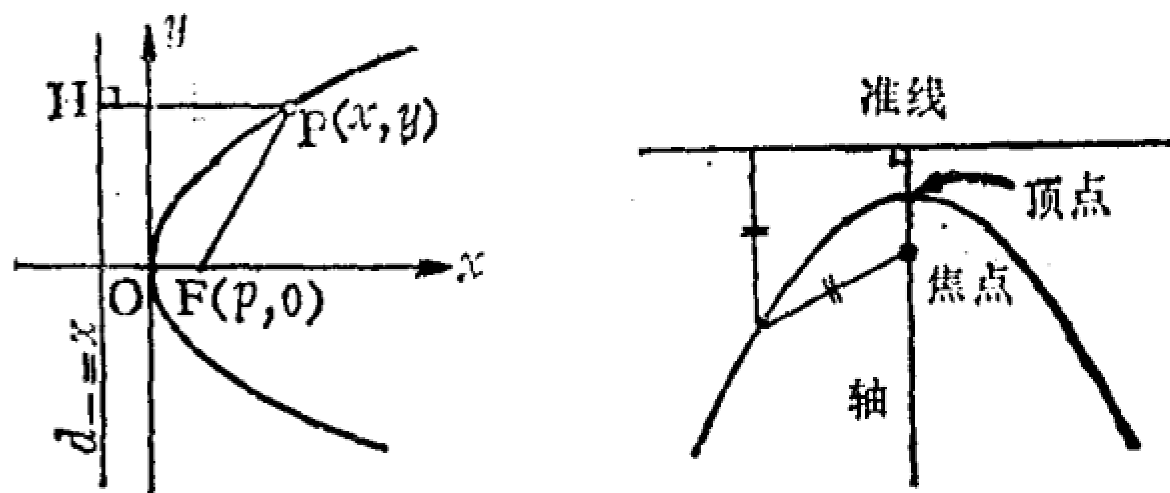


图 7-59

设 P 的坐标为 (x,y),则

$$\overline{PH}=|x-(-p)|=|x+p|,$$

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-p)^2+y^2}.$$

因而.抛物线的方程是

$$|x+p|=\sqrt{(x-p)^2+y^2}.$$

由于两端都非负,故此方程与两端平方后的方程等价.因而

$$(x+p)^2=(x-p)^2+y^2,$$

$$\therefore\quad y^2=4px.$$ □

【系】1. 方程 $y^2=4px(p\neq0)$ 表示以 x 轴为轴,点 $(p,0)$ 为焦点,直线 $x=-p$ 为准线的抛物线.

【系】2. 方程 $x^2=4py(p\neq 0)$ 表示以 y 轴为轴，点 $(0,p)$ 为焦点，直线 $y=-p$ 为准线的抛物线.

略证　与【系】1 的情形交换 x,y 即得.　□

【定义】2. 椭圆及其焦点.长轴.短轴.顶点　如图 7-60 所示，平面内到两个定点的距离之和为常数的动点的轨迹，叫做椭圆；此二定点叫做椭圆的焦点；通过两焦点的直线被椭圆截下的线段叫做长轴；通过长轴中点而垂直于长轴的直线被椭圆截下的线段叫做短轴.长、短轴的端点，叫做椭圆的顶点.

【定理】2. 在图 7-61 的坐标系下，焦点为 $F(c,0)$，$F'(-c,0)$，长轴之长为 $2a$（显然 $a>c>0$）的椭圆，其方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

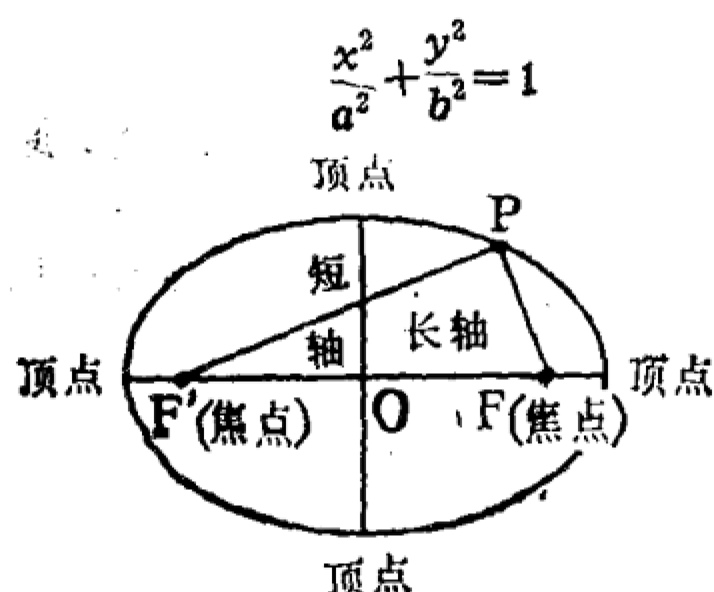


图7-60

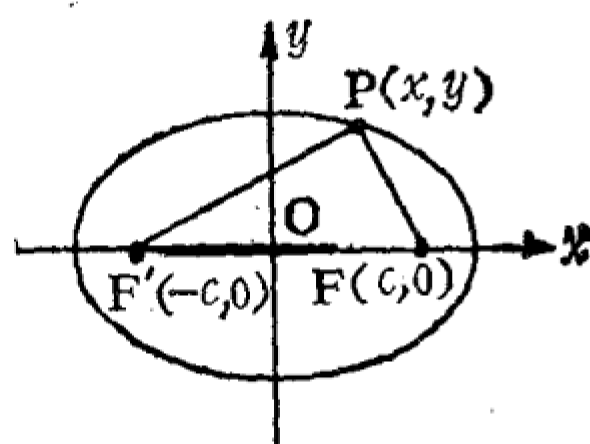


图7-61

$$PF+PF'=\text{常数}$$

其中　$b^2=a^2-c^2$，$b>0$.

证明　设 $P(x,y)$ 是椭圆上的任意一点，则有

$$\overline{PF}=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\quad \overline{PF'}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

因而

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,\qquad ①$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}}=\frac{1}{2a}.$$

有理化分母，得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{-4cx}=\frac{1}{2a},\ ^*$$

※　细心的读者会注意到，严格地说，这里应设 $x\neq 0$. 当 $x\neq 0$ 时，由①易得③
——译注

$$\therefore\quad \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\frac{2c}{a}x \qquad ②$$

由①、②式得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x. \qquad ③$$

两端平方

$$(x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2, \qquad ④$$

$$\therefore\quad x^2-2cx+c^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2.$$

即 $$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2,$$

由于 $a^2-c^2>0$，所以可令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，于是得

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ⑤$$

反之，若令 $P(x,y)$ 是满足⑤式的任意一点，则 x,y 满足④式.

由⑤式知，$0\leqslant\frac{x^2}{a^2}\leqslant1$，　$\therefore\quad -1\leqslant\frac{x}{a}\leqslant1$.

由于 $a>c>0$，故有　$$-a<\frac{c}{a}x<a, \qquad ⑥$$

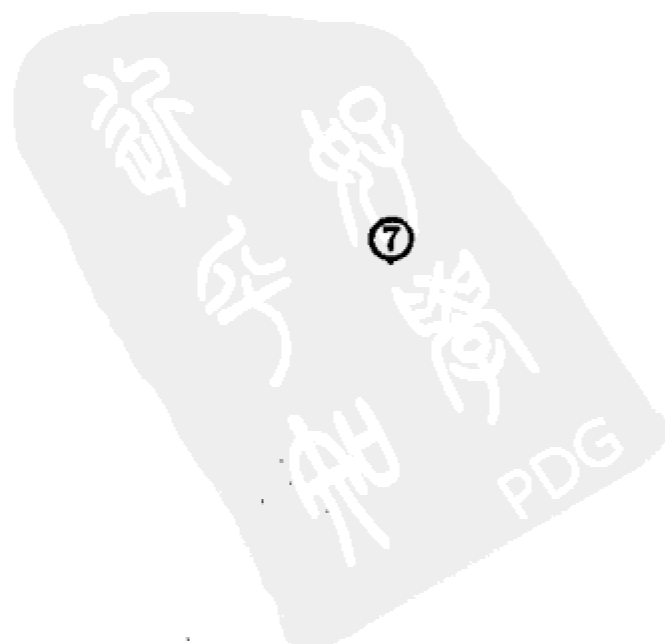
$$\therefore\quad a-\frac{c}{a}x>0.$$

从而，若取④式两端的正的平方根，便得③式.

即 $$\overline{PF}=a-\frac{c}{a}x. \qquad ⑦$$

又在④式两端加上 $4cx$，得到

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2.$$



但由⑥式知，$a+\frac{c}{a}x>0$，因而，若取上式两端的正的平方根，则得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x,$$

即 $$\overline{PF'}=a+\frac{c}{a}x. \quad ⑧$$

由⑦、⑧式得

$$\overline{PF}+\overline{PF'}=2a.$$

P 点位于椭圆上.

根据以上讨论可知，这个椭圆的方程是⑤，

即 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad □$$

【系】1. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其长轴位于 x 轴上，长度为$2a$，短轴位于 y 轴上，长度为 $2b$，顶点是$(a,0)$，$(-a,0)$，$(0,b)$，$(0,-b)$，焦点是 $(\sqrt{a^2-b^2},0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},0)$.

略证 根据【定理】2，$c=\sqrt{a^2-b^2}$. □

【系】2. 椭圆关于连接两焦点的线段的中点是中心对称的，关于长轴及短轴是轴对称的.

略证 如果适当地选定坐标系，则椭圆的方程可写为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

这时，连结两焦点线段的中点是原点，长轴位于 x 轴上，短轴位于 y 轴上.若(x,y)是椭圆上的任意一点，则点$(-x,-y)$，$(x,-y)$，$(-x,y)$仍然位于椭圆上.因而，椭圆对原点、x 轴、y 轴都是对称的. □

【系】3. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$$

表示在 x 轴上具有长度为 $2a$ 的短轴，在 y轴上具有长度为 $2b$ 的长轴，且焦点是$(0,\sqrt{b^2-a^2})$，$(0,-\sqrt{b^2-a^2})$的椭圆，如图 7-62 所示.

略证 在【系】1 中，把 x 轴和 y 轴交换即可. □

例题 对于椭圆，如果画出了长轴和短轴，试说明求焦点的作图法。

解 对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其长轴为 $2a$，短轴为 $2b$，设焦点为$(\pm c,0)$，则因 $a^2-b^2=c^2$，故可考虑用下列作图法(图 7-63)。

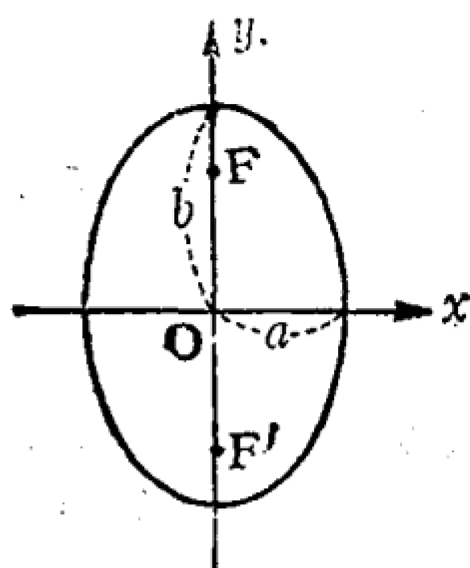


图 7-62

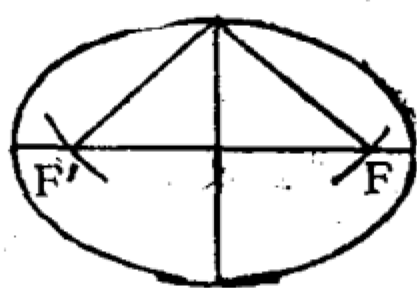


图 7-63

(1) 以短轴的端点为圆心，长轴的一半为半径画圆.

(2) 所画的圆必与长轴交于两点，这两点就是焦点.

【定义】3. 椭圆的偏心率(又叫离心率) 在椭圆中，我们把 $\frac{\text{焦点间的距离(焦距)}}{\text{长轴的长度}}$ 叫做偏心率，通常用 e 表示.

例题1. 用 a，b 表示椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的偏心率，再用 a,b,e 表示焦点的坐标.

解 (i) 当 $a>b$ 时，长轴的长度是 $2a$，焦距是$\sqrt{a^2-b^2}-(-\sqrt{a^2-b^2})=2\sqrt{a^2-b^2}$，因此$e=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{2a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

这时，由于$\sqrt{a^2-b^2}=ae$，所以焦点的坐标是$(ae,0)$及$(-ae,0)$. (或简写成$(\pm ae,0)$).

(ii) 当 $a<b$ 时，长轴为 $2b$，焦距是 $2\sqrt{b^2-a^2}$. 以下，与(i)同样地有

$$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}，\text{焦点}(0,\pm be).$$

归结起来，即是

$a>b$ 时，$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，焦点$(\pm ae,0)$.

$a<b$ 时，$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$，焦点$(0,\pm be)$.

例题2．设 e 是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的偏心率，$P(x_1,y_1)$是椭圆上的一点，$F(ae,0)$，$F'(-ae,0)$是焦点；试用$a,e,x_1$表示 PF及 PF'.

解　由【定理】2 的证明中的⑦、⑧式，因$\frac{c}{a}=e$，故得

$$PF=a-ex_1,PF'=a+ex_1.$$

【定义】4．双曲线及其焦点、主轴、副轴、顶点　如图 7-64 所示，平面内到二定点的距离之差的绝对值为常数的动点的轨迹，叫做双曲线，此二定点叫做双曲线的焦点，通过两焦点的直线叫做主轴(又称焦轴或实轴)，通过连结两焦点的线段的中点而垂直于主轴的直线，叫做副轴(又称共轭轴，或虚轴)，主轴和曲线的交点叫做双曲线的顶点。

【定理】3．在图 7-64 的坐标系下，焦点为 $F(c,0)$，$F'(-c,0)$ $(c>0)$，其上任一点到两焦点的距离之差的绝对值为 $2a$($a>0$ 为常数、显然 $c>a$)的双曲线，其方程如下

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中　$b^2=c^2-a^2$，$b>0$。

证明　如图 7-65 所示，设 $P(x,y)$是这个双曲线上的任意一点，则

$$PF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

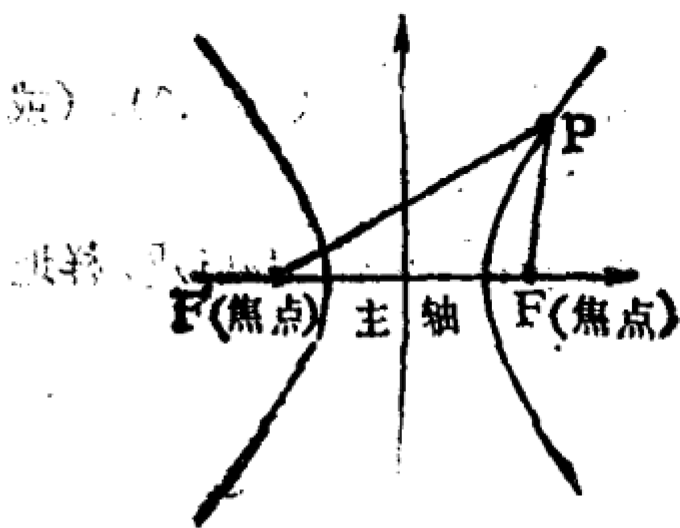


图 7-64

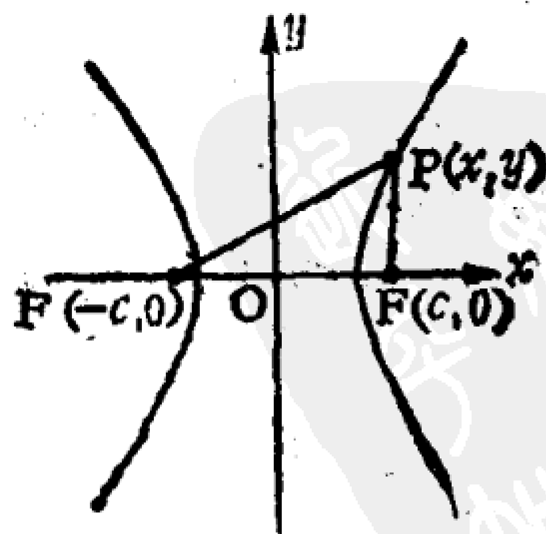


图 7-65

$$PF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$\therefore \left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a,$$

即　$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a. \quad ①$$

以下，与【定理】2 的证明同样，取两端的倒数，再有理化分母，经整理后得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\mp\frac{2c}{a}x. \quad ②$$

其中①和②式的正(负)号是相对应的，

由①、②式得

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm\left(a-\frac{c}{a}x\right),$$

$$\therefore \quad (x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2. \quad ③$$

$$\therefore \quad \frac{c^2-a^2}{a^2}x^2-y^2=c^2-a^2.$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (c^2-a^2=b^2). \quad ④$$

反之，设 $P(x, y)$ 是满足④式的任意一点，则 x，y 满足③式、在③式两端加上 $4cx$，得

$$(x+c)^2+y^2=\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2. \quad ⑤$$

由④式，$1\leqslant\frac{x^2}{a^2}$，$\therefore \frac{x}{a}\leqslant -1$ 或 $1\leqslant\frac{x}{a}$.

由于 $0<a<c$，所以 $\frac{c}{a}x<-a$，或 $a<\frac{c}{a}x$.

当 $\frac{c}{a}x<-a$ 时，因 $a-\frac{c}{a}x>0$，$a+\frac{c}{a}x<0$，

故由③式得 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$，$\therefore PF=a-\frac{c}{a}x$.

由⑤式$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-a-\frac{c}{a}x$，∴ $PF'=-a-\frac{c}{a}x$。

$$\therefore \quad PF-PF'=2a \qquad ⑥$$

当 $a<\frac{c}{a}x$ 时，因 $a-\frac{c}{a}x<0$，$a+\frac{c}{a}x>0$，

故由③式得$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-a+\frac{c}{a}x$，

$$\therefore \quad PF=-a+\frac{c}{a}x.$$

由⑤式$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x$，∴ $PF'=a+\frac{c}{a}x$。

$$\therefore \quad PF'-PF=2a. \qquad ⑦$$

由⑥、⑦式得$|PF-PF'|=2a$，即 P 点满足条件。

因而，所求的双曲线的方程是④式。 □

【系】1．方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$$

表示主轴在 x 轴上，付轴在 y 轴上，顶点是点（$\pm a$，0），焦点是点（$\pm\sqrt{a^2+b^2}$，0)的双曲线。

【系】2．双曲线关于连结两焦点的线段的中点（主轴与副轴的交点）是中心对称的，关于主轴及副轴是轴对称的。

略证　与【定理】2的【系】2同样地证明。 □

【系】3．方程

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$$

表示主轴在 y 轴上，付轴在 x 轴上，顶点是点$(0,\pm b)$，焦点是点$(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2})$的双曲线，如图7—66所示。

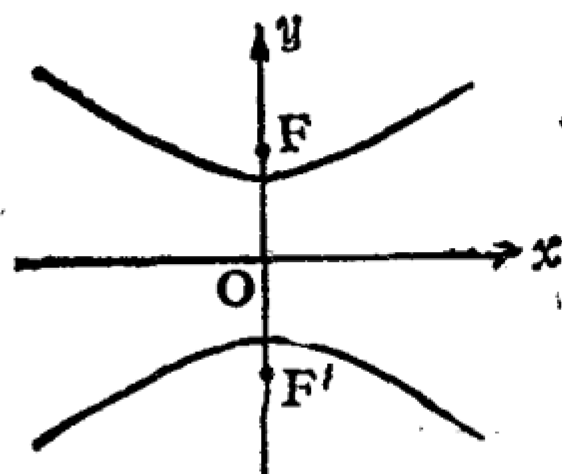


图 7–66

略证　只要把【系】1 的 x 轴、y 轴交换即可。 □

【定义】5．共轭双曲线　两个双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，叫做互为共轭的双曲线。

【定义】6．双曲线的偏心率　对于双曲线，$\frac{\text{焦点间的距离(焦距)}}{\text{顶点间的距离}}$叫做偏心率，通常用$e$表示。

例题1．试用a，b表示双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$及$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的偏心率$e$，再用$a$，$b$，$e$表示焦点的坐标。

解　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的顶点是$(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$，焦点是$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，因此$e=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$。

这时，$\sqrt{a^2+b^2}=ae$，因此两焦点是$(ae,\ 0)$，$(-ae,\ 0)$。

同样，对于$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，有

$$e=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}，\text{两焦点是}(0,\ be),(0,\ -be)。$$

例题2．设e是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的偏心率，$P(x_1,y_1)$是双曲线上的一点，$F(ae,\ 0)$，$F'(-ae,\ 0)$是焦点，试用$a$，$e$，$x_1$表示$PF$及$PF'$。

解　在【定理】3中，因为$c=\sqrt{a^2+b^2}$所以$\frac{c}{a}=e$。因而，根据证明该定理时所用的式子，

当$x_1>0$时，$PF=-a+ex_1$，$PF'=a+ex_1$。
当$x_1<0$时，$PF=a-ex_1$，$PF'=-a-ex_1$。

【定义】7.　渐近线　如图 7-67 所示，设 P 为某曲线上的动点，由 P 向某直线 g 作垂线，垂足为 H，如果 P 逐渐远离原点 O 到无限远时，垂线长度 PH 趋近于 0 即 $\lim\limits_{OP\to\infty} PH=0$ 成立，则直线 g 叫做此曲线的渐近线。

【定理】4. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 以两条直线 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ 作为它的两条渐近 线。

证明　如图 7-68 所示，从双曲线上的一点 $P(x_1,\ y_1)$ 向直线 $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ 作垂线，垂足为 H。根据 § 1.【定理】28的【系】2，有

$$PH=\frac{\left|\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\frac{\left|\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left|\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right|}.$$

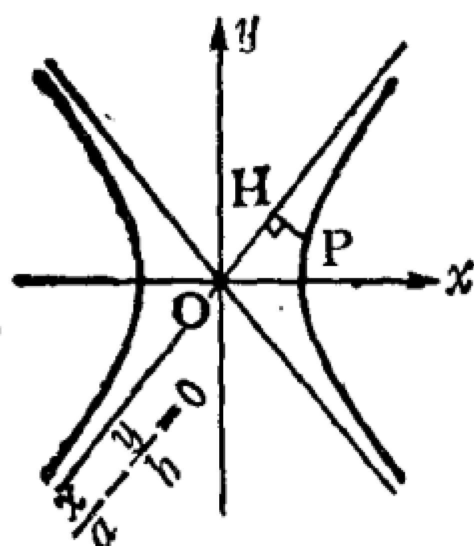


图 7-67

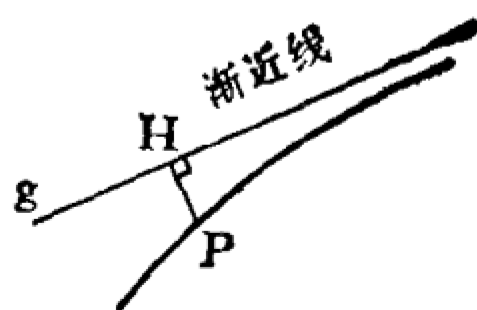


图 7-68

但 P 点位于双曲线上，因此有 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，代入前一式得

$$PH=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\left|\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right|}.$$

因 x_1，y_1 同号，当 $OP\to\infty$ 时，$\left|\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right|\to\infty$，

$\therefore \lim\limits_{OP\to\infty} PH = 0$

从而，直线$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$是渐近线。

同样可证明，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$也是渐近线。 □

注意1. 由于双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$关于$x$轴是对称的，所以$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$关于$x$轴对称的直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$当然也是渐近线。

2. 把$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$合起来可写成

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0,$$

即 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$（参看§4.【定理】8）。

【系】 互为共轭的双曲线，其渐近线一致。

略证 双曲线$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线是$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$，

即$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$。 □

例题1. 试证明，到两条相交定直线的距离之积为定值$k(\neq 0)$的点，其轨迹是以这两个定直线为渐近线的双曲线。

证明 设l_1，l_2为两条相交定直线，把l_1，l_2两夹角的平分线各取为x，y轴，则两直线的方程分别为

$$l_1: y=mx,\quad l_2: y=-mx.$$

设(x, y)为P点的坐标，由P向l_1，l_2作垂线，垂足分别是H，K（图7－69）。则由§1.【定理】28的【系】2，有

$$PH=\frac{|y-mx|}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$PK=\frac{|y+mx|}{\sqrt{1+m^2}},$$

由假设，

$$\frac{|y-mx|}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{|y+mx|}{\sqrt{1+m^2}}=k,$$

即　$y^2-m^2x^2=\pm k(1+m^2)$.

这表示以两条直线$y=mx$，$y=-mx$（即l_1，l_2）作为渐近线的双曲线。

例题2. 试说明在图上求双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ①$$

及 $$\frac{-x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ②$$

的渐近线及焦点的方法。

解　(1) 如图7－70所示，过四点$(\pm a, 0)$，$(0, \pm b)$引平行于坐标轴的直线，构成长方形，暂且把它称为辅助长方形。

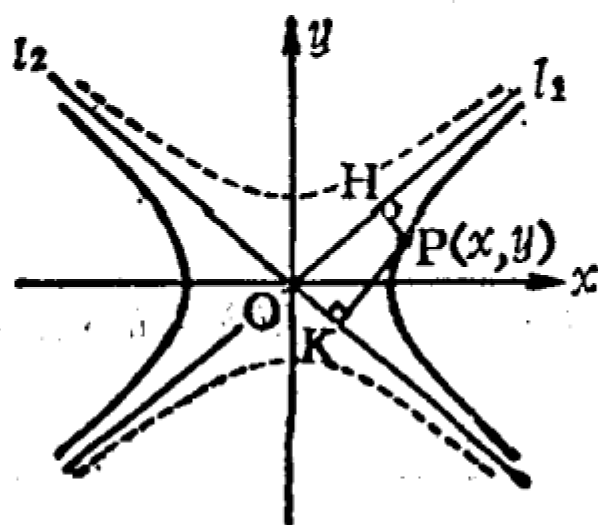


图 7-69

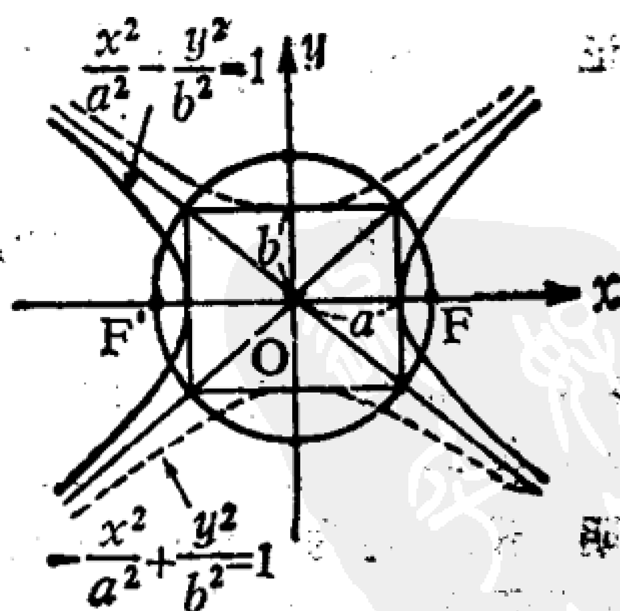


图 7-70

(2) 辅助长方形的对角线是渐近线(根据【定理】4 及其【系】)。

(3) 辅助长方形的外接圆与 x 轴的交点是双曲线①的焦点，与 y 轴的交点是双曲线②的焦点(根据【定理】3的【系】1，3)。

【定义】8. 直角双曲线 二渐近线正交的双曲线叫做直角双曲线(或等轴双曲线)。

例题 试证明：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 即 $x^2-y^2=a^2$ $(a>0)$ 是直角双曲线。

解 根据【定理】4，此双曲线的渐近线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=0$ 即 $y=x$ 与 $y=-x$，它们显然正交。 □

【定义】9. (固有)二次曲线 抛物线、椭圆、双曲线，统称为固有二次曲线。但只要不引起混淆，按惯例，通常简称为二次曲线。

注意1. 抛物线、椭圆、双曲线的方程等用语，盖源于对 x，y 是二次的方程，反之，正如从§4.【定理】14 所知道的，x，y 的二次方程除表示一点或二直线(重合、平行、相交)的情形外，皆表示抛物线、椭圆(包括圆)、双曲线中任何一个，即表示固有二次曲线。

2. 因直线方程是一次的，故把它叫做一次曲线。

【定义】10. 二线曲线的标准形 下列方程分别叫做抛物线、椭圆、双曲线的标准形。

$$y^2=4px \quad (p>0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^3}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

【定义】11. 椭圆、双曲线的中心 椭圆、双曲线对连结两焦点的线段的中点都是对称的。(参看【定理】2 的【系】2 及【定理】3 的【系】2)。这种点叫做该二曲线的中心。

注意 抛物线对任何点都不是中心对称的。

【定义】12. 有心二次曲线、无心二次曲线 椭圆和双曲线统称有心二次曲线．抛物线叫做无心二次曲线。

3.2 二次曲线与直线

本节理论的叙述方法，和"2.2　圆与直线"的情形几乎是同样的。

【定理】5. 二次曲线与任意一直线的交点，至多有两个。

证明　因二次曲线用二次方程表示，直线用一次方程表示，故由§2.【定理】3同样的理由可知，交点的个数至多是两个。　□

【定义】13. 二次曲线的切线和切点　当二次曲线和一直线仅仅有一个公共点时，这直线叫做该二次曲线的切线，公共点叫做切点。

【定理】6. 二次曲线和直线相切的充分必要条件是它们的联立方程具有重根，并且这个根给出了切点的坐标。

证明　仿§2.【定理】4同样可证。　□

注意　§2.【定理】4的讨论，也可照样地用于二次曲线的场合，即

实根$\Longleftrightarrow$相交，

重根$\Longleftrightarrow$相切，

虚根$\Longleftrightarrow$无交点。

【定理】7. 各二次曲线的平行于 y 轴的切线，其方程如下：

(曲　线)		(切　线)
抛物线	$y^2=4px(p\neq0)$，	$x=0$，
椭　圆	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，	$x=a$，$x=-a(x=\pm a)$，
双曲线	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$．	$x=a,x=-a(x=\pm a)$．

证明　平行于 y 轴的直线，其方程可写成下列形式

$$x=k(k\text{ 是常数}),\qquad ①$$

(i) 抛物线的情形　$y^2=4px$，　②

由①、②式消去 x 得　$y^2=4pk$．

上式具有重根的充分必要条件是 $4pk=0$．由于 $p\neq0$，所以 $k=0$，把它代入①式便得

切线方程　$x=0$．

(ii) 椭圆的情形　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，　③

由①、③式消去 x 得

$$\frac{k^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\text{，即 } y^2=b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right).$$

上式具有重根的充分必要条件是$b^2\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)=0$.因为 $b^2\neq0$,所以$1-\frac{k^2}{a^2}=0$,　∴　$k=\pm a$.把它代入①式便得　$x=\pm a$.　□

(iii) 双曲线的情形　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,　④

由①、④消去 x，与(ii)同样地得到 $b^2\left(\frac{k^2}{a^2}-1\right)=0$,由此得$k=\pm a$,再由①式得 $x=\pm a$.　□

注意　在这个定理中,切点的坐标,对于 $y^2=4px$ 是(0,0),对于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是$(\pm a,0)$,对于$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 是$(\pm a,0)$.

【定理】8. 二次曲线的斜率为 m 的切线，其方程如下：

(曲　　线)		(切　　线)
抛物线	$y^2=4px(p\neq0)$,	$y=mx+\frac{p}{m}\ (m\neq0)$,
椭　圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$,	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$,
双曲线	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$.	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$,

$\left(|m|>\frac{b}{2}\right)$.

证明　斜率为 m 的直线的方程是

$$y=mx+n,\quad ①$$

(i) 抛物线的情形(图 7-71)：$y^2=4px$,②

由①、②式消去 y 得$(mx+n)^2=4px$.

∴　$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$.

当$m\neq0$时，上式是二次方程，所以为使其具有重根,充分必要的条件是其判别式等于零、因而

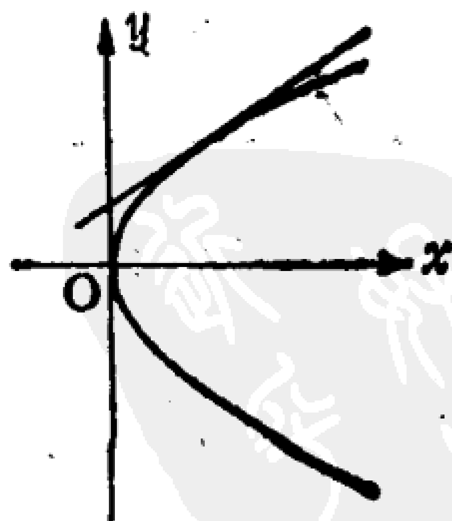


图 7-71

$$(mn-2p)^2-m^2n^2=0,$$

$\therefore\quad -4mnp+4p^2=0.$

由于 $mp\neq0$，所以$n=\dfrac{p}{m}$，

把它代入①式得

切线方程　$y=mx+\dfrac{p}{m}$

（当 $m=0$ 时，在后面【系】的证明中讨论）。

(ii) 椭圆的情形（图 7-72）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{③}$$

由①、③式消去 y 得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{(mx+n)^2}{b^2}=1$，

$\therefore\quad (b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mnx+(a^2n^2-a^2b^2)=0.$

因为 $b^2+a^2m^2\neq0$，所以为使二次方程具有重根，充分必要的条件是其判别式等于零，因而

$$(a^2mn)^2-(b^2+a^2m^2)(a^2n^2-a^2b^2)=0,$$

$\therefore\quad -a^2b^2n^2+a^2b^4+a^4b^2m^2=0.$

因为 $a^2b^2\neq0$，所以 $n^2=a^2m^2+b^2$，即 $n\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$，把它代入①式便得切线方程

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

(iii) 双曲线的情形（图 7-73）：

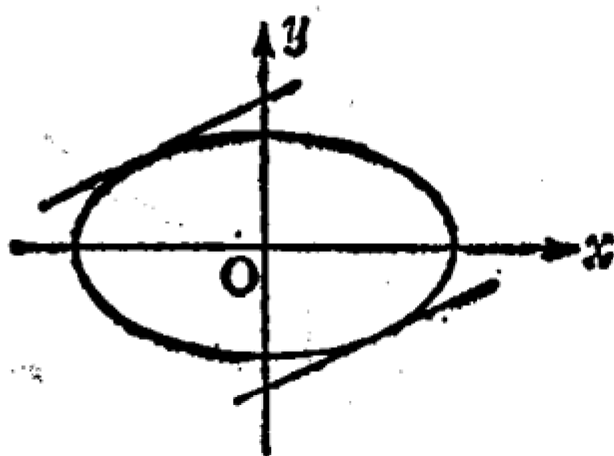


图 7-72

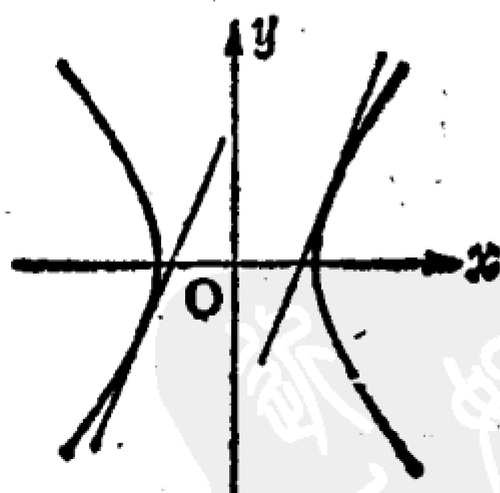


图 7-73

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{④}$$

由①、④式消去 y，仿(ii)的情形可得

$$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2mnx+(-a^2n^2-a^2b^2)=0, \qquad ⑤$$

当 $b^2-a^2m^2\neq 0$，即 $m\neq\pm\frac{b}{a}$ 时，⑤式是二次方程，因此为了具有重根，

须使 $a^4m^2n^2+(b^2-a^2m^2)(a^2n^2+a^2b^2)=0$，

∴ $a^2b^2n^2+a^2b^4-a^4b^2m^2=0$.

即 $n^2=a^2m^2-b^2(a^2b^2\neq 0)$，

$a^2m^2-b^2>0$ 时，$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$.

把它代入①式便得切线方程

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}. \qquad \square$$

【系】 在由【定理】8的方程所给的二次曲线的斜率为 m 的切线的条数如下：

(i) 抛物线的情形 $m\neq 0$ 时有一条切线，$m=0$ 时切线不存在。

(ii) 椭圆的情形 恒有两条切线

(iii) 双曲线的情形 $|m|>\frac{b}{a}$ 时有两条切线，$|m|\leqslant\frac{b}{a}$ 时，切线不存在。

证明 对(i)中 $m\neq 0$ 的场合，(iii)中 $|m|>\frac{b}{a}$ 的场合及(ii)的情形，可用【定理】8证明．其他情形证明如下：

(i) $m=0$ 时，直线写成 $y=n$，由此式及 $y^2=4px$ 得 $n^2=4px$．因为是一次方程，故没有重根．

(iii) $|m|=\frac{b}{a}$ 时，在【定理】8的证明中的⑤式变为 x 的一次方程式，没有重根，$|m|<\frac{b}{a}$ 时，在【定理】8 的证明中变为 $n^2<0$，也没有重根． $\square$

注意 在双曲线的情形下，满足 $|m|=\frac{b}{a}$ 的 m，等于渐近线的斜率．

【定理】9．通过二次曲线上一点 (x_1, y_1) 的切线的方程如下：

(二次曲线)		(切线)
抛物线	$y^2=4px(p\neq 0)$，	$y_1y=2p(x+x_1)$，
椭圆	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$，	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$. $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$.

证明 (1)切线平行于y轴的情形：应用【定理】7及其"注意"。

(*i*) 抛物线的切线是$x=0$，切点是$(0,\ 0)$.

在$y_1y=2p(x+x_1)$中令$x_1=0$，$y_1=0$便得$x=0$.

(*ii*) 椭圆的切线是$x=\pm a$，切点是$(\pm a,\ 0)$.

在$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$中令$x_1=\pm a$，$y_1=0$便得$x=\pm a$.

(*iii*) 双曲线的切线是$x=\pm a$，切点是$(\pm a,\ 0)$.

在$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$中令$x_1=\pm a$，$y_1=0$便得$x=\pm a$.

根据上述可知，在其切线平行于y轴的点(x_1,y_1)，切线方程具有定理中所述的形式.

(2) 切线不平行于y轴的情形：

通过点(x_1,y_1)，且斜率为m的直线的方程可写成

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

即

$$y=mx+(y_1-mx_1). \quad ①$$

(*i*) 抛物线在$(x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$处，

$$y_1^2=4px_1, \quad ②$$

由【定理】8知，①式为切线的条件是

$$y_1-mx_1=p/m.$$

由上式及②式消去x_1，经整理得

$$(my_1-2p)^2=0,$$

$\therefore$ $my_1=2p$，即 $m=\dfrac{2p}{y_1}$ $(y_1\neq0)$.

把上式代入①式得

$$y=\frac{2p}{y_1}x+y_1-\frac{2px_1}{y_1},$$

$\therefore$ $y_1y=2px+y_1^2-2px_1$.

应用②式，得

$$y_1y=2px+4px_1-2px_1,$$



∴ $y_1y=2p(x+x_1)$.

(ii) 椭圆在$(x_1, y_1)\neq(\pm a, 0)$处,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1, \quad ③$$

根据【定理】8可知，①式是切线的条件是

$$(y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2,$$

∴ $$(a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m+(b^2-y_1^2)=0. \quad ④$$

但是由③式有

$$a^2-x^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}, b^2-y_1^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2},$$

把它们代入④式，经整理得

$$(a^2y_1m+b^2x_1)^2=0,$$

∴ $$a^2y_1m=-b^2x_1.$$

由于$a^2y_1\neq0$，故得$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$,

把上式代入①式得

$$y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+y_1+\frac{b^2x_1^2}{a^2y_1}$$

∴ $$a^2y_1y=-b^2x_1x+a^2y_1^2+b^2x_1^2. \quad ⑤$$

但由③式有 $a^2y_1^2+b^2x_1^2=a^2b^2$,

因此由⑤式得

$$a^2y_1y=-b^2x_1x+a^2b^2,$$

∴ $$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

(iii) 双曲线在$(x_1, y_1)\neq(\pm a, 0)$处,

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ⑥$$

根据【定理】8 知，①式为切线的条件是

$$(y_1-mx_1)^2=a^2m^2-b^2,$$

$$\therefore \quad (a^2-x_1^2)m^2+2x_1y_1m-(b^2+y_1^2)=0. \qquad ⑦$$

但由⑥式有

$$a^2-x_1^2=-\frac{a^2y_1^2}{b^2}, \quad b^2+y_1^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2},$$

把上式代入⑦式，经整理得

$$(a^2y_1m-b^2x_1)^2=0,$$

$$\therefore \quad a^2y_1m=b^2x_1.$$

由于 $a^2y_1\neq0$，故 $m=\dfrac{b^2x_1}{a^2y_1}$，

把它代入①式得

$$y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+y_1-\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

$$\therefore \quad a^2y_1y=b^2x_1x+a^2y_1^2-b^2x_1^2. \qquad ⑧$$

再一次应用⑥式，因为 $b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$，所以由⑧式得

$$a^2y_1y=b^2x_1x-a^2b^2,$$

$$\therefore \quad \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

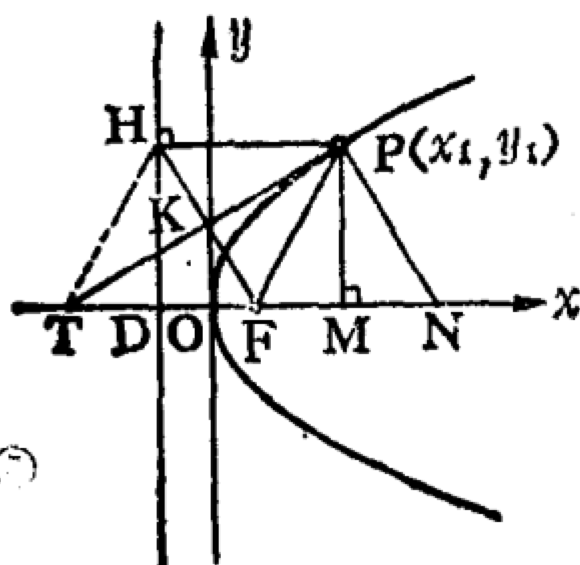


图 7-74

例题　如图 7-74 所示，设有一条以 F 为焦点的抛物线，由其上任一点 P 所作的切线与轴线的交点为 T，由 P 向轴线及准线作垂线，垂足分别为 M，H；又 P 点的法线(垂直于切线的直线)与轴线的交点为 N。试证明：

(1) 顶点 O 是线段 TM 的中点．

(2) $\overline{TF}=\overline{PF}$．

(3) 顶点的切线和两线段 PT，HF 交于一点．

(4) F 是线段 TN 的中点．

证明　若建立以顶点为原点，以轴线为 x 轴的坐标系，且令 $OF=p$，则此抛物线的方程是 $y^2=4px$，　①

准线的方程是 $x=-p$．

设 P 点的坐标为 (x_1, y_1)，则 PT 的方程是

$$y_1y=2p(x+x_1).\qquad ②$$

(1) 若在②式中令 $y=0$，则 $x=-x_1$，因此 T 的 x 坐标是 $-x_1$. 又因 M 的 x 坐标是 x_1，所以是线段 TM 的中点.

(2) $PF^2=(x_1-p)^2+y_1^2=(x_1-p)^2+4px_1=(x_1+p)^2$,

$TF^2=\{p-(-x_1)\}^2=(x_1+p)^2$,

∴ $TF^2=PF^2$，即 $\overline{TF}=\overline{PF}$.

(3) 顶点处的切线是 y 轴.

由抛物线定义，$\overline{HP}=\overline{PF}$，应用(2)得 $\overline{HP}=\overline{TF}$，又因 $HP\parallel TF$，所以四边形 $HTFP$ 是菱形，从而，若设 K 为 HF 与 PT 的交点，则 K 同时是这两条线段的中点.

设准线和轴线的交点为 D，则 O 是 DF 的中点，因为 y 轴 $\parallel$ 准线，所以 y 轴通过 HF 的中点，即通过 K 点.

根据以上所述，y 轴、PT、HF 交于一点.

(4) 根据(3)，$HTFP$ 是菱形，所以 $KF\perp PT$，又 $PN\perp PT$，

∴ $KF\parallel PN$. 又由(3)知，K 是 PT 的中点，所以 F 是 TN 的中点.

【定义】14. 极点、极线 对于下列各二次曲线，对应的直线 p 叫做点 $P(x_1,y_1)$ 的极线，反过来，点 $P(x_1,y_1)$ 叫做此直线 p 的极点.

$$y^2=4ax \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p: y_1y=2a(x+x_1),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p: \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p: \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.$$

注意 1. 当点 P 位于曲线上时，P 的极线是过 P 点的切线.

2. 在椭圆、双曲线的情形，当 $x_1=y_1\doteq 0$ 时，上面的式子不表示直线，也就是说，中心点的极线不存在.

讨论 下面所列举的【定理】10及【系】，【定理】11及【系】，分别与在圆的情形，§2.【定理】7及【系】，【定理】8及【系】完全相同，证明的要领也是相同的，故证明从略，而仅用图7—75对抛物线作图示说明.

【定理】10. 对于二次曲线，若点 P 的极线通过 Q 点，则 Q 点的极线通过 P 点.

【系】 通过一个定点 P 的直线的极点的轨迹是 P 的极线.

【定理】11. 由点 P 可向二次曲线画两条切线时，通过这两条切线切点的直线是 P 的极线.

【系】 在二次曲线的过 P 点的弦的两端处，所作切线的交点的轨迹是P的极线。

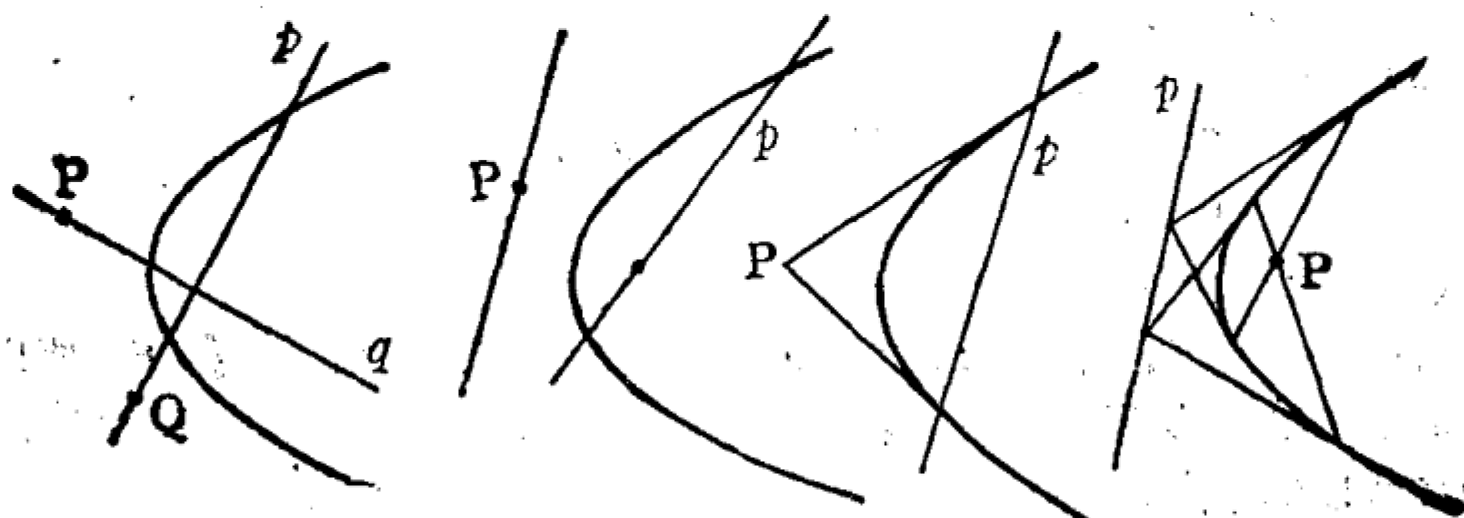


图7-75

§4. 坐标变换

4.1 曲线的移动

例题1. 试求点 $P(x, y)$关于点 $A(a, b)$的对称点 Q 的坐标.

解 如图7—76所示，设 Q 的坐标为(X, Y)，因为线段 PQ 的中点是A，所以根据§1.【定理】5的【系】有

$$\frac{x+X}{2}=a, \qquad \frac{y+Y}{2}=b,$$

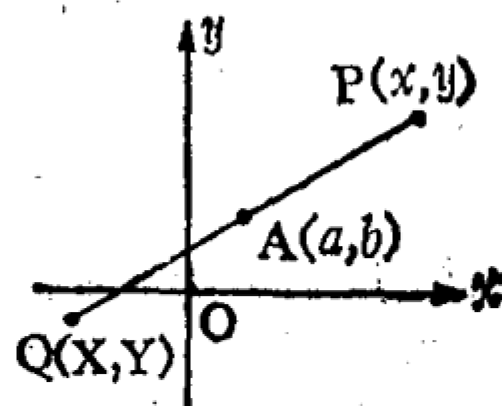


图7-76

$\therefore \quad X=2a-x,\ Y=2b-y,$

因而 Q 的坐标是$(2a-x, 2b-y)$.

注意 点 (x, y) 关于原点，x 轴和 y 轴的对称点分别是 $(-x, -y)$，$(x, -y)$，$(-x, y)$.

例题2. 试求把抛物线 $y^2=x$ 作关于下列点或直线的对称移动后所得曲线的方程.

(1) 点 $A(-1, 2)$；(2) 直线$l:2x-y-3=0$.

解 (1) 如图7—77所示，设(X, Y)是抛物线 $y^2=x$ 上任意一点(x, y)关于点 $A(-1, 2)$的对称点，则由例题 1 有

$$x=2(-1)-X=-2-X,$$
$$y=2\cdot 2-Y=4-Y,$$

由于 x，y 满足关系式 $y^2=x$，

故有 $(4-Y)^2=-2-X$，

∴ $Y^2+X-8Y+18=0$.

若令(x, y)为流动坐标，则得

$$y^2+x-8y+18=0.$$

(2) 如图7—78所示，设 $Q(X,Y)$是抛物线 $y^2=x$ 上任意一点 $P(x,y)$ 关于直线 l 的对称点，则由于 $PQ\perp l$，故由§1.【定理】14,20 有

$$\frac{y-Y}{x-X}=-\frac{1}{2}, \quad ①$$

因为 PQ 的中点位于 l 上，所以

$$2\cdot\frac{x+X}{2}-\frac{y+Y}{2}-3=0. \quad ②$$

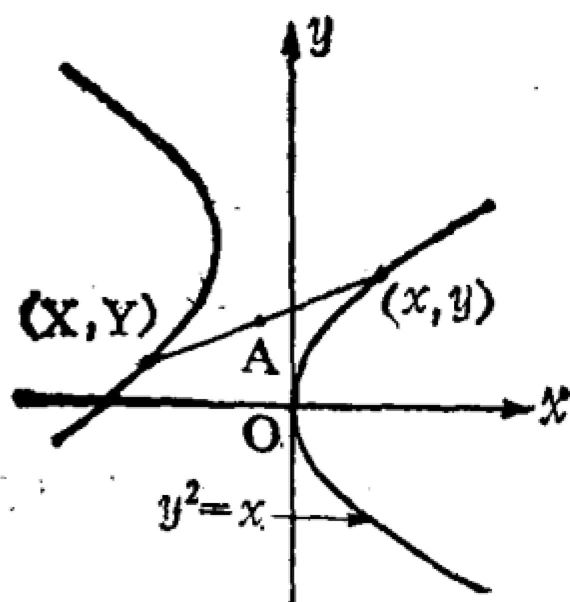


图 7-77

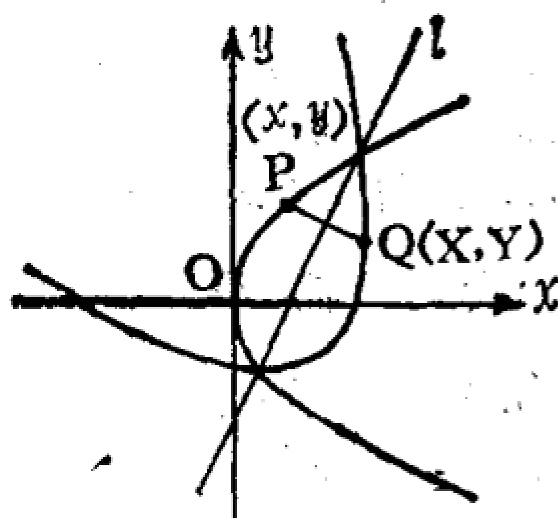


图 7-78

由①得 $x+2y=X+2Y$

由②得 $2x-y=-2X+Y+6$

∴ $$x=\frac{-3X+4Y+12}{5},$$

$$y=\frac{4X+3Y-6}{5},$$

由于 x，y 满足关系式 $y^2=x$，故有

$$\left(\frac{4X+3Y-6}{5}\right)^2=\frac{-3X+4Y+12}{5}.$$

把流动坐标用$(x,\ y)$表示并整理，便得

$$16x^2+24xy+9y^2-33x-56y-24=0.$$

讨论　在此情形，顶点$(0,\ 0)$移到了$\left(\frac{12}{5},\ \frac{-6}{5}\right)$，轴$y=0$移到了直线$4x+3y-6=0$.

【定理】1. 把曲线$f(x,\ y)=0$在x轴方向平行移动a，在y轴方向平行移动b后所得的曲线，其方程是$f(x-a,\ y-b)=0$.

证明　如图7—79所示，设(X,Y)是把曲线$f(x,y)=0$上的任意一点(x,y)在x轴方向移动a后所得的点，$(\xi,\ \eta)$是把(X,Y)点在y轴方向平行移动b后所得的点，则

$$\begin{cases}X-x=a,\\Y=y,\end{cases}\qquad\begin{cases}\xi=X,\\\eta-Y=b,\end{cases}$$

$$\therefore\quad x=X-a=\xi-a,\quad y=Y=\eta-b.$$

由于x，y满足$f(x,\ y)=0$，所以

$$f(\xi-a,\ \eta-b)=0.$$

满足上式的点$(\xi,\ \eta)$的轨迹就是所求的曲线.

若把流动坐标$(\xi,\ \eta)$变为$(x,\ y)$，则有$f(x-a,\ y-b)=0$.　□

【定理】2. 设曲线$f(x,\ y)=0$上的点的y坐标不变，而仅仅把x坐标乘以a倍$(a\neq0)$，则所得点的轨迹的方程是$f\left(\frac{x}{a},y\right)=0$.

证明　如图7—80所示，设$(X,\ Y)$是把曲线$f(x,\ y)=0$上任意一点(x,y)的x坐标乘以a后所得的点，则

$$\begin{cases}X=ax,\\Y=y,\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}x=X/a,\\y=Y.\end{cases}$$

由于x，y满足$f(x,\ y)=0$，所以

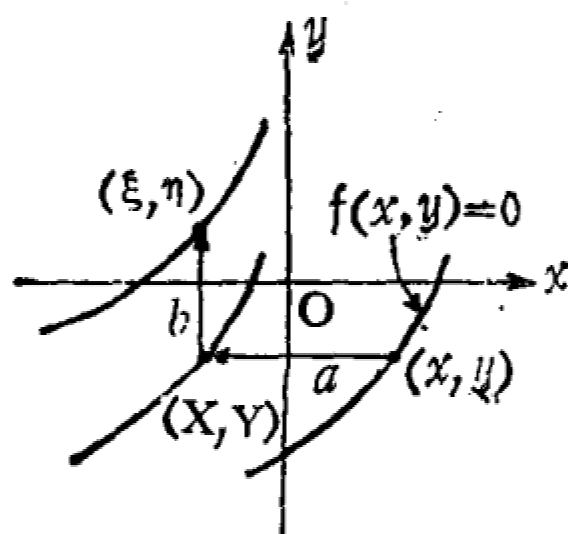


图 7-79

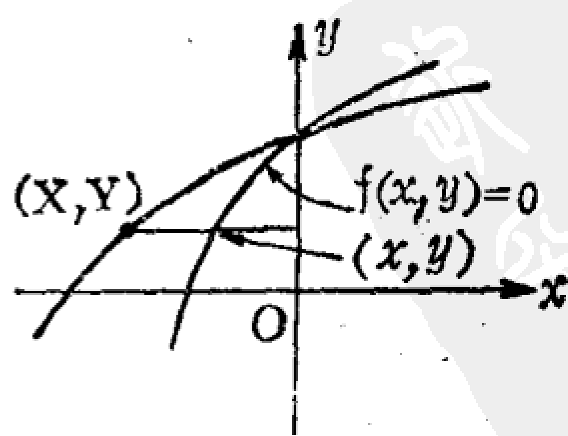


图 7-80

$$f\left(\frac{x}{a},Y\right)=0$$

满足上式的点(x, y)的轨迹，就是所求的曲线.

把流动坐标(X, Y)用(x, y)表示，便得

$$f\left(\frac{x}{a},y\right)=0.$$ □

讨论 【定理】2中的结果。常常可叙述为：

“把曲线 $f(x, y)=0$ 在 x 轴方向上乘以 a 倍后，所得曲线的方程是 $f\left(\frac{x}{a},y\right)=0.$”

类似地可得：“把曲线 $f(x, y)=0$ 在 y 轴方向上乘以 b 倍$(b\neq0)$后，所得曲线的方程是$f\left(x,\frac{y}{b}\right)=0.$”

例题1. 把圆 $x^2+y^2=a^2(a>0)$在 y 轴方向上乘以 k 倍 $(k>0)$ 后，所得的曲线是什么？

解 根据上述讨论，所求曲线的方程是

$$x^2+\frac{y^2}{k^2}=a^2,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(ak)^2}=1.$$

因此，当 $k=1$ 时是圆，$k\neq1$ 时是椭圆，如图7—81.

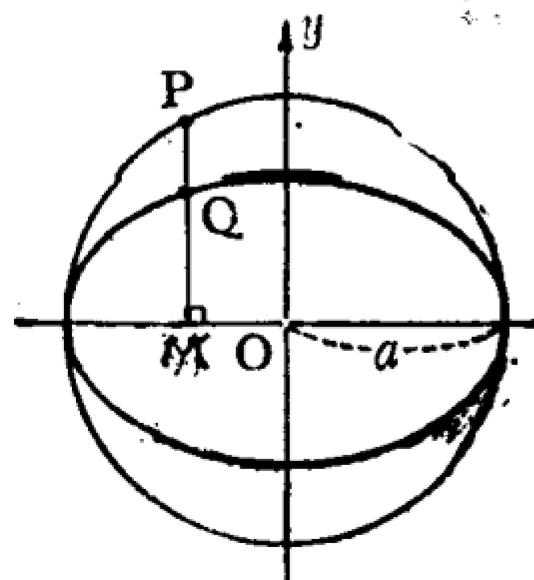


图 7-81

特别地，若令 $k=\frac{b}{a}$，则化为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

讨论1. 从上面例题所得结果可知，“椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是把圆 $x^2+y^2=a^2$ 在 y 轴方向上乘以 $\frac{b}{a}$倍后所得到的曲线”.如果对 y 解上述两方程，并比较 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$，也容易理解上述结论，当 $a>b>0$ 时，这相当于在 y轴 方向缩小；当 $b>a>0$ 时，在 y 轴方向伸长.

又如果把 x，y 交换考虑，可以说：“椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是把圆

$x^2+y^2=b^2$ 在 x 轴方向乘以$\frac{a}{b}$倍后所得的曲线."

2. 对曲线 C：$f(x, y)=0$ 上的任意点作变换 s 后，所得曲线 c^s 的方程的求法如下：

(1) 设(X, Y)是对点(x, y)施行变换 s 后得到的点；

(2) 求出(x, y)和(X, Y)之间的关系；

(3) 把 x，y 用 X，Y 表示出来，令它为 $x=\phi(X, Y)$，$y=\Psi(X, Y)$；

(4) c' 的方程是 $f[\phi(X, Y), \Psi(X, Y)]=0$. 把流动坐标$(X, Y)$用$(x, y)$表示，便可改写成 $f[\phi(x, y), \Psi(x, y)]=0$.

例题2. 如图7—82所示，设有曲线 $4x^2+9y^2=36$ 和定点$A(2,1)$. $P(x,y)$是曲线上的任意一点，在线段 AP 的延长线上取一点 Q，使 $AQ=\frac{3}{2}AP$，试求 Q 点的轨迹方程。

解 设(X, Y)是 Q 的坐标，则

$$\begin{cases} X-2=\frac{3}{2}(x-2), \\ Y-1=\frac{3}{2}(y-1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2X+2}{3}, \\ y=\frac{2Y+1}{3}. \end{cases}$$

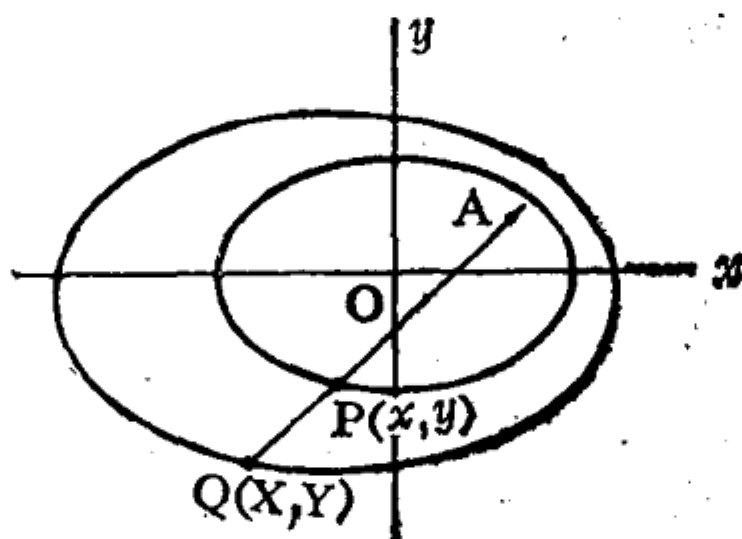


图 7-82

把它代入原方程，得

$$4\left(\frac{2X+2}{3}\right)^2+9\left(\frac{2Y+1}{3}\right)^2=36.$$

再把流动坐标(X, Y)用(x, y)表示，经整理便得

$$16x^2+36y^2+32x+36y-299=0.$$

讨论 已知的与求得的两条曲线都是椭圆.

注意 上面例题可改成："试求把曲线 $4x^2+9y^2=36$ 以点 $A(2, 1)$ 为相似中心放大$\frac{3}{2}$倍后所得曲线的方程."

4.2　坐标轴的平移

【定理】3. 设 X轴，Y 轴是分别把 x 轴，y 轴平行移动，使原点移到点 $O'(a, b)$后得到的新坐标轴，设任一点 P 的旧坐标、新坐标分别为(x, y) (X, Y)，则下式成立：

$$\begin{cases}x=X+a,\\ y=Y+b.\end{cases}\quad \left(\begin{aligned}X=x-a,\\ Y=y-b.\end{aligned}\right)$$

证明　如图7—83所示，过 P 作平行于 y 轴的直线，与 x 轴、X轴的交点分别为M，N；若令 L 为 Y 轴与 x 轴的交点，则由§1.【定理】1 的【系】1，有

$$OM=OL+LM=OL+O'N,$$
$$MP=MN+NP=LO'+NP,$$

但　$OM=x$，$O'N=X$，$MP=y$，$NP=Y$，

而　$OL=a$，$LO'=b$，所以

$$x=X+a,\ y=Y+b$$ □

例题1. 应用§2.【定理】6及§4.【定理】3，试求圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上一点 $P(x_1, y_1)$的切线方程

解　如图7—84所示，设 X，Y 轴是把 x，y 轴平移，使原点移到(a,b)后的新坐标轴，根据【定理】3有

$$x=X+a,\ y=Y+b.\qquad ①$$

因此对于新坐标系，圆的方程变为

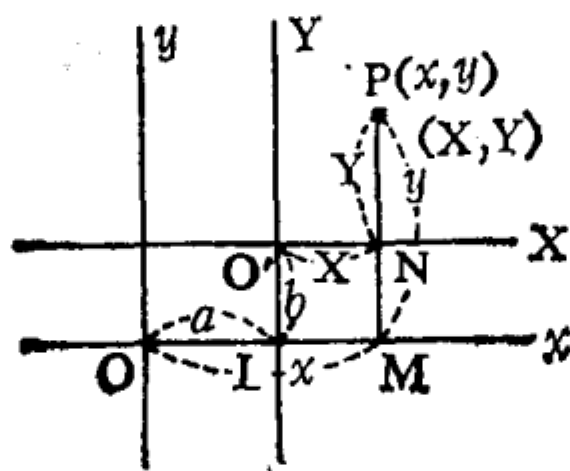


图 7-83

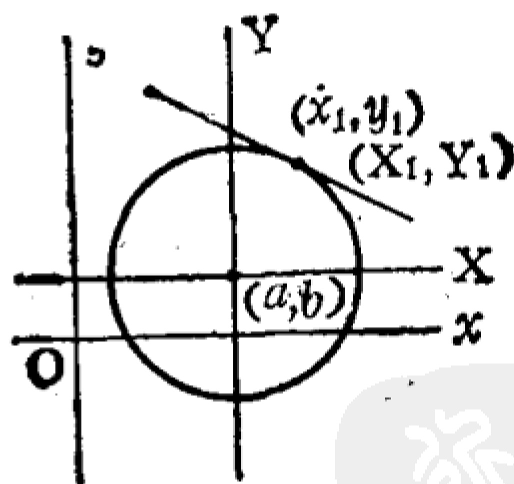


图 7-84

$$X^2+Y^2=r^2.$$

又设(X_1, Y_1)是 P 的新坐标，则根据§2.【定理】6有

$$X_1X+Y_1Y=r^2.\qquad ②$$

但是　$x_1=X_1+a$，$y_1=Y_1+b$，③

因此，应用①、③式，②式可写成下列形式

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2.$$

注意 在4.1中，是相对于固定的坐标轴移动曲线，而在上例中，是令曲线固定而使坐标轴移动。

例题2. 把椭圆的长轴一顶点及靠近此顶点的焦点固定，当长轴的长度无限增大时，问在固定顶点的邻近，曲线的形状趋近于什么样的曲线？

解 如图7—85所示，设椭圆为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0), \qquad ①$$

固定$A(-a,0)$和焦点$F(-\sqrt{a^2-b^2},0)$.

设X，Y轴是把坐标轴平行移动，使原点移到A后得到的新坐标轴，则$x=X-a$，$y=Y$，故由①式有

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad ②$$

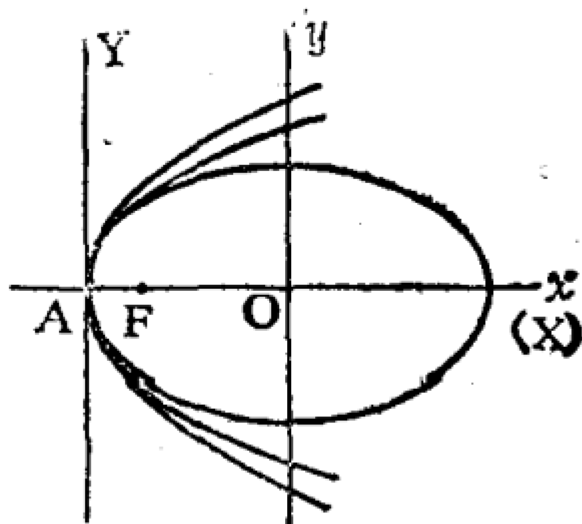


图 7-85

若令$AF=p$，则$p=a-\sqrt{a^2-b^2}$，

$$\therefore \quad b^2=a^2-(a-p)^2=2ap-p^2.$$

因而，由②式得

$$\frac{(X-a)^2}{a^2}+\frac{Y^2}{2ap-p^2}=1,$$

$$\therefore \quad Y^2=\left(2ap-p^2\right)\left[1-\frac{(X-a)^2}{a^2}\right],$$

即

$$Y^2=\left(2p-\frac{p^2}{a}\right)\left(2X-\frac{X^2}{a}\right).$$

当p一定而$a\to\infty$时，若$X<G$（G为常数），则

$$\frac{p^2}{a}\to 0,\ \frac{X^2}{a}\to 0,\quad \therefore\ Y^2\to 4pX.$$

也就是说，在固定的顶点邻近，椭圆的形状趋于抛物线，总之，可以说抛物线是椭圆的极限情形。

注意 在这种情形下，作为极限图形的抛物线，其顶点和焦点各是原来椭圆的固定顶点和焦点。

讨论1. 当固定双曲线的一个顶点及靠近此顶点的焦点，而把另一顶点移向无限远时，也得到同样的结果.

2. 在例题2中，若令椭圆的偏心率为 e，则 $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{2ap-p^2}{a^2}=1-\frac{2p}{a}+\frac{p^2}{a^2}$，因此当 $a\to\infty$ 时，$e\to1$.从而可以说，抛物线的偏心率为1(参看§3.【定义】1及§4.【定理】7).

4.3 坐标轴的旋转

【定理】 4. 设 X 轴、Y 轴是保持坐标原点不动，而把 x 轴、y 轴转过θ角后所得的新坐标轴，(x, y)、(X, Y)是任意一点 P 在旧，新两种坐标系中的坐标，则下式成立

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta.\end{cases}$$

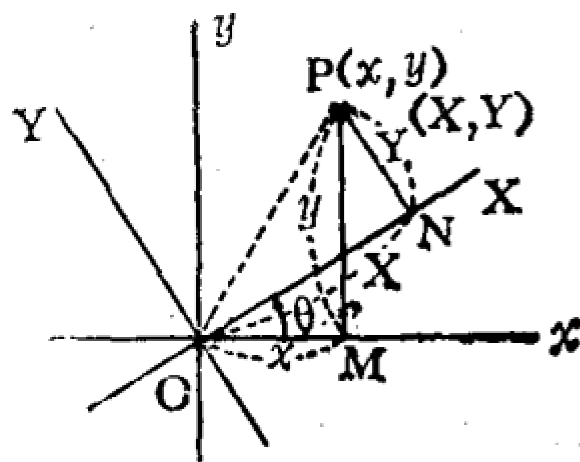


图7–86

证明 如图7—86所示，由 P 点向 x 轴、X 轴作垂线，令垂足分别为M，N，则有

$OM=x$，$MP=y$，$ON=X$，
$NP=Y$，其中 O 是原点.

一般地，如果一个有向线段 AB 在一个有向直线 l 上的投影，用记号$(AB)_l$ 表示，两个有向直线 l 和 g 的正方向的夹角用$\angle(l, g)$表示，那么根据投影定理有

$$(OP)_x=(ON)_x+(NP)_x,\ (OP)_z=(ON)_z+(NP)_z, \quad ①$$

$$(OP)_x=OM=x,\ (ON)_x=ON\cos\angle(Ox,\ OX)=X\cos\theta,$$

$$(NP)_x=NP\cos\angle(Ox,\ OY)=Y\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-Y\sin\theta,$$

$$(OP)_z=MP=y,\ (ON)_z=ON\cos\angle(Oy,OX)=X\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=X\sin\theta,$$

$$(NP)_z=NP\cos\angle(Oy,\ OY)=Y\cos\theta,$$

把以上各式代入①式得

$$\begin{cases}x=X\cos\theta-Y\sin\theta,\\ y=X\sin\theta+Y\cos\theta.\end{cases}$$ □

【系】 在与【定理】4相同的假定下，下式成立

$$X = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Y = -x\sin\theta + y\cos\theta.$$

证明　因为把 X 轴、Y 轴绕原点转过角 $-\theta$ 后便可得到 x 轴、y 轴，所以在【定理】4中，若交换(x, y)和(X, Y)，用 $-\theta$ 代替θ，便得

$$X = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Y = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta) = -x\sin\theta + y\cos\theta.$$ □

讨论　对【定理】4中所得到的两个式子来求解 X，Y，也可得到同样的结果.

例题　(1) 把坐标轴绕原点转过$\frac{\pi}{4}$后，证明曲线 $c: xy = k(k \neq 0)$是以 x 轴、y 轴为渐近线的等轴双曲线.

(2) 应用(1)的结果，求曲线 c 上一点 $P(x_1, y_1)$的切线方程.

解　(1) 根据【定理】4，有

$$x = X\cos\frac{\pi}{4} - Y\sin\frac{\pi}{4} = \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \qquad ①$$

$$y = X\sin\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4} = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \qquad ②$$

把它们代入 $xy = k$ 得

$$\frac{X-Y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{X+Y}{\sqrt{2}} = k,$$

$$\therefore \quad X^2 - Y^2 = 2k.$$

根据§3.【定义】8的例题知，上式表示以二直线 $Y = \pm X$ 为渐近线的等轴双曲线(图7-87)，这两条渐近线正是原来坐标系的 x 轴和 y 轴.

(2) 设(X_1, Y_1)是P 点对 X 轴、Y 轴的坐标，则由§3.【定理】9知，P 点的切线方程是

$$X_1X - Y_1Y = 2k. \qquad ③$$

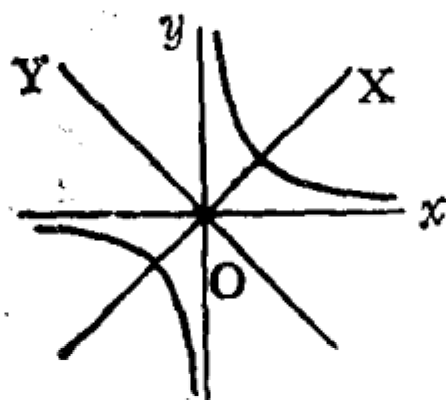


图 7-87

但由①、②式有

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}},$$

因此
$$X_1 = \frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}, \quad Y_1 = \frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

把它们代入③式得

$$\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{-x_1+y_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-x+y}{\sqrt{2}} = 2k,$$

∴ $y_1x+x_1y=2k.$

【定理】5. 把坐标原点平移到点$(a,\ b)$，再将坐标轴绕(a,b)点转过θ角，这时，设$(x,\ y)$，$(\xi,\ \eta)$分别是任意一点P在旧、新两种坐标系中的坐标，则下列关系式成立

$$\begin{cases}x=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta+a,\\ y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta+b.\end{cases}$$

略证 若P点的坐标变化为：$(x,\ y)\to(X,\ Y)\to(\xi,\ \eta)$，则由【定理】3，4有

$$\begin{cases}x=X+a,\\ y=Y+b,\end{cases}\qquad \begin{cases}X=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta,\\ Y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta,\end{cases}$$

从上述两组方程消去X，Y，便得结论. □

【定理】6. 设由坐标轴的平移或旋转使任一点的坐标由$(x,\ y)$变为$(X,\ Y)$，则x，y的整式$f(x,\ y)$可变换为X，Y的同次数的整式$g(X,\ Y)$.

证明 设$f(x,\ y)$，$g(X,\ Y)$的次数分别为m，n. 根据【定理】3或4，x，y都是X，Y的一次式，因此$g(X,\ Y)$的次数不比m大，即

$$m\geqslant n. \qquad ①$$

同样可得 $m\leqslant n.$ ②

结合①、②两式得 $m=n.$ □

4.4 一般的二次曲线及二次曲线的分类

二次曲线的定义，除了用§3.【定义】9给出的以外，还有各种各样的定义方法，下面依次叙述它的第二、第三种定义.

【定义】1. 二次曲线及其焦点、准线、偏心率 如图7—88所示，设有某定点F以及不通过该定点F的直线f.由一点P向f作垂线，垂足为H，这时，使$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$保持恒定的点$P$的轨迹叫做固有二次曲线（习惯上简称二次曲线）。点$F$叫做二次曲线的焦点，直线$f$叫做二次曲线的准线，$\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$的恒定比值叫做该曲线的偏心率，通常用$e$表示.

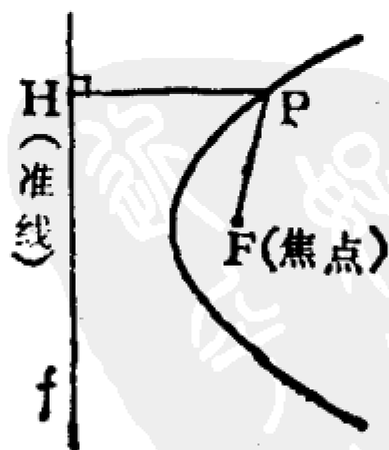


图 7-88

【定理】7. 在【定义】1中所定义的固有二次曲线，可以是椭圆、双曲线和抛物线中任何一种，若令e为偏心率，则有下列关系：

$0<e<1 \rightleftarrows$ 椭圆，

$e=1 \rightleftarrows$ 抛物线，

$1<e \rightleftarrows$ 双曲线.

证明 如图7—89所示，假定由 F 点向 f 作垂线，垂足为 D。现取定 F 为坐标原点，直线 DF 为 x 轴.

若令 $\overline{DF}=k$，则准线 f 的方程是 $x=-k$.

若令 P 的坐标为(x, y)，则$\overline{PF}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\overline{PH}=|x+k|$，$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}=e$. 因此，P 点的轨迹方程是

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x+k|.$$

由于上式两端都非负，所以与两端平方后所得的结果等价，即

$$x^2+y^2=e^2(x+k)^2。$$

$$\therefore \quad (1-e^2)x^2+y^2-2e^2kx-e^2k^2=0. \qquad ①$$

(i) 当 $e=1$ 时，由①式有 $y^2-2kx-k^2=0$，

$$\therefore \quad y^2=2k\left(x+\frac{k}{2}\right).$$

如果令 $x+\frac{k}{2}=X, y=Y$，也就是说，平移坐标轴使原点移到$\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$，则由①式得

$$Y^2=2kX,$$

此即抛物线的标准形.

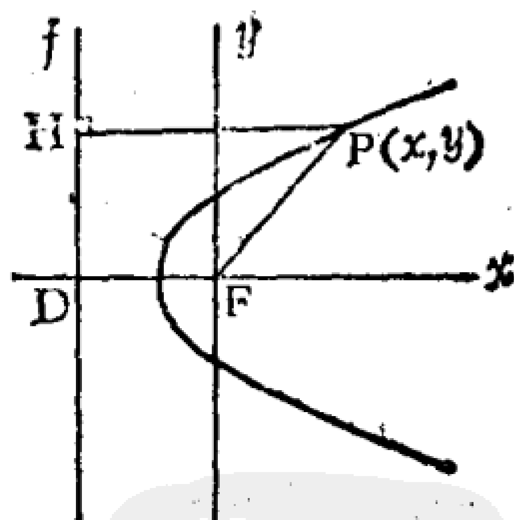


图 7-89

(ii) 当 $e\neq1$ 时，由①式有

$$x^2-\frac{2e^2k}{1-e^2}x+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2k^2}{1-e^2},$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2k^2}{1-e^2}+\frac{e^4k^2}{(1-e^2)^2},$$

即
$$\left(x-\frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2} \qquad ②$$

式中若令$x-\frac{e^2k}{1-e^2}=X, y=Y$，即平移坐标轴使原点移到$\left(\frac{e^2k}{1-e^2}, 0\right)$，再

令$\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2}=a^2(>0)$，则由②式有

$$X^2+\frac{Y^2}{1-e^2}=a^2,$$

$$\therefore \qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2(1-e^2)}=1. \qquad ③$$

（甲）若 $0<e<1$，则 $1-e^2>0$。因此令 $a^2(1-e^2)=b^2$，则 $a^2>b^2$，由③式便得

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

此即椭圆的标准形.

（乙）若 $e>1$，则 $1-e^2<0$. 因此若令 $a^2(1-e^2)=-b^2$，由③式得

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

此即双曲线的标准形. □

注意 关于双曲线的偏心率，也可参照【定理】3，例题 2 的讨论 2.

【系】1. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的偏心率是 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的偏心率是$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

证明 在【定理】7的证明中，

根据(甲)，对于椭圆有

$$a^2(1-e^2)=b^2,\ \therefore\ e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},\quad e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\quad (e>0).$$

根据(乙)，对于双曲线，有

$$a^2(1-e^2)=-b^2,\ \therefore\ e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2},\quad e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\ (e>0).$$

注意 虽然出发点不同，但由【定义】1 出发所得到的【定理】7及其【系】1 的结果，与在 3.1 中所得到的结果完全一致.

【系】2 (1) 抛物线 $y^2=4px(p\neq 0)$的准线方程是 $x=-p$.

(2) 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$及双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,$ $b>0)$的准线方程是$x=\frac{a}{e}$和 $x=-\frac{a}{e}$. 其中 e 分别是这两条曲线的偏心

率.

证明 我们来考察一下在【定理】7的证明中，在 x, y 坐标系中的准线方程 $x=-k$ 在 X、Y 坐标系中将具有什么形式.

(1) 令 $x+\frac{k}{2}=X$，则得抛物线方程 $Y^2=2kX$. 这时准线方程变为 $X=-k+\frac{k}{2}$，即 $X=-\frac{k}{2}$. 从而 $Y^2=4pX$ 的准线是 $X=-p$.

(2) 由于 $x-\frac{e^2k}{1-e^2}=X$，所以准线方程变为 $X=-k-\frac{e^2k}{1-e^2}$，即 $X=-\frac{k}{1-e^2}$. 又因 $\frac{ek}{1-e^2}=a$，故化为 $X=-\frac{a}{e}$.

但是，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 都是关于Y轴对称的，因此 $X=\frac{a}{e}$ 也是准线.

在以上所得的结果中，若把流动坐标(X, Y)换为 (x, y)，便得到最后结果. □

注意 关于抛物线的准线，与在§3.【定理】1 的【系】1 中已得到的结果一致.

讨论 图 7—90 表出了二次曲线的准线的大概位置，注意：对椭圆有 $0<e<1$，对双曲线有 $e>1$.

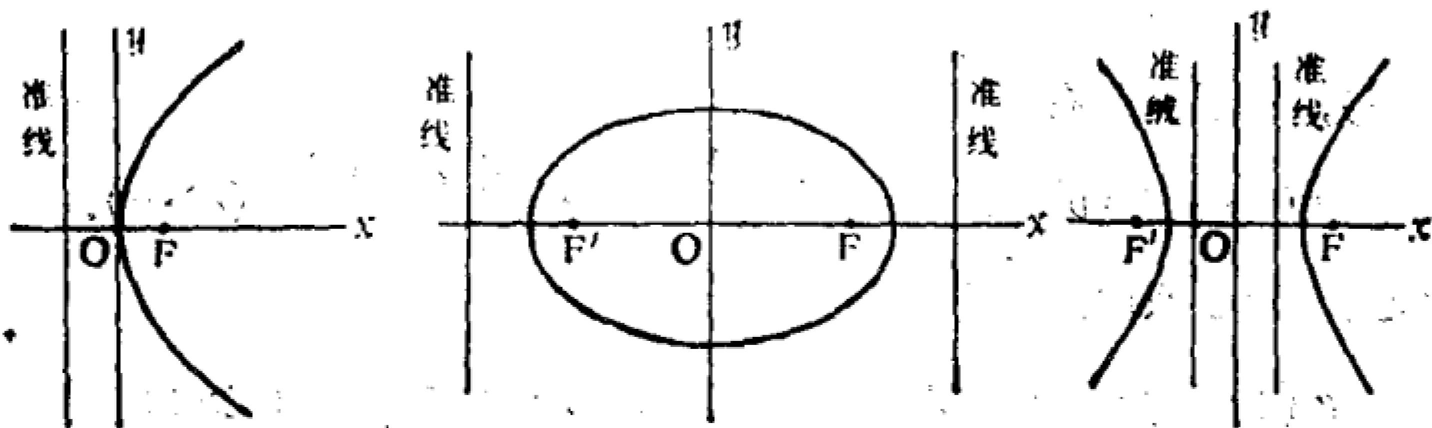


图 7-90

【定义】2. 二次曲线 x, y 的二次方程

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0\ (a,\ b,\ h\ 中至少有一个不为0)$$

所表示的曲线叫做二次曲线.

由此定义的二次曲线，除特殊情形外，都可经讨论后依次归结为固有二次曲线. 下面暂且把上述二次方程的左端令为 $f(x, y)$，而且谈到"二

次方程式”时，假定二次项的系数中至少有一个不为0.

【定理】8. 如果二次式 $f(x, y)$ 可分解成实系数的两个一次因式，则二次方程 $f(x, y)=0$ 表示两条直线.

证明 设 $f(x, y)=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$, ①

这时如果 $a_1=b_1=0$，则①式左端是二次的，而右端却是低于二次的，因此 a_1，b_1 中至少有一个不为0，同样 a_2，b_2 中也至少有一个不为0. 根据①式

$$\{(x, y)|f(x, y)=0\} = \{(x, y)|a_1x+b_1y+c_1=0\} \cup \{(x, y)|a_2x+b_2y+c_2=0\}.$$

因此，方程式 $f(x, y)=0$ 表示两条直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2+b_2y+c_2=0$. □

注意 当 $x_1+b_1y+c_1=0$ 和 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 等价时，它们表示重合的二直线.

【定理】9. 若经坐标轴的平移，二次式 $f(x, y)$ 变为 $g(X, Y)$，则对应的各二次项的系数保持不变.

证明 假设使原点移到 (x_0, y_0)，则由【定理】3，有

$$x=X+x_0, \quad y=Y+y_0,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad g(X, Y)&=f(x, y)=f(X+x_0, Y+y_0)\\ &=a(X+x_0)^2+2h(X+x_0)(y+y_0)\\ &\quad+b(Y+y_0)^2+2g(X+x_0)+2f(Y+y_0)+c.\end{aligned}$$

证为 X^2，XY，Y^2 的系数分别是 a，$2h$，b，所以在 $g(X, Y)$ 与 $f(x, y)$ 中，x^2、xy、y^2 的系数分别是一致的. □

【定理】10. 如果坐标轴绕原点旋转，二次式 $f(x, y)$ 变为 $g(X, Y)$，则其常数项保持不变.

因明 假设绕原点的旋转角为 θ，则由【定理】4，有

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta,$$
$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta.$$

因此

$$\begin{aligned}g(X, Y)&=f(X\cos\theta-Y\sin\theta, X\sin\theta+Y\cos\theta)\\ &=a(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+2h(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)\\ &\quad+b(X\sin\theta+Y\cos\theta)^2+2g(X\cos\theta-Y\sin\theta)\\ &\quad+2f(X\sin\theta+Y\cos\theta)+c.\end{aligned}$$

从而，$g(X, Y)$ 与 $f(x, y)$ 的常数项 c 相同. □

【定理】11. 当 $h^2-ab\neq0$ 时，经过坐标轴的适当平移，可以把二次式

$f(x,y)$变为这样的$g(X, Y)$，使 X，Y 的一次项的系数同时为0.

证明 如果计算在【定理】9的证明中所用到的 $g(X, Y)$，则有下列形式

$$\begin{aligned}g(X, Y)=&aX^2+2hXY+bY^2\\&+2(ax_0+hy_0+g)X+2(hx_0+by_0+f)Y\\&+(ax_0{}^2+2hx_0y_0+by_0{}^2+2gx_0+2fy_0+c).\end{aligned}$$

这时，为了使 X，Y 的系数同时为 0，须有

$$\begin{cases}ax_0+hy_0+g=0,\\hx_0+by_0+f=0.\end{cases}\qquad ①$$

①×b－②×h　　$(ab-h^2)x_0+bg-hf=0$,

①×h－②×a　　$(h^2-ab)y_0+hg-af=0$.

从而，当 $h^2-ab\neq 0$ 时，有

$$x_0=\frac{bg-hf}{h^2-ab},\qquad y_0=\frac{af-hg}{h^2-ab}.$$

于是把坐标轴平移使(x_0, y_0)点变为原点即可. □

注意 当 $h^2-ab=0$ 时，不一定能使 $g(X, Y)$中 X，Y 的一次项的系数同时为0.

【定理】12. 坐标轴绕原点旋转适当的角度后，可以把二次式$f(x, y)$变为这样的 $g(X, Y)$，使得 XY 的系数为0.

证明 在【定理】10 的证明中所用到的 $g(X, Y)$，其 XY 系数具有下列形式

$$\begin{aligned}&-2a\cos\theta\sin\theta+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2b\sin\theta\cos\theta\\&=2h\cos2\theta-(a-b)\sin2\theta,\end{aligned}$$

为了使 XY 的系数为 0，只要选择角度θ

使　　$2h\cos2\theta=(a-b)\sin2\theta$　　①

成立，并将坐标轴绕原点旋转这样一个θ角即可.

当 $a=b$ 时，$\cos2\theta=0$　　令$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 即可.

当 $a\neq b$ 时，由①式得 $\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$，显然满足此式的 θ 是存在的. □

【定理】13. 假设经坐标轴的平移或旋转，

$f(x, y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$　变换为

$g(X, Y)=AX^2+2HXY+BY^2+2GX+2FY+C$,

则下式成立

(1) $A+B=a+b$; (2) $H^2-AB=h^2-ab$.

证明 (i) 在平移的情形下，

根据【定理】9知，$A=a$, $H=h$, $B=b$. 因此(1)、(2)式成立.

(ii) 在旋转的情形下

计算在【定理】10的证明中所用的 $g(X, Y)$，得到下列关系

$$A=a\cos^2\theta+2h\cos\theta\sin\theta+b\sin^2\theta,$$
$$2H=2h\cos2\theta-(a-b)\sin2\theta,$$
$$B=a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta.$$

从而

$$A+B=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+b(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a+b,$$
$$A-B=(a-b)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+4h\sin\theta\cos\theta$$
$$=(a-b)\cos2\theta+2h\sin2\theta,$$

$\therefore$ $$4H^2+(A-B)^2=\{4h^2+(a-b)^2\}(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)$$
$$=4h^2+(a-b)^2.$$

$\therefore$ $$4H^2+(A-B)^2-(A+B)^2=4h^2+(a-b)^2-(a+b)^2.$$

$\therefore$ $4H^2-4AB=4h^2-4ab$, 即 $H^2-AB=h^2-ab$. □

二次曲线的分类

我们来研究由【定义】2所得到的二次曲线是什么样的曲线，大体的要领如下：首先施行坐标轴的旋转，使xy 的系数为0（应用【定理】12）；其次施行坐标轴的平移，使 x 或 y 的系数为 0，以便接近二次曲线的标准形.

【定理】14. x, y 的二次方程式 $f(x, y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 表示的图形，除了点或直线的特殊情形外，其图形可以是椭圆、双曲线和抛物线中任何一种(即固有二次曲线).

证明 (Ⅰ)当 $h\neq0$ 时，经坐标轴的适当旋转，可以把方程 $f(x, y)=0$变换成下列形式

$$g(X, Y)=AX^2+BY^2+2GX+2FY+C=0. \quad ①$$

这时，A、B 中至少有一个不为 0.

(Ⅱ) (1) 当 $A,B\neq0$ 时，可应用【定理】11， ($\because H=0$, $H^2-AB\neq0$). 平移 X, Y 轴，构成ξ、η 轴以使①式变为下列形式

$$A\xi^2+B\eta^2=K. \quad ②$$

1) 当 A, B 同号时

(i) 若K与 A 同符号，则

$$\frac{\xi^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{A}}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{B}}\right)^2}=1.$$

这表示椭圆(包括圆)

(ii) 若$K=0$，则$\xi=0$ $\eta=0$，②只表示一点.

(iii) 若K与A异号，则满足②式的实数ξ，η不存在，因此不表示图形.

2) 当A、B异号时

(i) 若$K\neq0$，则表示下面的双曲线：

(甲) K、A同号时

$$\frac{\xi^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{A}}\right)^2}-\frac{\eta^2}{\left(\sqrt{-\frac{K}{B}}\right)^2}=1.$$

(乙) K、B同号时

$$\frac{\xi^2}{\left(\sqrt{-\frac{K}{A}}\right)^2}+\frac{\eta^2}{\left(\sqrt{\frac{K}{B}}\right)^2}=1.$$

(ii) 若$K=0$，则$\eta=\pm\sqrt{-\frac{A}{B}}\xi$，表示两条直线

(2) A，B中有一个为0时

1) $B=0$时(这时$A\neq0$).

由①式 $g(X,Y)=AX^2+2GX+2FY+C=0$.

(i) 当$F=0$时，$g(X,Y)=AX^2+2GX+C=0$. ③

设α,β为它的两个根,

(甲) 若$G^2-AC>0$，则$X=\alpha$，$X=\beta$，表示平行于y轴的两条直线.

(乙) 若$G^2-AC=0$，则$X=\alpha$，表示平行于Y轴的两条重合直线.

(丙) 若$G^2-AC<0$，则满足③式的X的实数值不存在，因此不表示图形.

(ii) 当$F\neq0$时，则有$g(X,Y)=A(X+x_0)^2+2F(Y+y_0)=0$. 把坐标轴平移，使原点移到$(-x_0,-y_0)$，则得

$A\xi^2+2F\eta=0$,

即 $$\xi^2=-\frac{2F}{A}\eta\quad\left(-\frac{2F}{A}\neq 0\right).$$

这表示以 η 轴为对称轴的抛物线.

2) $A=0$, $B\neq 0$ 的情形，也可同样进行讨论.

【定理】15. 二次曲线的标准形(在扩大的意义下)

有时，也把下列各方程叫做二次曲线的标准形.

(1) $Ax^2+By^2+C=0(A,B\neq 0)$,

(2) $y^2=Ax$ 或 $x^2=Ay(A\neq 0)$,

(3) $y^2=A$ 或 $x^2=A$.

【定义】15. 二次方程 $f(x,y)=0$ 所表示的图形，除了点或直线的特殊情形外，还有

$h^2-ab<0 \rightleftarrows$ 椭圆(包括圆).

$h^2-ab=0 \rightleftarrows$ 抛物线,

$h^2-ab>0 \rightleftarrows$ 双曲线,

证明 在【定理】14 的证明中，椭圆是Ⅱ), (1), 1), (i)的情形. 双曲线限于Ⅱ), (1), 2), (i)的情形，抛物线限于Ⅱ), (2), 1), (iii) 的情形及 2)所对应的情形. 也就是说，椭圆限于 $AB>0$，双曲线限于 $AB<0$，抛物线限于 $AB=0$ 的情形. 但是在【定理】13 中有 $h^2-ab=H^2-AB$，而在【定理】14 的证明的①式中，$H=0$，因此 $h^2-ab=-AB$. 把它与前述的事项合起来，定理得证. □

例题 设有两条直线

l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$, l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ 它们相交于一点，试问二次方程

$(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k(k\neq 0)$ 表示什么样的曲线?

解 把所给定的方程进行整理，得

$$a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)xy+b_1b_2y^2+(a_1c_2+a_2c_1)x$$
$$+(b_1c_2+b_2c_1)y+(c_1c_2-k)=0.$$

若令 D 表示【定理】14 中的 h^2-ab，则

$$D=\left(\frac{a_1b_2+a_2b_1}{2}\right)^2-a_1a_2b_1b_2=\frac{1}{4}(a_1b_2-a_2b_1)^2.$$

由于 l_1, l_2 相交于一点，所以 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$,

$\therefore$ $D>0$, 已给二次方程表示双曲线.

讨论 如果和§3【定理】4【系】的例题 1 结合起来考虑，则此双曲线以二直

线 l_1，l_2 作渐近线，渐近线把平面划分成四部分，但双曲线各支在其中的哪一部分内呢？这要由 k 的符号及 $a_1x+b_1y+c_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2$ 的正区域，负区域来决定.

【定义】4　圆锥曲线　用一个平面截圆锥面时，其截口曲线叫做圆锥曲线. 正如下面定理所见到的，如果用不通过圆锥顶点的平面截割圆锥，那末交线就必然是固有二次曲线. 在这个意义下，圆锥曲线这一名称可用来作为二次曲线的别名.

【定理】16. 如果用不通过圆锥顶点的平面截割圆锥时，则截口的曲线是固有二次曲线.

证明　如图 7-91 所示，设截口平面为 π，考虑与圆锥及 π 相切的球，设与 π 的切点为 F. 圆锥与球的公共点的轨迹是圆，若令包含此圆的平面为 π'，则 π' 与圆锥的轴垂直，设 f 为 π 与 π' 的交线，由圆锥与 π 的截口曲线上任意一点 P 向 f 作垂线，垂足为 H. 令通过圆锥顶点 V 及 P 的直线与 π' 的交点为 Q. 由于 PQ 是球的切线，所以

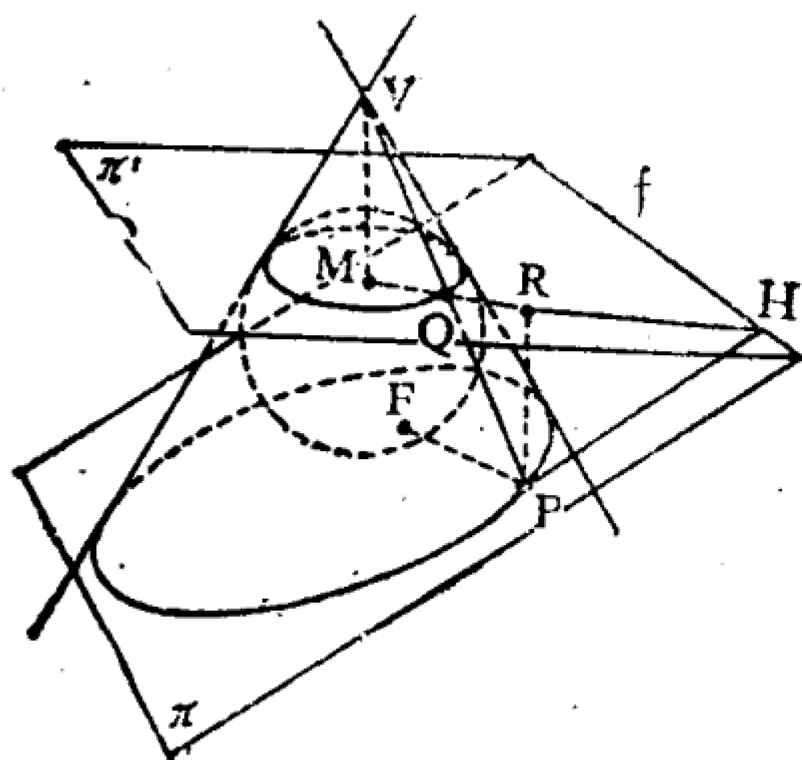
$$PF=PQ. \qquad ①$$

由 V、P 向 π' 作垂线，设垂足分别为 M、R，则 M、Q、R 位于同一条直线上，根据三垂线的定理，有 $RM\perp f$.

若令 $\angle QVM=\alpha$，$\angle RPH=\beta$，则 α、β 与 P 的位置无关，是恒定的.

由图 7—91 的下面部分可看出，

$$PR=PQ\cos\alpha,\ PR=PH\cos\beta$$



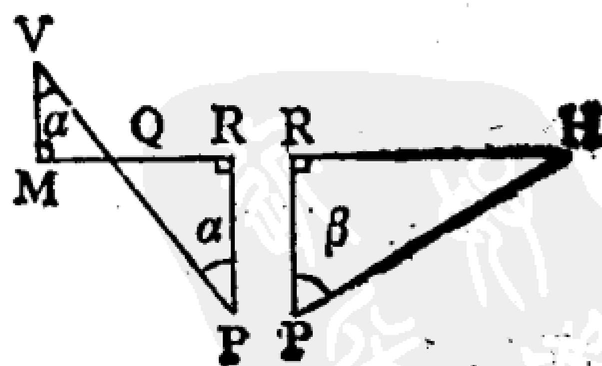


图 7-91

$\therefore \qquad PQ\cos\alpha = PH\cos\beta,$

$\therefore \qquad \dfrac{PF}{PH} = \dfrac{PQ}{PH} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$

因此，截口的曲线是到定点 F 和定直线 f 的距离之比为定值的点的轨迹，从而是以 F 为焦点，f 为准线的固有二次曲线。 □

注意 偏心率为 $e = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

讨论1. 在上述证明中，用到一些立体几何学的有关性质，例如

(1) 球与平面或直线相切的性质；

(2) 圆锥与球相切的性质；

(3) 三垂线定理等等.

2 在【定理】16 中，当 $\alpha<\beta$ 时有 $\cos\alpha>\cos\beta(>o)$. 因此有 $o<e<1$，截口曲线是椭圆，在这种情况下，与 π 及圆锥相切的球有两个(图7-92). 若令它们与 π 的切点分别为 F、F'，令通过椭圆上任意一点 P 和圆锥上 V 点的直线与两个球的切点各为 Q、Q'，则

$PF = PQ,$

$PF' = PQ'$ (∵有①),

因此，$PF + PF' = QQ'$ (恒定).

3. 当 $\alpha>\beta$ 时，$e>1$，截口曲线是双曲线，但截口平面在越过圆锥顶点的延长面与圆锥面的截口也是双曲线. 当 $\alpha=\beta$ 时 $e=1$ 是抛物线.

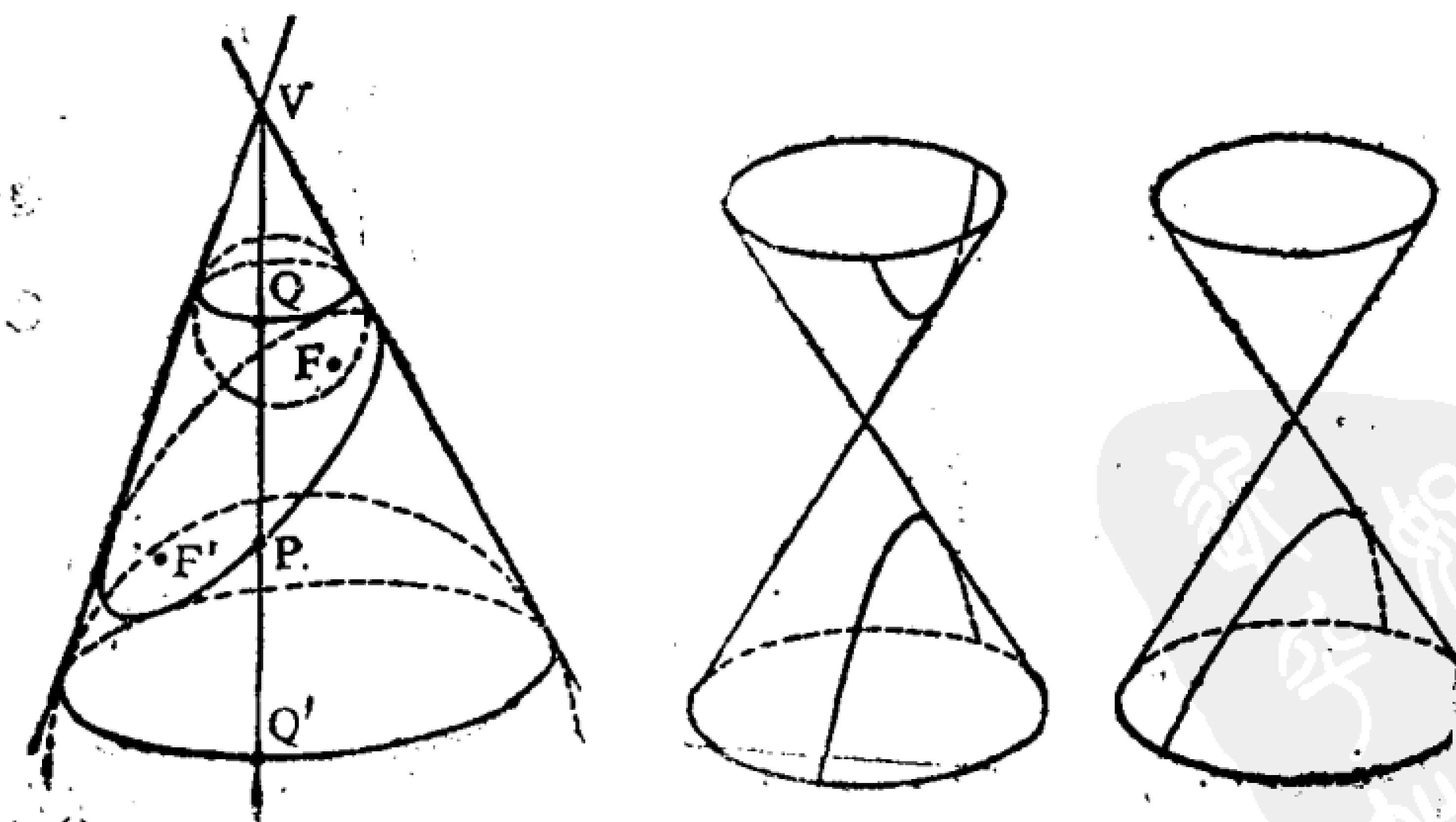


图 7-92

在这种情形下，截口平面平行于圆锥一条母线

4·5 斜交系中二次曲线的方程

【定义】 椭圆、双曲线的直径 对于椭圆、双曲线，当通过其中心的直线与该曲线相交时，交点间的线段叫做直径，交点叫做直径的端点。

注意 对于抛物线，有时把平行于主轴的直线叫做直径。

例题 试证明：在椭圆中，所有平行的弦的中点位于一条直径上。

证明 如图 7-93 所示，设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$， ①

由于椭圆关于 x、y 轴都是对称的，故平行于 x 轴的弦的中点位于 y 轴上(一条直径)，平行于 y 轴的弦的中点位于 x 轴上(一条直径)。

当弦既不平行于 x 轴、也不平行于 y 轴时，令其直线方程为

$$y=mx+n(m\neq o),$$

假设它与椭圆的交点为 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$。

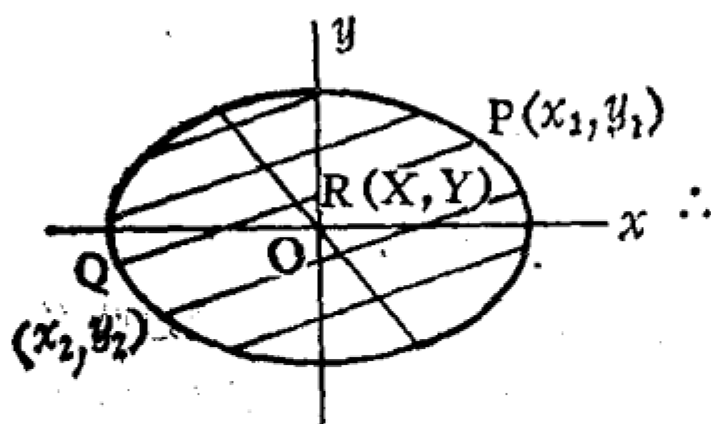


图 7-93

由①、②式消去 y 得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore\ (a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0.$$

设它的两个根是 x_1，x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2mn}{a^2m^2+b^2}$$

又设 $R(X, Y)$是线段 PQ 的中点，则

$$Y=mX+n, \quad ③$$

又 $$X=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mn}{a^2m^2+b^2}, \quad ④$$

由③、④式消去 n，便得

$$X=-\frac{a^2m(Y-mX)}{a^2m^2+b^2},$$

$$\therefore\quad Y=-\frac{b^2}{a^2m}X.$$

从而，点 R 位于通过原点、斜率为$-\frac{b^2}{a^2m}$的直线上，即位于一条直

径上.

讨论1. 若令 $-\frac{b^2}{a^2m}=m'$, 则 $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$. 上例的结果可变为: "斜率为 m 的弦被斜率为 m' 的直径平分". 把 m 和 m' 交换也得到同样的结论.

2. 对于双曲线，同样的结论也成立.

3. 对于抛物线，平行弦的中点也位于一条直径上.

【定义】6. 共轭直径　对于椭圆、双曲线、当与二直径之一平行的所有弦恒被另一直径平分时，此二直径叫做互为共轭的直径.

注意　这样的直径的存在问题，已由【定义】5的例题及讨论2所确认.

【定理】17. 在以椭圆的一对共轭直径为 x, y 轴的斜交系中，这个椭圆的方程式可表为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

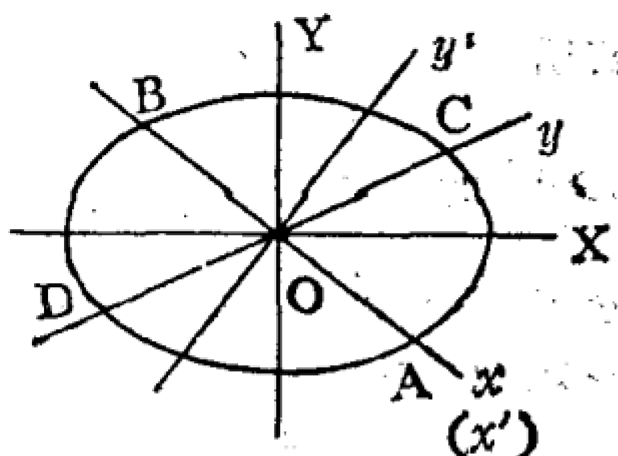


图 7-94

证明　如图7—94所示，设分别包含长轴、短轴的有向直线为 X, Y 轴，则这个椭圆的方程可表为下列形式

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

假设围绕原点旋转 X 轴、Y 轴，当 X 轴与 x 轴重合时，变成为 x' 轴(与 x 轴同)、y' 轴. 这时，根据§ 1.【定理】9及§ 4.【定理】4知，X、Y是 x'、y' 的一次齐次式，x'、y' 是 x、y 的一次齐次式. 因此坐标变换式最后为

$$\begin{cases}X=px+qy,\\ Y=rx+sy.\end{cases}\quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ 是常数})$$

把上式代入①式，便得

$$\alpha x^2+\beta xy+ry^2=1. \qquad ②$$

由于与 y 轴平行的弦一定被 x 轴平分，因此若点 $P(x,\ y)$ 位于曲线上(图7—95)，则点 $p'(x,\ -y)$ 也仍然位于曲线上，从而②式与下列方程式是相同的.

$$\alpha x^2-\beta xy+ry^2=1. \qquad ③$$

从而 $\beta=0$, ②式化为

$$\alpha x^2+ry^2=1.$$

在图7—95中，若令$OA=a'$，$OC=b'$，则由于点$(a', 0)$，$(0, b')$位于曲线上，因此

$$aa'^2=1,\quad rb'^2=1,$$

$$\therefore\qquad a=\frac{1}{a'^2},\qquad r=\frac{1}{b'^2},$$

从而，所求的方程是

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.\qquad\square$$

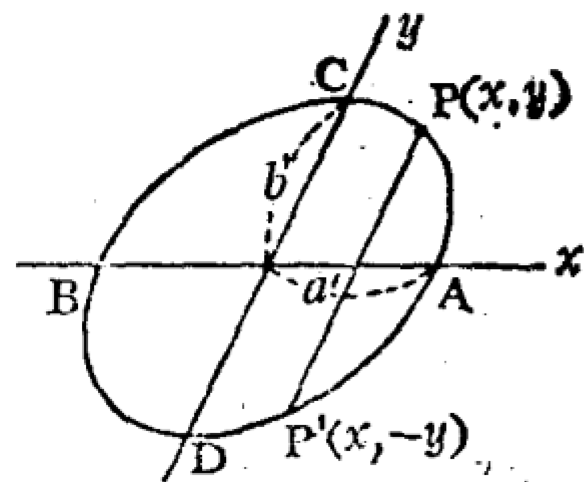


图 7-95

【定理】18. 在以双曲线的渐近线为x轴，y轴的斜交系中，此双曲线的方程式可写成

$$xy=k\qquad（k\text{是非零的常数}）.$$

证明　对X轴、Y轴组成的直角坐标系，双曲线$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$的渐近线方程式是$y=\pm\frac{b}{a}X$．现考虑这个渐近线在第四象限的部分作为$x$轴的正半轴，位于第一象限的部分作为$y$轴的正半轴所构成的斜交系(图7-96)．

设θ是x轴与X轴正方向的夹角，x'轴、y'轴是把X轴、Y轴围绕原点转过$-\theta$角后所得的新坐标轴，则x'轴与x轴重合，斜交轴x、y轴的轴角是2θ(图7-97)．根据§4.【定理】4及§1.【定理】9知，坐标变换式是：

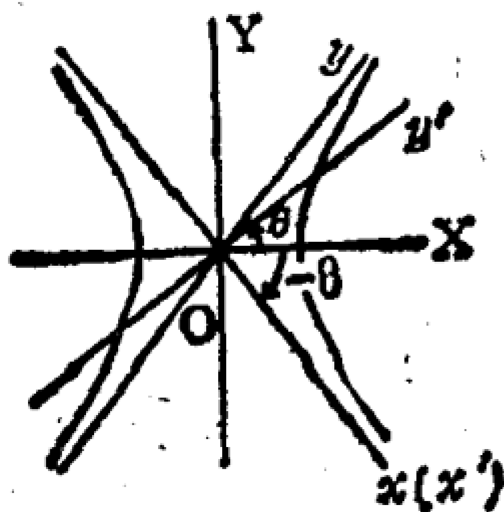


图 7-96

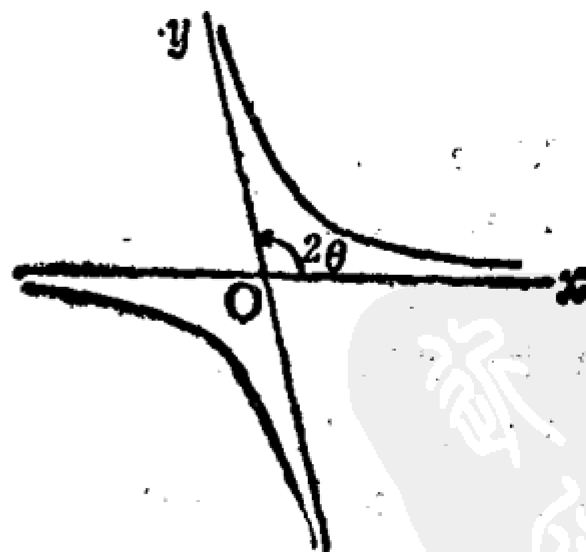


图 7-97

$$\begin{cases}X=x'\cos(-\theta)-y'\sin(-\theta)=x'\cos\theta+y'\sin\theta,\\ Y=x'\sin(-\theta)+y'\cos(-\theta)=-x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} x^{\bullet}=x+y\cos2\theta, \\ y^{\bullet}=y\sin2\theta, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} X&=(x+y\cos2\theta)\cos\theta+y\sin2\theta\sin\theta \\ &=x\cos\theta+y(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta) \\ &=x\cos\theta+y\cos\theta=(x+y)\cos\theta, \\ Y&=-(x+y\cos2\theta)\sin\theta+y\sin2\theta\cos\theta \\ &=-x\sin\theta+y(\sin2\theta\cos\theta-\cos2\theta\sin\theta) \\ &=-x\sin\theta+y\sin\theta=-(x-y)\sin\theta. \end{aligned}$$

把它们代入原双曲线方程，得

$$\frac{1}{a^2}(x+y)^2\cos^2\theta-\frac{1}{b^2}(x-y)^2\sin^2\theta=1. \qquad ①$$

但是 $\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$，因此

$$\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=\frac{a^2}{a^2+b^2},$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

由①式得

$$\frac{(x+y)^2}{a^2+b^2}-\frac{(x-y)^2}{a^2+b^2}=1,$$

$$\therefore \quad xy=\frac{a^2+b^2}{4}\text{(常数)}. \qquad \square$$

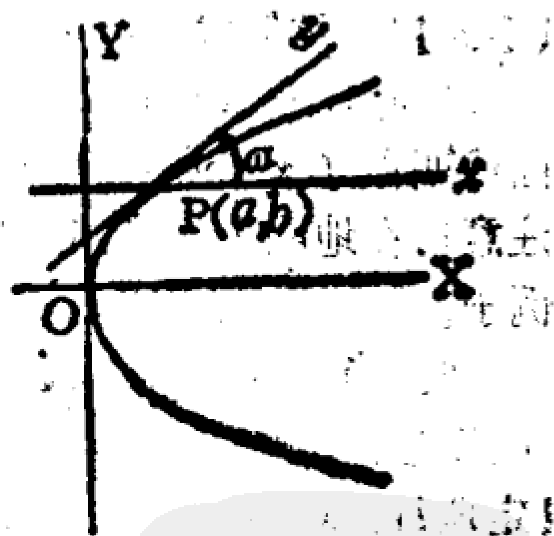


图 7-98

【定理】19. 对于以通过抛物线上一点 P 的直径为 x 轴、以在 P 点的切线为 y 轴的斜交系，此抛物线方程可写成 $y^2=4p'x(p'\neq0)$.

证明 如图7—98所示，对于以主轴为 X 轴，以通过顶点、垂直于 X 轴的直线为 Y 轴的直角坐标系，抛物线方程式可写成

$$Y^2=4pX(p\neq0). \qquad ①$$

设 P 的坐标为(a, b)，则根据§3.【定理】9，P 点处的切线方程是

$bY=2p(X+a)$.

因此，若令 x, y 轴的轴角为 ω，则有

$$\mathrm{tg}\omega=\frac{2p}{b}. \qquad ②$$

根据§4.【定理】3及§1.【定理】9知，坐标变换式是

$$X=a+x+y\cos\omega,\quad Y=b+y\sin\omega.$$

所以，把它们代入①式得

$$(b+y\sin\omega)^2=4p(a+x+y\cos\omega),$$

$$\therefore \quad y^2\sin^2\omega-4px+2(b\sin\omega-2p\cos\omega)y+b^2-4pa=0. \qquad ③$$

由于点 $P(a, b)$位于①的曲线上，故 $b^2-4pa=0$，又由②式有 $b\sin\omega-2p\cos\omega=0$. 从而，由③式得

$$y^2\sin^2\omega-4px=0.$$

令 $\dfrac{p}{\sin^2\omega}=p'$，则 $y^2=4p'x$ □

§5. 不等式和区域

5·1 等值线

【定义】1. 等值线 设 $f(x, y)$是x, y 的函数式，当满足 $f(x, y)=k$(k是常数)的点(x, y)的集合(即 $\{(x, y)|f(x, y)=k\}$)构成一条曲线时。这曲线叫做 $f(x, y)$的等值线.

注意1. 在地图上的等高线是等值线的一个例子.

2. 当 $k=0$ 时的等值线是$f(x, y)=0$的图形.

【定理】1. x、y的一次式 $ax+by+c$ (a, b 中至少有一个不为0)的等值线，是与直线$ax+by+c=0$平行或重合的直线.

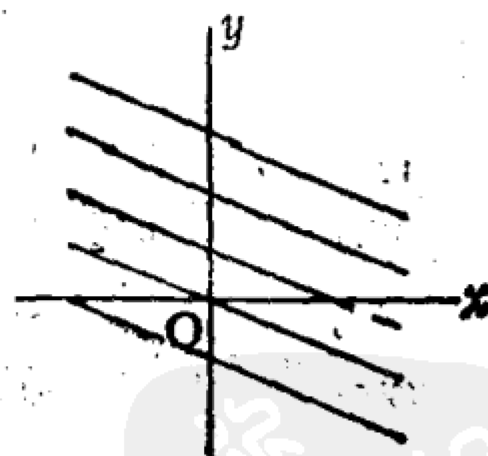


图 7-99

证明 若令 $ax+by+c=k$(k是常数)，则有

$$ax+by+c-k=0.$$

满足上式的点(x, y)的集合显然是平行于直线 $ax+by+c=0$. 的直线. □

注意 直线 $ax+by+c=0$，是 $ax+by+c=k$ 当 $k=0$ 时的等值线. 伴随着 k 的变动，其等值线将平行移动，如图 7-99 所示，

【定理】2. $K(x,y)=x^2+y^2+Ax+By+C$ 的等值线是以点$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$为中心的圆.

证明 若令 $x^2+y^2+Ax+By+C=k$，则

$$x^2+y^2+Ax+By+(C-k)=0.$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2-4C+4k),$$

当 $k>-\frac{A^2+B^2-4C}{4}$时，它表示以$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$为中心的圆.

当 $k=-\frac{A^2+B^2-4C}{2}$时，它表示点$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$.

当 $k<-\frac{A^2+B^2-4C}{4}$时，它不表示图形.

从而，除了最后的情形外，等值线是以点$\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$为中心的圆(包括点圆)，如图 7-100 所示.

例题1. 试求 $Q(x,\ y)=y^2-4px\ (p\neq0)$的等值线.

解 若令 $y^2-4px=k$,

则 $$y^2=4p\left(x+\frac{k}{4p}\right).$$

这是把抛物线 $Q(x,\ y)=0$ 在 x 轴方向平移$-\frac{k}{4p}$后所得的抛物线，如图7-101所示.

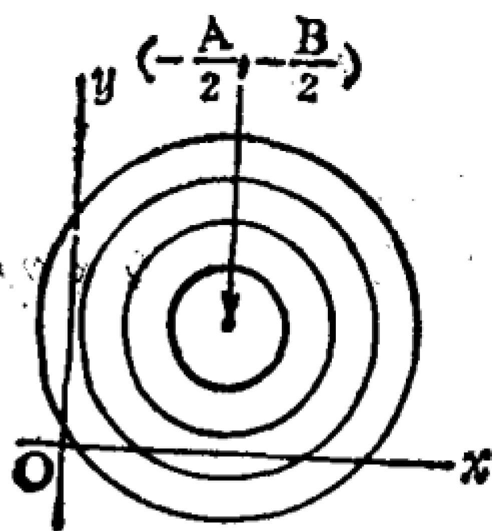


图 7-100

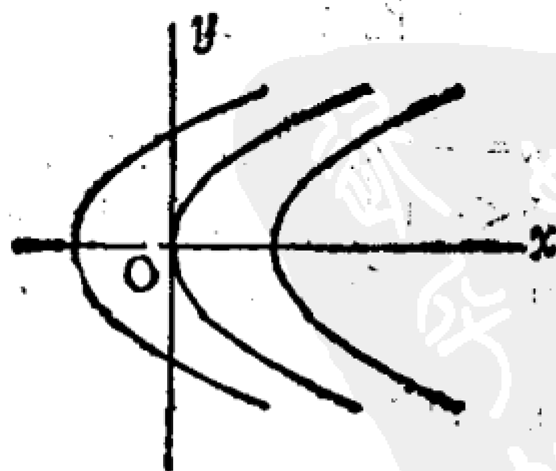


图 7-101

例题2. 试求 $Q(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ 的等值线.

解 若令 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=k$，则

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k+1.$$

当 $k<-1$ 时，它不表示图形，因此排除掉.

当 $k=-1$ 时，它只表示原点.

当 $k>-1$ 时，它表示以原点为中心的椭圆，如图 7-102 所示.

例题3 试求 $Q(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ 的等值线.

解 等值线方程式是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k+1$.

当 $k>-1$ 时，它是焦点在 x 轴上的双曲线，与双曲线 $Q(x,y)=0$ 具有相同的中心.

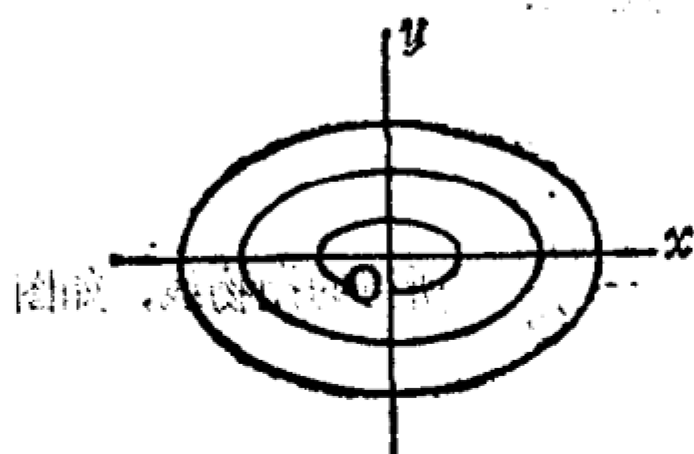


图 7-102

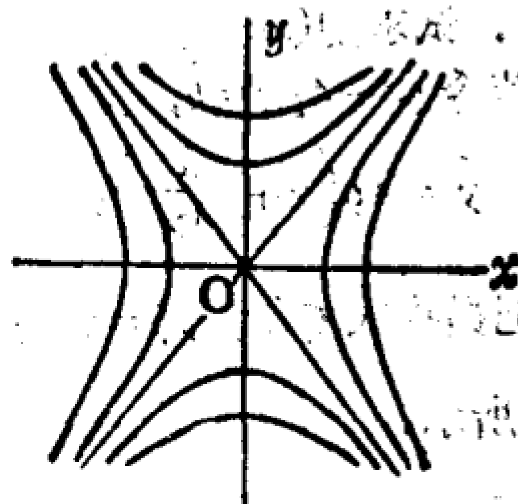


图 7-103

当 $k=-1$ 时，它是双曲线 $Q(x,y)=0$ 的渐近线.

当 $k<-1$ 时，它是焦点在 y 轴上的双曲线，具有与双曲线 $Q(x,y)=0$ 相同的中心和渐近线.

5·2 正区域 负区域

【定义】2. 正区域、负区域 设 $f(x,y)$ 是 x、y 的函数式，满足 $f(x,y)>0$ 的点 (x,y) 的集合（即 $\{(x,y)\mid f(x,y)>0\}$）叫做 $f(x,y)$ 的正区域，满足

$f(x,y)<0$的点(x,y)的集合(即 $\{(x,y)|f(x,y)<0\}$)叫做$f(x,y)$的负区域。

注意 对于$f(x,y)$的一次式的特殊情形的正区域、负区域已在§1【定义】18,【定理】29叙述过了。

【定理】3. $K(x,y)=x^2+y^2+Ax+By+C$ $(A^2+B^2-4C>0)$的正区域是圆$K(x,y)=0$的外部,负区域是圆$K(x,y)=0$的内部。

证明 $K(x,y)=\left(x+\dfrac{A}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{B}{2}\right)^2-\dfrac{A^2+B^2-4C}{4}$ 令点(x,y)为P,

点$\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2}\right)$为$Q$,$\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}=r$.

若$K(x,y)>0$,则

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2>r^2,$$

$\therefore$ $PQ^2>r^2$. 即点P位于圆$K(x,y)=0$的外部。

若$K(x,y)<0$,则

$PQ^2<r^2$,点P位于该圆的内部。

若$K(x,y)=0$,则$PQ^2=r^2$,点P位于该圆上。

根据以上讨论,【定理】的结论成立,如图7-104所示。 □

【定义】3. 二次曲线的内部、外部 在一平面上,被二次曲线所划分开的各部分中,包含其焦点的部分叫做二次曲线的内部,不包含其焦点的部分,叫做二次曲线的外部,如图7-105所示。

例题1. 试求

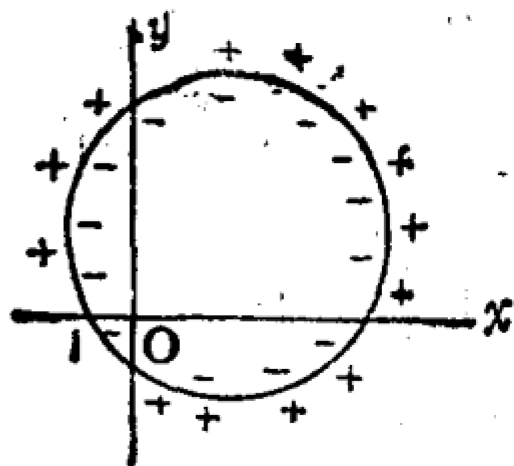


图 7-104



图 7-105

$Q(x,y)=y^2-4px\ (p>0)$的正区域、负区域。

解 满足$Q(x,y)=0$的点位于抛物线$y^2=4px$上。

当 $Q(x,y)<0$，即　$y^2-4px<0$　　①

时，通过满足①式的任意一点$P(x,y)$作平行于 x 轴的直线，设它与抛物线 $y^2=4px$ 的交点为 $S(x_1,y_1)$（图 7-106），则

$$y_1^2-4px_1=0,\quad y_1=y.$$

因此

$$y^2-4px_1=0.\qquad ②$$

由①、②式得　$4px_1-4px<0$.

因为　$4p>0$，所以　$x_1<x$.　即点 P 位于抛物线　$y^2=4px$ 的内部.

类似地讨论可知满足 $Q(x,y)>0$ 的点位于抛物线的外部.

根据以上讨论可知，$Q(x,y)$的正区域是抛物线 $Q(x,y)=0$ 的外部，负区域是抛物线的内部，如图 7-106 所示.

例题2. 试求 $Q(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}-1$ 的正区域负区域.

解　$Q(x,y)=0$ 表示椭圆，记之为 C. 若 $p(x,y)$是满足 $Q(x,y)>0$即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1>0\qquad ①$$

的任意一点，则

$$y^2>\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

若点 $P(x,y)$满足 $|x|>|a|$，则此不等式恒成立. 在此情形下，P 位于椭圆 C 的外部.

当 $|x|<|a|$ 时，通过 P 点作平行于 y 轴的直线必与 C相交，设此交点为 $S(x_1,\ y_1)$，则

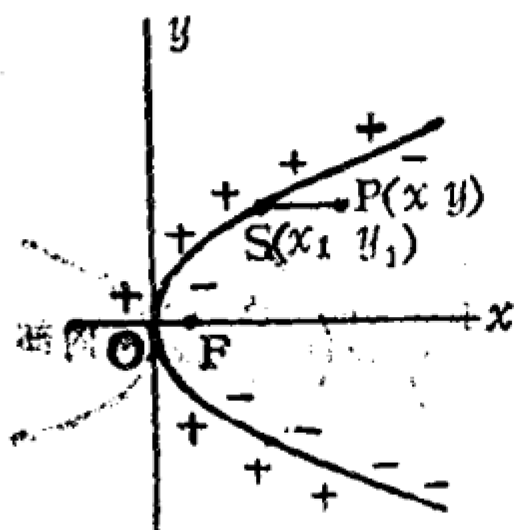


图 7-106

$$x_1=x,\quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0.\qquad ②$$

由①、②式得

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}>0,\quad\therefore\quad |y|>|y_1|.$$

从而，在这种情形下，P 点也位于 C 的外部.

类似地，可知满足 $Q(x,y)<0$ 的点位于 C 的内部.

根据以上讨论可知，$Q(x,y)$的正区域是 C 的外部、负区域是 C 的内部，如图 7-107 所示.

例题3. 试求 $Q(x,y)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ 的正区域、负区域.

解 使 $Q(x,y)=0$ 的点的轨迹是双曲线，把它记为 C. 设 $P(x,y)$ 是满足 $Q(x,y)>0$ 即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1>0 \quad ①$$

的任意一点，过 P 点作平行于 x 轴的直线，则它必与 C 相交，设此交点为 $S(x_1, y_1)$，则

$$y=y_1,\quad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1=0,$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0. \quad ②$$

由①、②式有 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}>0$，$\therefore |x|>|x_1|$. 从而，$P$ 点位于 C 的内部.

类似地，可知满足 $Q(x,y)<0$ 的点位于 C 的外部.

根据以上讨论可知，$Q(x,y)$的正区域是 C 的内部，负区域是 C 的外部，如图 7-108 所示.

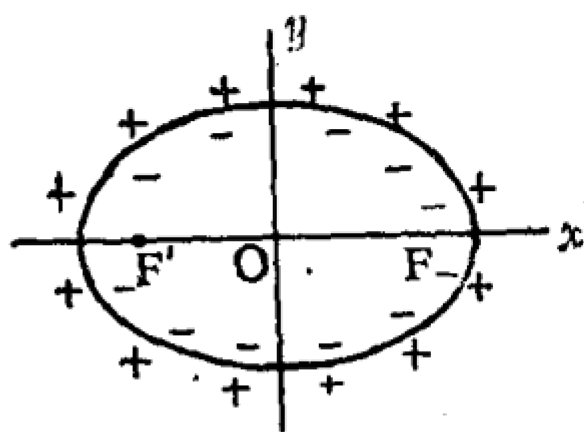


图 7-107

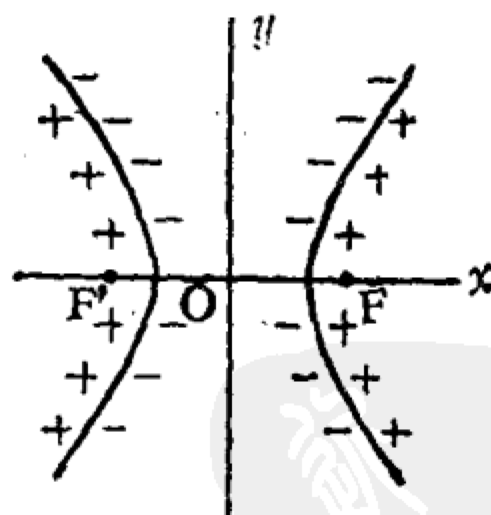
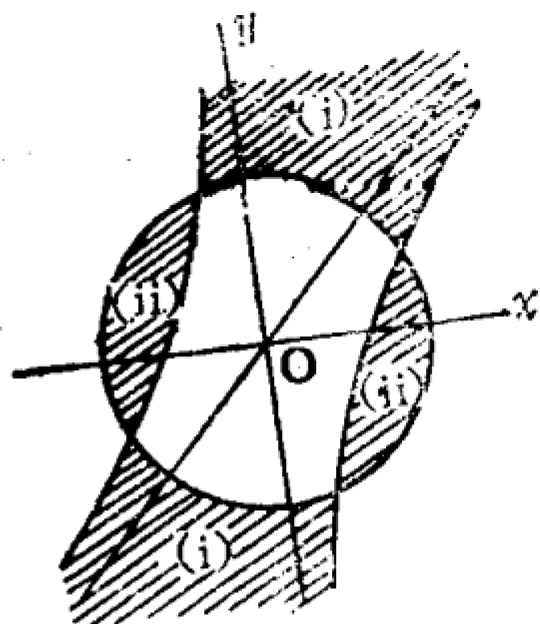


图 7-108

一般地说，下列定理成立.

【定理】4. 二次方程 $f(x,y)=0$ 表示固有二次曲线时，$f(x,y)$的正区域是这个曲线的内部(或外部)，而 $f(x,y)$的负区域则是其外部(或内部).

讨论 $kf(x,y)$ (k是不为0的常数)的正区域，当$k>0$时，与$f(x,y)$的正区域相同；当$k<0$时，与$f(x,y)$的负区域一致．而边界线是曲线$f(x,y)=0$．又，$\{f(x,y)\}^2$的正区域是除去曲线$f(x,y)=0$以外的整个平面．因此，所谓正区域、负区域，不是对曲线来说的，而是对表达式来说的．



(不包括边界线)
图 7-109

例题 画斜线表示出x,y的四次式

$$f(x,y)=(x^2+y^2-9)(x^2-xy-4)$$

的负区域．

解 $f(x,y)<0$与下列事实是等价的：

(i) $\begin{cases}x^2+y^2-9>0,\\x^2-xy-4<0\end{cases}$

或 (ii) $\begin{cases}x^2+y^2-9<0,\\x^2-xy-4>0\end{cases}$

分别满足(i)、(ii)的点(x,y)的集合的并集是所求的区域．

x^2+y^2-9的正区域是圆$x^2+y^2-9=0$的外部．

又，方程$x^2-xy-4=0$可变形成$x(x-y)=4$．但根据§4.【定理】15的例题可知，它表示以二直线$x=0$，$x-y=0$为渐近线的双曲线．若在$x^2-xy-4=0$中令$y=0$，则$x=\pm2$．因此变为图7-109所示的那样．而且，对于x^2-xy-4，若令$x=0$，$y=0$，则化为$-4(<0)$，因此x^2-xy-4的负区域是双曲线的外部(包围着原点)．

根据以上讨论知，(i)是圆的外部与双曲线的外部的公共部分．(ii)表示圆的内部与双曲线的内部的公共部分．

讨论 除了边界线以外，平面的其余部分(未画斜线的部分)是$f(x,y)$的正区域．在边界线上，$f(x,y)=0$．

§6. 曲线的表示方法

6·1 用参数表示的方法

【定义】1. 参变量(或辅助变量) 设$x=f(t)$，$y=g(t)$，则在x,y之间存在直接的函数关系，而t成为起过渡作用或参考作用的变量，故t叫做参变量(或参数辅助变量)．

注意 若消去t，则可化为$F(x,y)=0$．

一条直线或曲线可有各种各样的参数表示法。下面列举几种有代表性的参数表示法.

(I) 直线:

1) $\begin{cases} x=a+t\cos\alpha, \\ y=b+t\sin\alpha, \end{cases}$ (t 是参变量)

如图 7-110 所示，考虑到通过点 $A(a,b)$ 的直线 g 的方向，设 α 是由 x 轴的正方向到 g 的正方向的夹角，t 是由 A 到 g 上任意一点 $P(x,y)$ 的有向线段 AP 的长度，则上式成立. 当 t 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，P 点在 g 上由负无穷通过一切点移向正无穷.

注意 当 $\cos\alpha\neq 0$ 时，若消去 t，则化为 $y-b=\operatorname{tg}\alpha(x-a)$，若令 $m=\operatorname{tg}\alpha$，则化为在§1.【定理】16 中所得到的形式.

2) 通过二点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 的直线

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases} \quad (\lambda\text{为参变量})$$

根据§1.【定理】16 的例题 3，这是很明显的.

(II) 圆

1) $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$ (r 是正的常数，θ 是参变量)

如图 7-111 所示，设 $P(x,y)$ 是以原点 O 为圆心 r 为半径的圆周上任意一点，θ 是从 x 轴正方向到 OP 的夹角，则上式成立. 如果 θ 从 0 变到 2π，则 P 点从 $(r,0)$ 出发在圆周上沿正方向转一周.

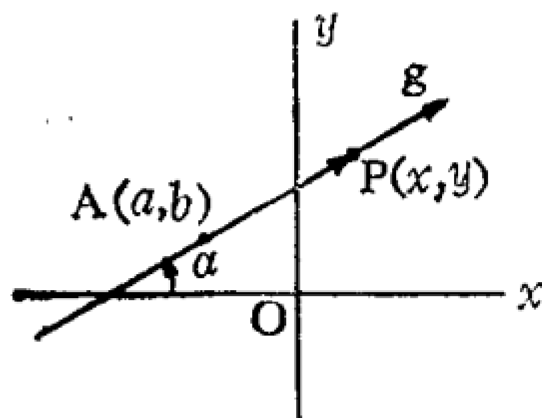


图 7-110

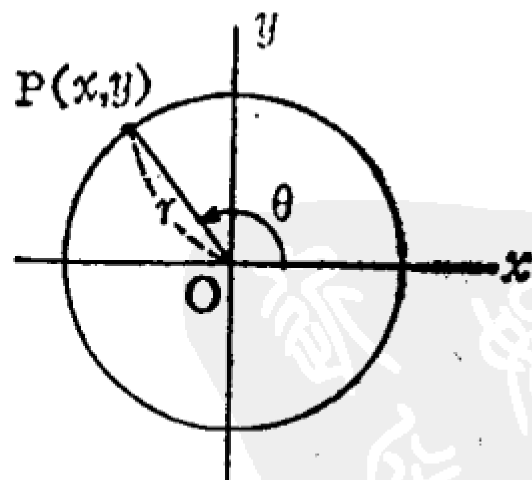


图 7-111

2) $\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta. \end{cases}$ (r 是正的常数，θ 是参变量)

如图 7-112 所示，上式表示以点(a,b)为圆心 r 为半径的圆．

注意1． 如果消去参变量，则 1)变为 $x^2+y^2=r^2$，2)变为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，它们是分别在§1．【定理】12 的例题3，§2．【定理】1中得到的方程．

2．（Ⅰ）1) 和（Ⅰ）2) 的式子形式是相同的，但在（Ⅰ）中，t 是变数，a 是常数，而在（Ⅱ）中，r 是常数，θ 是变数．

3．从式子的构成来考虑，把 1)的图形在 x 轴方向平移 a，在 y 轴方向平移 b，就是 2)的图形．

讨论 下列各式都表示以 t 为参变量，以原点为圆心，r 为半径的圆．它们都可作为一条曲线的参变量表示的例子．

（甲）$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t;\end{cases}$　　（乙）$\begin{cases}x=t,\\ y=\pm\sqrt{r^2-t^2};\end{cases}$

（丙）$\begin{cases}x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}r,\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}r;\end{cases}$

（Ⅱ）椭圆：$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta.\end{cases}$

$(a>0,b>0,\theta$ 是参变量$)$

注意 消去 θ 就化为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$它是在§3．【定理】2中所得的标准形．

因为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是把圆 $x^2+y^2=a^2$ 在 y 轴方向乘以$\dfrac{b}{a}$倍后得到的曲线(参看§4．【定理】2 例题 1 的讨论 1)，如图 7-113 所示，所以，若

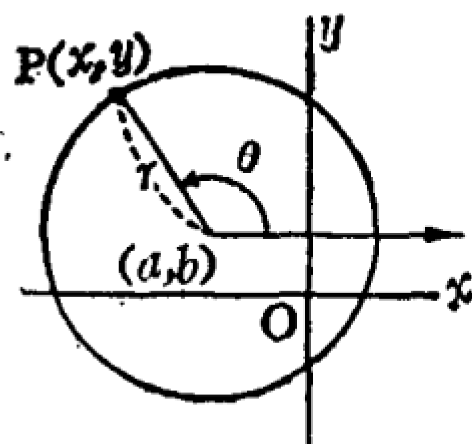


图 7-112

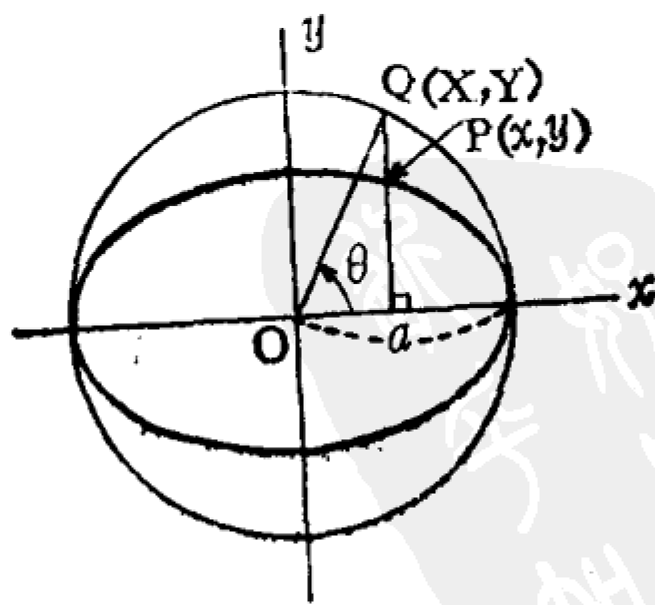


图 7-113

令 $Q(X, Y)$ 是通过椭圆上任意一点 $P(x, y)$ 而垂直于 x 轴的直线与圆的交点，θ 是从 x 轴的正方向到 OQ 的角，则有

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = \dfrac{a}{b}y, \end{cases} \qquad \begin{cases} X = a\cos\theta. \\ Y = a\sin\theta, \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases}$$

当 θ 由 0 到 2π 变动时，点 Q 从 $(a, 0)$ 出发在圆周上转一周，因而与此对应，点 P 从点 $(a, 0)$ 出发，在椭圆周上转一周.

(Ⅳ) 双曲线：$\begin{cases} x = a\sec\theta, \\ y = b\,tg\,\theta. \end{cases}$

($a>0$, $b>0$, θ 是参变量)

注意 若消去 θ，则化为 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 即在 § 3.【定理】3 中所得到的标准形.

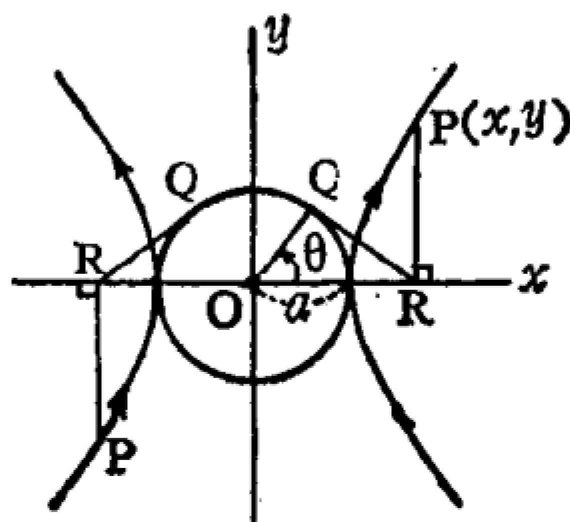


图 7-114

如图 7-114 所示，从双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上的一点 $P(x, y)$ 向 x 轴作垂线，设垂足为 R，从 R 点作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线，设切点为 Q. 这里，根据 P 点位于第一、第二、第三、第四象限，Q 相应地位于第一、第三、第二或第四象限. 若令 θ 为从 x 轴的正方向到 OQ(O 为原点) 的角，则得上述参变量表达式。当 θ 从 0 到 2π 变动时，点 P 由点 $(a, 0)$ 出发在曲线上沿图的箭头方向前进. 若 Q 移到第二象限，则 P 在曲线上沿箭头方向前进到第三象限. 以后，θ 运动时，P 点在曲线上沿箭头方向前进到第二、第四象限，当 $\theta = 2\pi$ 时，回到出发点 $(a, 0)$.

讨论 对应于 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}$ 的点不存在。但当 $\theta \to \dfrac{\pi}{2} + 0$ 时，$(x, y) \to (+\infty, +\infty)$；当 $\theta \to \dfrac{\pi}{2} - 0$ 时，$(x, y) \to (-\infty, -\infty)$. 又，当 $\theta \to \dfrac{3\pi}{2} - 0$ 时，$(x, y) \to (-\infty, +\infty)$；当 $\theta \to \dfrac{3\pi}{2} + 0$ 时，$(x, y) \to (+\infty, -\infty)$.

【定义】2. 椭圆及双曲线的辅助圆、偏心角

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，称圆 $x^2+y^2=a^2$ 为辅助圆，在(Ⅲ)、(Ⅳ)中提及的角 θ 叫做偏心角。

(Ⅴ) 抛物线：$\begin{cases}x=pt^2,\\y=2pt.\end{cases}$ ($p\neq0$，t 是参变量)

注意 若消去 t，则变为 $y^2=4px$，即是在§3.【定理】1 中得到的标准形。

如图 7-115 所示，设 $P(x,y)$ 为抛物线 $y^2=4px$ 上的一点，则该点切线的斜率为 $\frac{2p}{y}$（参看§3.【定理】9）. 若令此切线与 x 轴正方向的夹角为 θ，且 $\text{ctg}\theta=t$，则 $\frac{2p}{y}=\frac{1}{t}$。因此 $y=2pt$，$x=pt^2$，即得上述参数表示式。

设 $p>0$. 随着 θ 的变动，我们来考察 t 和 p 点的变动。当 θ 从0到 $\frac{\pi}{2}$ 变动时，t 从∞减小到零，而 p 点经抛物线在第一象限的部分由无限远点沿曲线上箭头方向移动，当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，p 点与原点重合。接着，当 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 变动时，t 从零减小到 $-\infty$. 这时，p 点从原点沿曲线的箭头方向在第四象限内移动到无限远.

(Ⅵ) 旋轮线

【定义】3. 旋轮线※ 当定长半径的圆在定直线上滚动(而不滑动)时，此圆上一定点 P 的轨迹叫做旋轮线.

如图 7-116 所示，设圆心为 C，半径为 a 的圆在 x 轴上滚动，当 P 点位于 x 轴上时，令此点为原点，这时把半径 CP 作为基准，而当转过 t 角时，令 P 的坐标为 $(x,\ y)$. 由图中有

$$\overset{\frown}{PM}=OM=at,$$
$$PN=a\sin t,$$
$$NC=a\cos t.$$

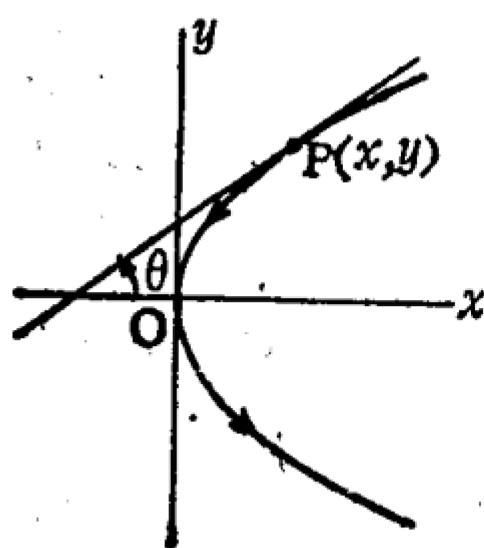


图 7-115

从而可得旋轮线的一种参变量表示：

旋轮线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\y=a(1-\cos t).\end{cases}$

($a>0$，t 是参变量)

※ 又称普通旋轮线或摆线——译注。

(Ⅵ)渐伸线

【定义】4. 渐伸线　在曲线 C 的弯曲方向不变的那段范围内，把一段无伸缩的线绕在这条曲线上，再使线无松驰地拉开，这时，线外端画出的轨迹叫做曲线 C 的渐伸线(渐开线)，如图 7-117 上部所示。

注意　由于线的长度是随意的，所以一条曲线 C 的渐伸线，可认为是无限的。

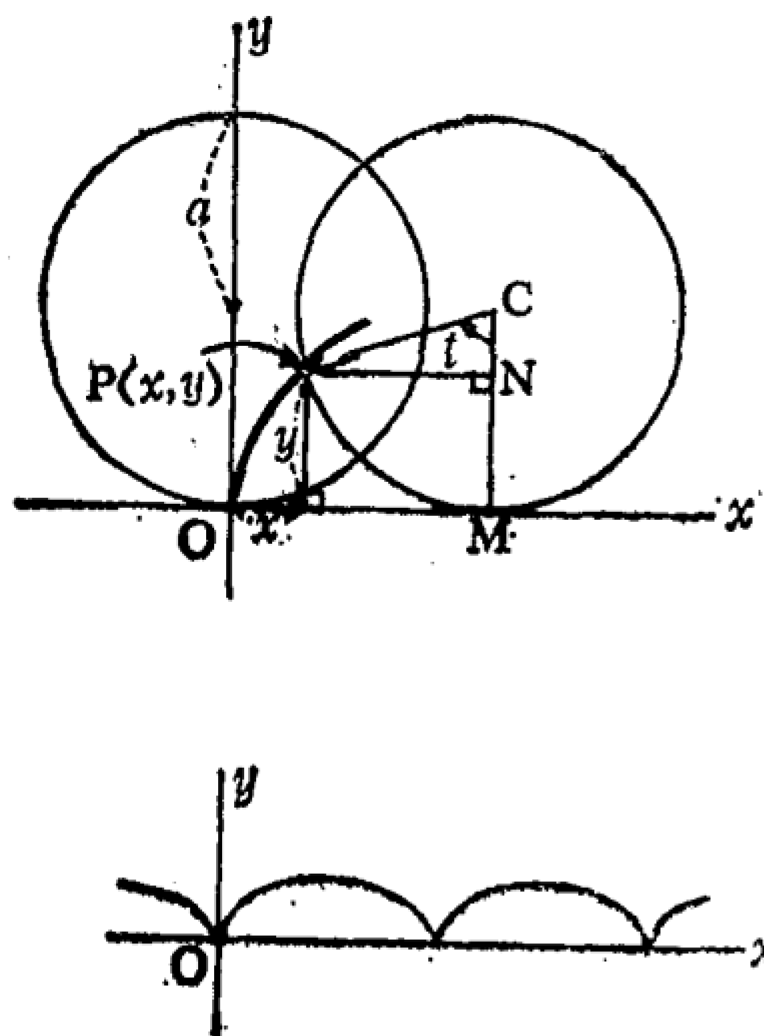


图 7-116

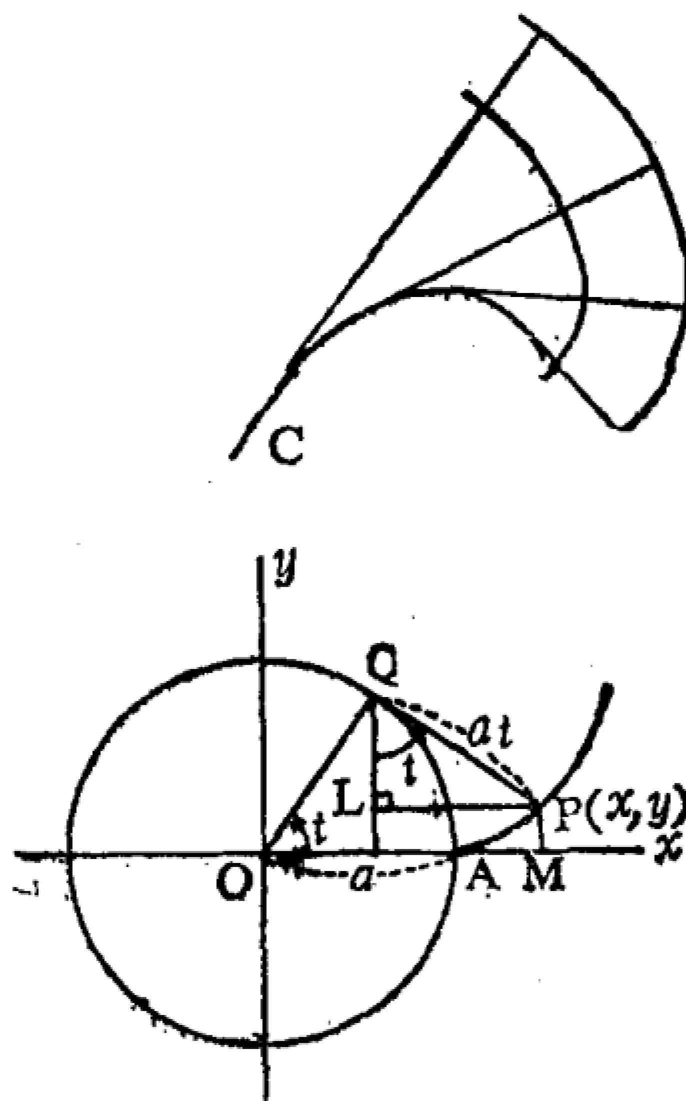


图 7-117

假定把无伸缩的线绕在圆 $x^2+y^2=a^2$ 上，再使其无松驰地从点 $A(a,0)$ 放开(图 7-117 下部)。由这个渐伸线上任意一点 $P(x,\ y)$ 向圆作切线，令切点为 Q，OQ 与 x 轴的夹角为 t，由图中有

$$QP=\widehat{AQ}=at,\ LQ=at\cos t,\ LP=at\sin t,$$

由此得圆的渐伸线的方程式

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t).\end{cases}\ (a>0,\ t\ \text{是参变量})$$

6.2 极坐标

【定义】5. 极坐标、动径、偏角、极点、基线　在平面上给定一个定点 O，

它叫做极点(或原点)，然后确定一条以 O 为端点的射线 g，它叫做基线(或原线)．令 g 的正方向为远离 O 点的方向．对于平面上的一点 P，规定出直线 OP 的正方向，并设从 g 的正方向到直线 OP 的正方向的角为 θ，有向距离 $OP=r$(可为负数)，这时，如果 r 和 θ 被确定，则点 P 就确定了，这个 r 叫做动径，θ 叫做偏角※．有序数对$(r,\ \theta)$叫做 P 点的极坐标，写成 $P(r,\ \theta)$，如图 7-118 所示。

注意1．对极点自身，不能考虑偏角，但通常设 $r=0$，θ 可取任意值。

2．在平面直角坐标或斜坐标中，一点和一对有序实数(坐标)一一对应，而在极坐标中，若动径和极角被给定，则一点就唯一确定了。反之，对于一点的极坐标，可有无穷多种表示法。为使一点的极坐标唯一确定，可设 $0\leqslant\theta<\pi$，或者设 $r>0$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$．

【定理】1．(直角坐标与极坐标的关系)

考虑以直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为基线的极坐标，若令平面上异于极点的一点的直角坐标、极坐标分别为$(x,\ y)$、$(r,\ \theta)$，则下列关系成立：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}\qquad\begin{cases}\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x},\\r^2=x^2+y^2.\end{cases}$$

证明 如图 7-119 所示，根据三角函数的定义，有

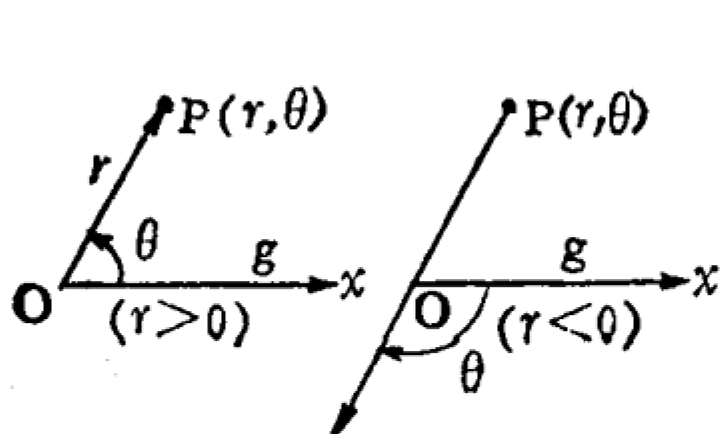


图 7-118

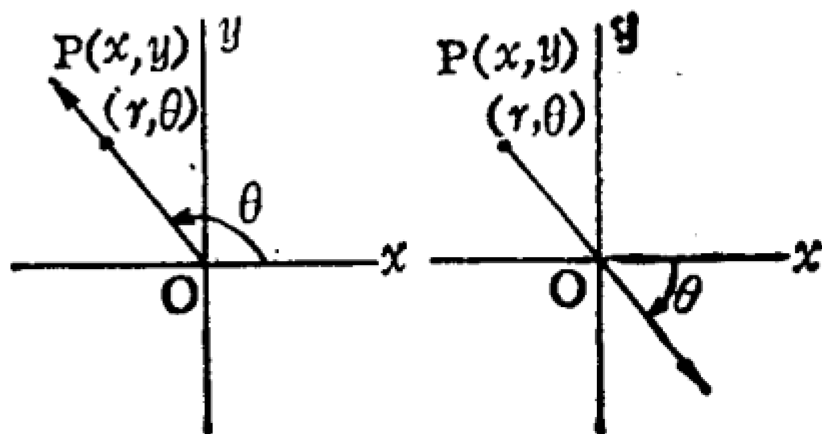


图 7-119

$$x=\overline{OP}\cos\angle(Ox,\ OP),$$
$$y=\overline{OP}\sin\angle(Ox,\ OP).$$

其中$\angle(Ox,\ OP)$表示以 x 轴的正半轴为始边，从 O 向 P 的有向直线为终边的夹角．

※ 基线又叫极轴、动径又叫极径，偏角又叫极角——译注

当 $OP>0$ 时，有

$$\overline{OP}=r,\ \angle(Ox,OP)=\theta+2n\pi(n\text{是整数}).$$

因此　$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$

当 $OP<0$ 时，有

$$\overline{OP}=-r,\ \angle(Ox,\ OP)=\theta+\pi+2n\pi.$$

因此

$$x=(-r)\cos(\theta+\pi)=r\cos\theta,$$
$$y=(-r)\sin(\theta+\pi)=r\sin\theta.$$

总之，我们有　$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$

若由两式消去 r，则得 $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{y}{x}$. 消去 θ，得 $r^2=x^2+y^2$.　□

例题1. 试求极坐标下两点 $A(r_1,\ \theta_1)$，$B(r_2,\ \theta_2)$ 间的距离.

解　如图 7-120 所示，设在以极点为原点、以基线为 x 轴正半轴的直角坐标系中，A、B 点的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，则由【定理】1，有

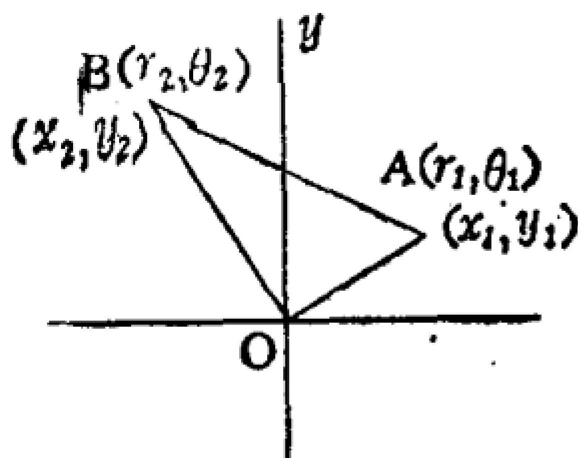


图 7-120

$$\begin{cases}x_1=r_1\cos\theta_1,\\ y_1=r_1\sin\theta_1,\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=r_2\cos\theta_2,\\ y_2=r_2\sin\theta_2.\end{cases}$$

根据§1.【定理】7

$$\begin{aligned}AB^2&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\\ &=(r_2\cos\theta_2-r_1\cos\theta_1)^2+(r_2\sin\theta_2-r_1\sin\theta_1)^2\\ &=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2(\cos\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_2\sin\theta_1)\\ &=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}\ .$$

讨论　对 $\triangle OAB$（O 为原点）可应用余弦定理.

例题2. 在极坐标系中，下列各点相对于点 $A(r,\ \theta)$ 具有什么样的位置关系？

$$B(-r,\ \theta),\quad C(r,\ -\theta),\quad D(-r,\ -\theta),\quad E(r,\ \pi-\theta).$$
$$F\left(r,\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

解　如图 7-121 所示.

B 和 A 关于极点对称；

C 和 A 关于基线对称；

D 和 A 关于通过极点、垂直于基线的直线对称；

E 和 D 重合；

F 和 A 关于通过极点且与基线构成 $\frac{\pi}{4}$ 角的直线对称.

下面举一些简单曲线的极坐标方程.

(Ⅰ). 直线：

1). 通过极点、与基线正方向的夹角为 α 的直线(参照图7-122) 其极坐标方程是

$$\theta=\alpha.$$

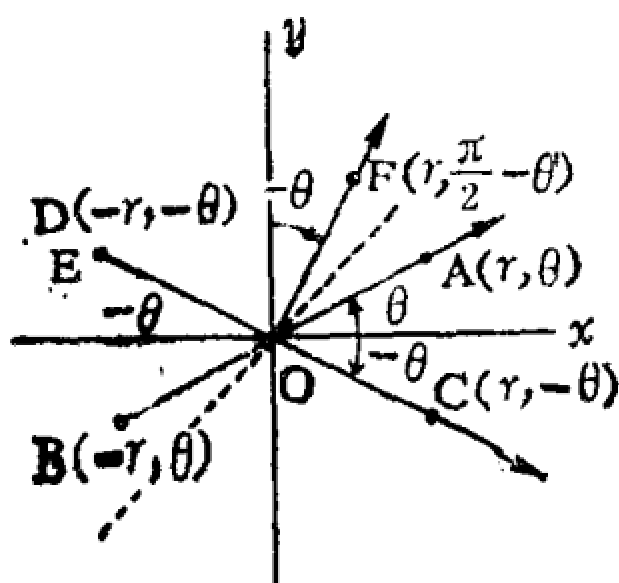


图 7-121

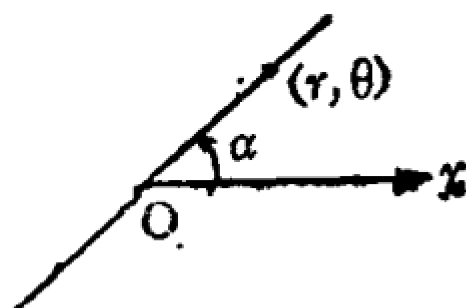


图 7-122

若$(r,\ \theta)$为直线上的任意一点，则恒有$\theta=\alpha$(r 任意)；反之也成立.

注意　根据【定理】1，若把极坐标变换为直角坐标，则有

$$\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha.\end{cases}$$

在6.1(Ⅰ)1)中，在 $a=b=0$ 的情形下，r 有参变量.

2). 由极点向直线 l 作垂线，设垂足为 H. 当 $OH=p$, $\angle(Ox,OH)=\alpha$(参看图 7-123)时，l 的极坐标方程是

$$r\cos(\theta-\alpha)=p.$$

l 是使 $PH\perp OH$ 的点 P 的轨迹。若令 P 的极坐标为$(r,\ \theta)$，则由$\angle POH=\theta-\alpha+2n\pi$($n$ 是整数)便得上式.

讨论　若应用【定理】1将上述方程变形，则化为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，即是直线的标准形(§1.[定理]26)

(Ⅱ) 圆

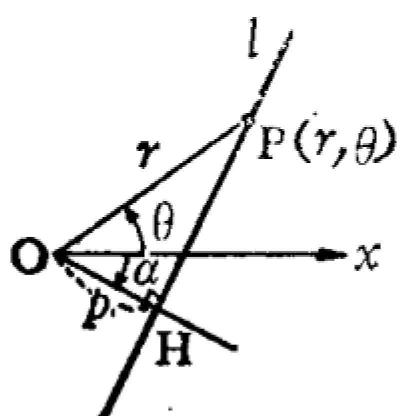


图 7-123

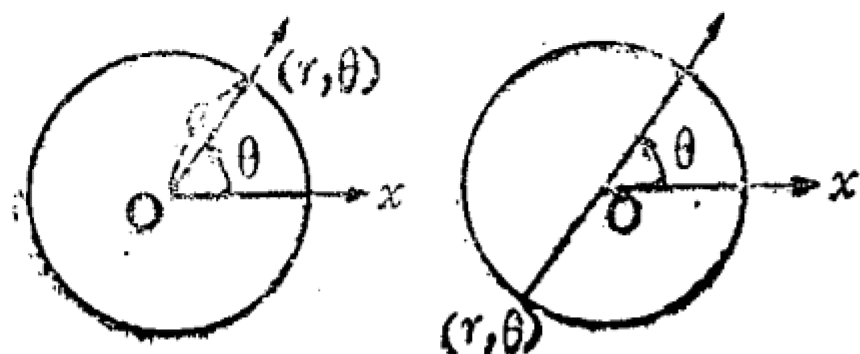


图 7-124

1). 以极点为圆心、$a(>0)$为半径的圆（图7-124）的极坐标方程式是

$$r=a \quad 或 \quad r=-a.$$

注意 因为 $r^2=a^2$，故由【定理】1，若把极坐标变换为直角坐标，则得。

$$x^2+y^2=a^2.$$

2). $r=2a\cos\theta$, ①

$(a>0)$

$r=2a\sin\theta$. ②

都是通过极点而半径为 a 的圆，①的圆心在基线上，②的圆心在通过极点而垂直于基线的直线上，如图 7-125 所示。

3). 以点(r_1, θ_1)为圆心，以a为半径的圆的极坐标方程是

$$r^2+r_1^2-2rr_1\cos(\theta-\theta_1)=a^2.$$

若令圆心为 C，则满足 $CP=a$ 的点 P 的轨迹，就是这个圆(图7-126)。令 P 的坐标为(r, θ)，应用例题1，便得上式。

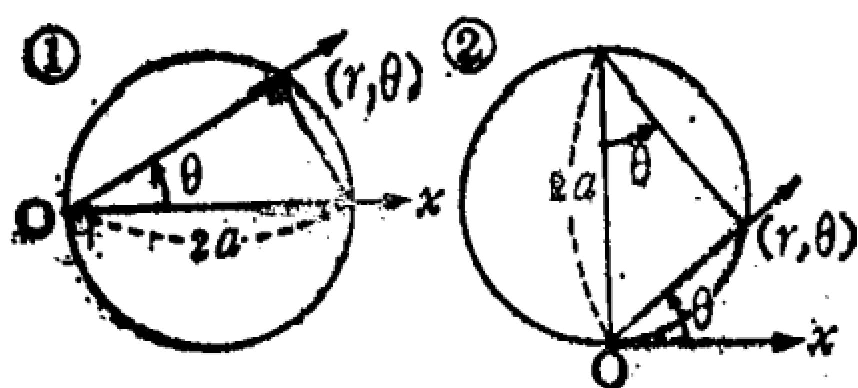


图 7-125

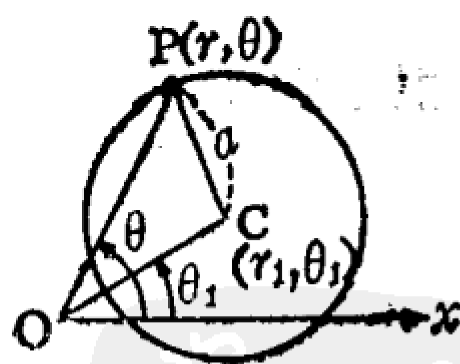


图 7-126

注意.1 若变换成直角坐标，令 C、P 的直角坐标分别是(x_1, y_1)、(x, y)，则有

$$\begin{cases}x_1=r_1\cos\theta_1,\\ y_1=r_1\sin\theta_1,\end{cases} \qquad \begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

将上面所得的极坐标方程变形，得

$$r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta\cos\theta_1-2rr_1\sin\theta\sin\theta_1=a^2,$$

∴ $$x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-2xx_1-2yy_1=a^2.$$

即 $$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=a^2.$$

此即§2.【定理】1中所得到的公式.

2. 在3)的极坐标方程中，若令 $r_1=0$，则化为1)的情形；若令$r_1=a$，$\theta_1=0$ 或 $\frac{\pi}{2}$，则化为2)的情形.

(Ⅱ) 以中心为极点，以轴为基线时的椭圆及双曲线的极坐标方程：

在直角坐标系下的椭圆及双曲线(图7-127)的方程

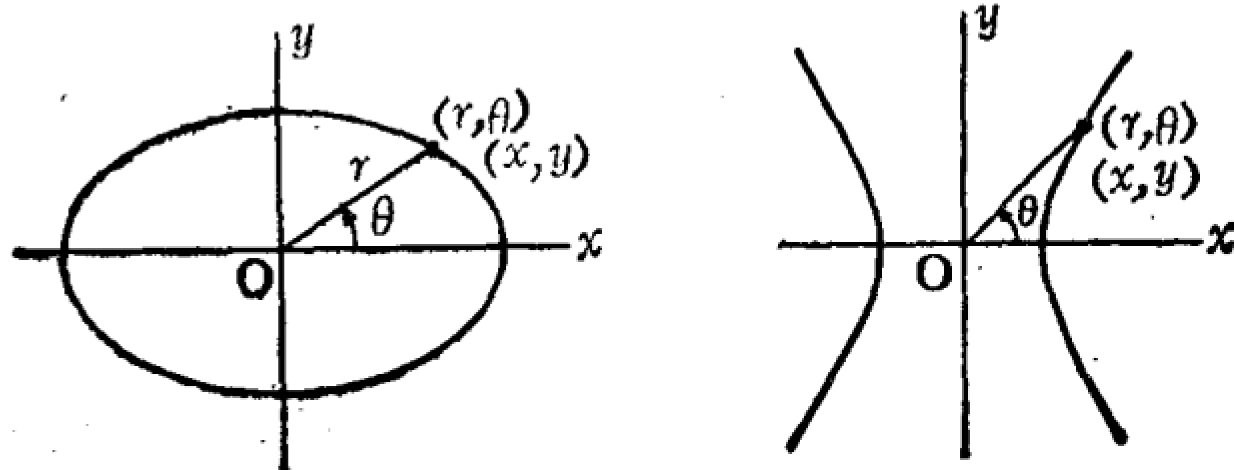


图 7-127

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0),$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0).$$

应用【定理】1，则对于椭圆有

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1.$$

∴ $$r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}.$$

或

$$r^2=\frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}\quad\left(e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\text{为偏心率}\right).$$

对于双曲线有

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\theta}{b^2}=1,$$

$$\therefore \qquad r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}.$$

或

$$r^2=\frac{b^2}{e^2\cos^2\theta-1}\quad\left(e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\text{为偏心率}\right).$$

(Ⅳ) 以焦点为极点、以轴为基线时的二次曲线的极坐标方程：

如图 7-128 所示，设通过二次曲线的焦点 F 作一条直线垂直于此焦点对应的准线 f，设 f 上的垂足为 D.

我们建立以 F 为极点，以射线 Fx(规定其正方向，使 $DF>0$) 为基线的极坐标系，并求出三次曲线的极坐标方程.

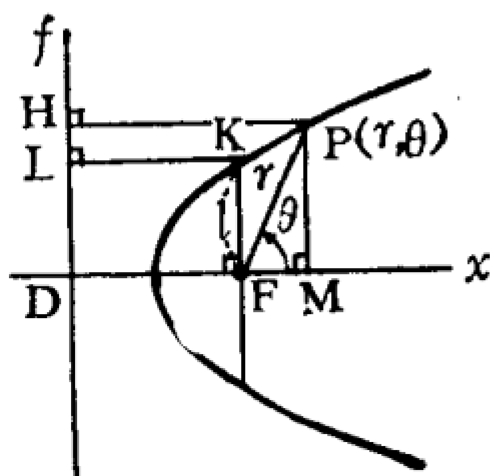


图 7-128

由平面上一点$P(r,\theta)$向 f 作垂线，设垂足为 H. 前面已知道满足

$$\frac{PF}{HP}=e(e\text{是偏心率}),$$

即 $\qquad PF=e\cdot HP.$ $\qquad$ ①

的点 P 的轨迹是二次曲线(参看§4.【定义】1).

设 K 为通过 F 且垂直于 Fx 的弦(叫做正焦弦或通径)的一端点，由 K 向 f 作垂线，垂足为 L. 若令 $FK=l$(恒定)，则有

$$\frac{FK}{LK}=e,\ \text{即}\quad LK=l/e. \qquad ②$$

又由 P 向 Fx 作垂线，设垂足为 M. 应用①、②式得

$$PF=e\cdot HP=e(DF+FM)=e(LK+FM),$$

$$\therefore \qquad r=e\left(\frac{l}{e}+r\cos\theta\right).$$

$$\therefore \qquad r=\frac{l}{1-e\cos\theta}(l\text{ 是正焦弦长之半},e\text{ 是偏心率}).$$

注意 有趣的是椭圆、双曲线、抛物线在形式上可用一个方程表示，不言而喻，$0<e<1$，$e=1$，$e>1$ 的几种情形，分别对应于椭圆、抛物线和双曲线。

讨论　椭圆、双曲线，有两个焦点．如果按图 7-129 那样取极点和基线，则它们的极坐标方程均为：

$$l=\frac{l}{1+e\cos\theta}.$$

例题　试证明：在抛物线或椭圆的情形下，若令通过焦点 F 的直线与该曲线的两个交点为 P，Q，则 $\frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}$ 为定值．

证明　如图 7-130 所示，假设以 F 为极点，通过 F 的轴为基线，曲线的极坐标方程式为

$$r=\frac{l}{1-e\cos\theta}.$$

P、Q 的极坐标分别为 $(r_1,\ \theta_1)$、$(r_2,\ \theta_2)$．

若取 θ_1 使 $r_1>0$，则由 $\theta_2=\theta_1+\pi$，得 $r_2>0$．

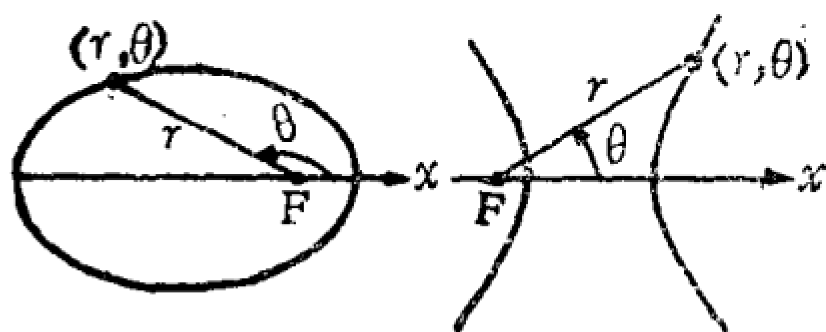


图 7-129

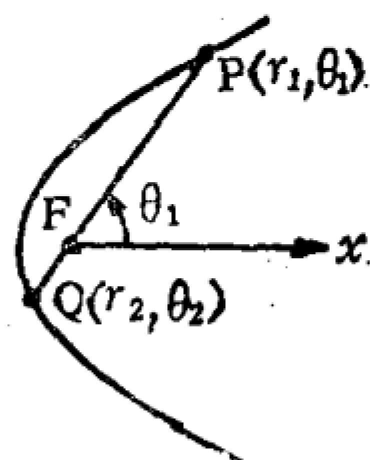


图 7-130

$$r_1=\frac{l}{1-e\cos\theta_1},\quad r_2=\frac{l}{1-e\cos(\theta_1+\pi)}=\frac{l}{1+e\cos\theta_1},$$

$$\therefore\quad \frac{1}{FP}+\frac{1}{FQ}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1-e\cos\theta_1}{l}+\frac{1+e\cos\theta_1}{l}$$

$$=\frac{2}{l}\text{（定值）}.$$

(V)　阿基米德螺线：$r=a\theta(a>0)$．

若取 $-\theta$ 代替 θ，则 r 变为 $-r$．也就是说，若点 $(r,\ \theta)$ 位于曲线上，则点 $(-r,\ -\theta)$ 也位于曲线上．因而，曲线对通过极点、垂直于基线的直线是对称的(参看例题 2)．

如图 7-131 所示，画出以极点为圆心，a 为半径的圆，设圆周上任

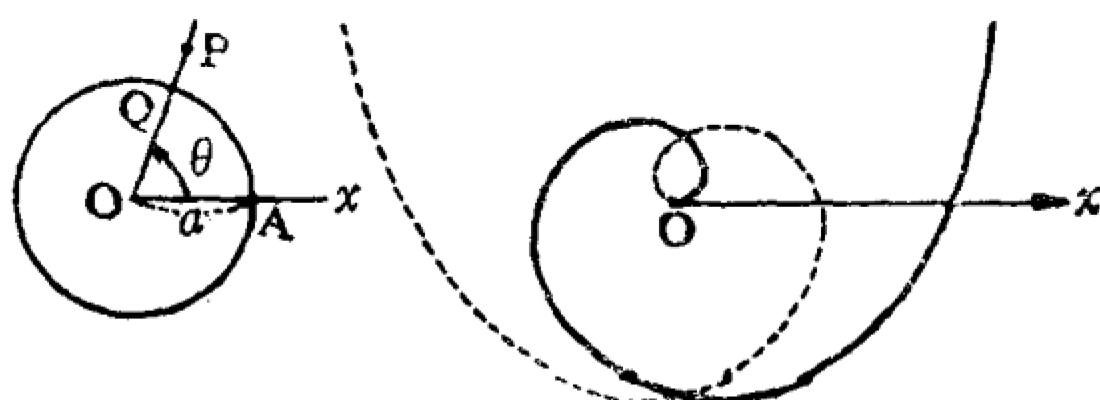


图 7-131

一点为 Q，$\angle(OX, OQ)=\theta$，则有 $\overset{\frown}{AQ}=a\theta$. 因而，若在 OQ 上取一点 P 使 $OP=\overset{\frown}{AQ}$，则 P 点的轨迹是阿基米德螺线，如图 7-131 的右部所示. 图中实线部分对应于 $\theta>0$，虚线部分对应于 $\theta<0$. 两者结合起来就是表示 $r=a\theta$ 的曲线.

(Ⅵ) 等角螺线：$r=ka^{\theta}$ $(a>0)$.*

例如，假设 $a>1$，$k>0$，则当 θ 增加时，r 也增加，当 $\theta\to+\infty$ 时，$r\to+\infty$；当 $\theta\to-\infty$ 时，$r\to+0$. 因此，等角螺线的形状如图 7-132 所示.

注意 若 P 为曲线上的任意一点，则 P 点的切线和 OP 的夹角显然是一定值. 这就是"等角"这一名称的由来.

(VII) 双曲螺线：$r\theta=a(a>0)$.

基于与阿基米德螺线情形同样的理由，可以说明，曲线对通过极点而垂直于基线的直线是对称的.

如图 7-133 所示，先作一个以极点为圆心、a 为半径的辅助圆，若令 Q 为圆周上一点 $\angle(Ox, OQ)=\theta$，则 $\overset{\frown}{AQ}=a\theta$. 因此，如取 OQ 上一点 P 使 $OP\cdot\overset{\frown}{AQ}=a^2$，则 P 点的轨迹就表示 $r\theta=a$ 的图形. 当 $\theta\to+0$ 时，$r\to+\infty$，θ 增加时 r 减少，当 $\theta\to+\infty$ 时，$r\to+0$.

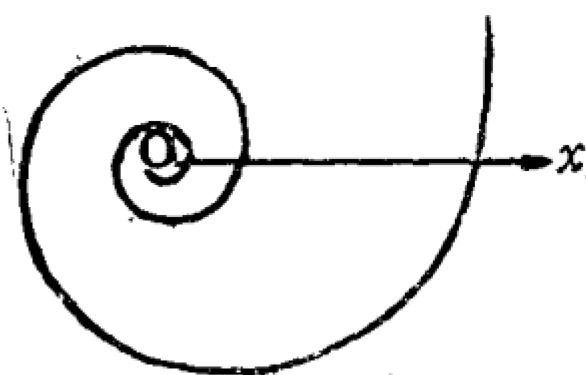


图 7-132

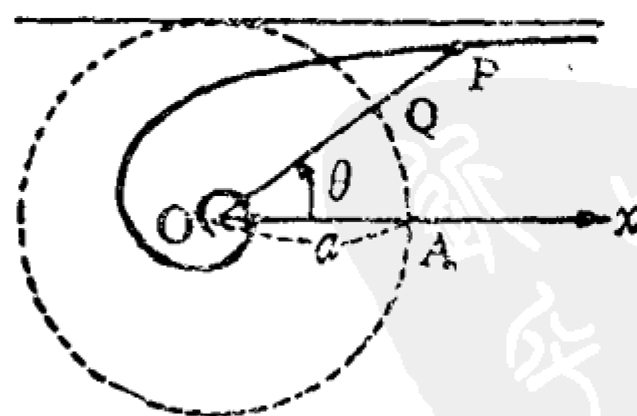


图 7-133

* 当a=e时，又叫对数螺线——译注.

在图 7-133 中画的是 $\theta>0$的情形．与$\theta<0$ 的情形结合起来就是 $r\theta=a$ 的曲线．

注意 在等角螺线、双曲螺线的情形下，曲线不通过极点，但无限地趋近于它．过常把这样的点叫做曲线的渐近点．

(VIII) $r=\dfrac{\theta^2}{\theta^2+1}$.

若点$(r,\ \theta)$位于曲线上，则点$(r,\ -\theta)$也位于曲线上．因此，曲线对基线对称(参看例题 2)．现考虑，$\theta>0$ 的情形．

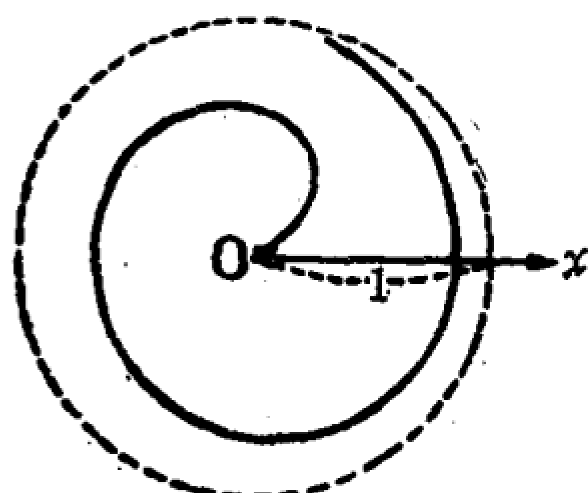


图 7-134

当 $\theta=0$ 时，$r=0$．由于 $r=1-\dfrac{1}{\theta^2+1}$，因此 r随着θ的增大而增大．

当 $\theta\to+\infty$ 时，$r\to 1$，曲线无限趋近于圆 $r=1$，因而得到图形7-134

注意 这样的圆 $r=1$ 叫做渐近圆．

(IX) 四叶玫瑰线：$r=a\cos 2\theta(a>0)$

由于 $\cos(-2\theta)=\cos 2\theta$，$\cos\{2(\pi-\theta)\}=\cos 2\theta$，因此曲线对基线以及通过极点与垂直于基线的直线是对称的．又由于 $\cos\left\{2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\cos 2\theta$，所以，若点$(r,\theta)$位于曲线上，则点$\left(-r,\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$也位于曲线上．从而，这个曲线对直线 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$(相当于直线 $y=-x$)是对称的(参看例题 2)．

当 θ 从 0 增加到$\dfrac{\pi}{4}$时，r 从 a 减小到 0．考虑到上述的对称性，整个曲线就如图 7-135 所示．

(X) 三叶玫瑰线：$r=a\cos 3\theta(a>0)$

由于 $\cos\{3(-\theta)\}=\cos 3\theta$，所以曲线关于基线对称，又因 $\cos 3\left\{\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right\}=\cos 3\left\{\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right\}$，所以，若点$\left(r,\dfrac{2\pi}{3}+\theta\right)$ 位于曲线上，

则点$\left(r, \frac{2\pi}{3}-\theta\right)$也位于曲线上.从而,曲线对直线$\theta=\frac{2\pi}{3}$对称.当$\theta$由0变动到$\frac{\pi}{6}$时,$r$从$a$减小到0.根据上述分析,曲线如图7-136所示。

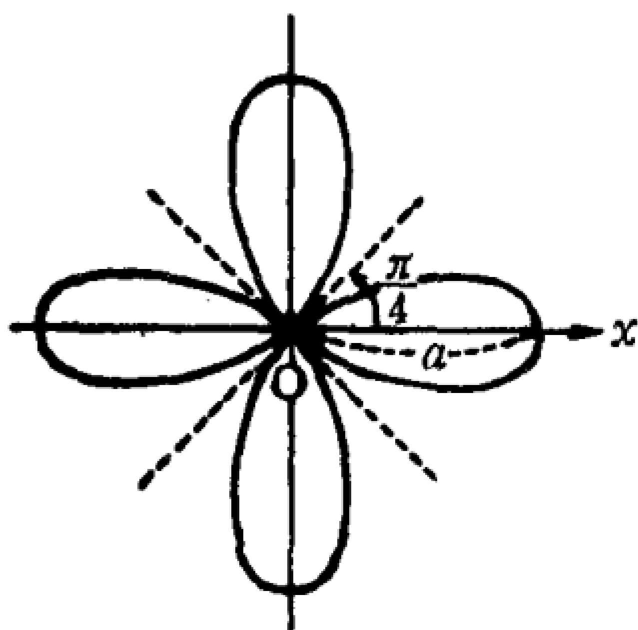


图 7-135

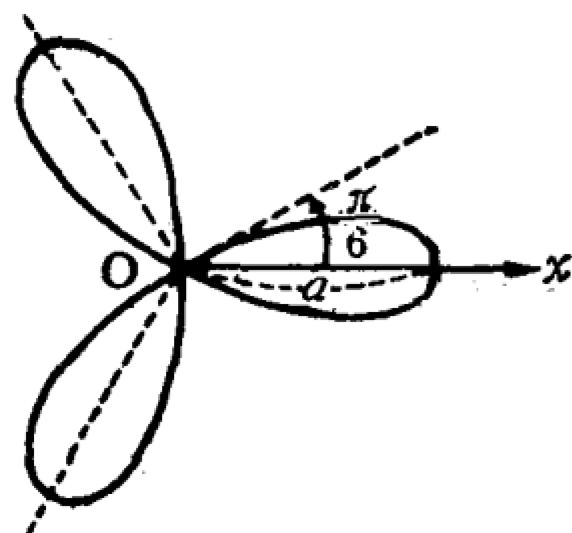


图 7-136

(XI)　双纽线：$r^2=a^2\cos 2\theta$(a是正常数).

若(r,θ)满足方程，则$(-r,\theta)$、$(r,-\theta)$也满足方程．因此，曲线对极点及基线是对称的(参看例题2).

由于$r^2\geqslant 0$，所以$\cos 2\theta\geqslant 0$．若在$0\leqslant 2\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$的范围内考察，则$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$.

这时$r=\pm a\sqrt{\cos 2\theta}$,但由于对称性,可以只考虑$r=+a\sqrt{\cos 2\theta}$.当$\theta$从0增加到$\frac{\pi}{4}$时，$r$从$a$减小到0．画出与此对应的曲线，并画出它关于基线以及关于极点的对称曲线，就得到图7-137.

(XII)　心脏线：$r=a(1+\cos\theta)$(a是正的常数).

若(r,θ)满足方程，则$(r,-\theta)$也满足方程．从而，曲线关于基线对称.

当θ从0到π变动时，r从$2a$减小到0.

画出对应曲线以及它关于基线的对称曲线就得图7-138(外圈).

讨论　画出通过极点且圆心在基线上、直径为a的圆．设Q为此圆上任意

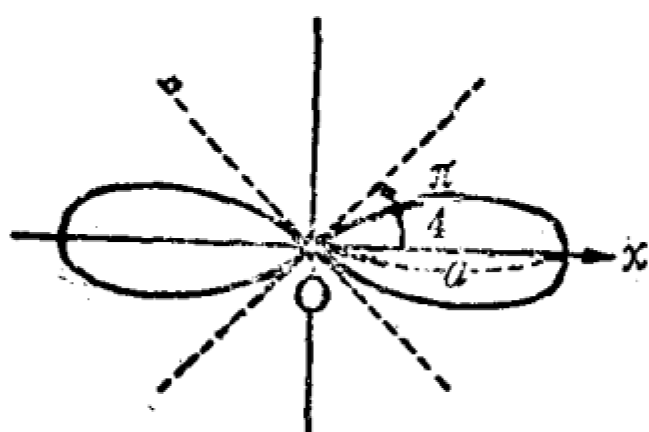


图 7-137

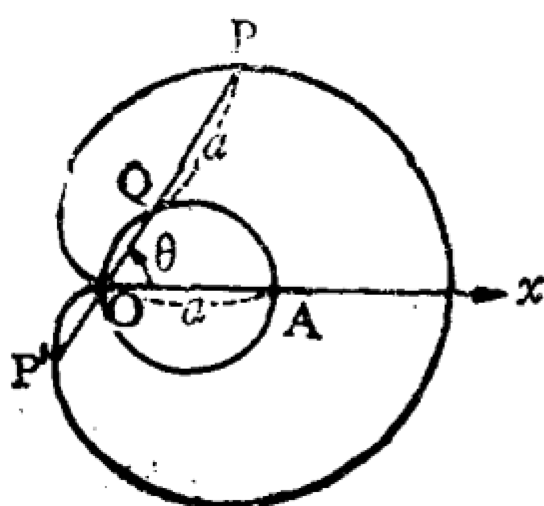


图 7-138

一点，在图中令$\angle AOQ=\theta$. 在直线 OQ 上，在 Q 的两侧取两点 P、P'，假定 $QP=QP'=a$，则 P、P' 的轨迹就是上述心脏线.

这是因为 $OQ=a\cos\theta$，故 $r=op=a\cos\theta+a=a(1+\cos\theta)$，$P$ 位于曲线上.

$OP'=a-a\cos\theta=a\{1+\cos(\pi+\theta)\}$，但 P' 的极角是 $\pi+\theta$，所以这个 P' 仍然位于曲线上.

(XIII) 蚶线：$r=b+a\cos\theta$(a,b 是正的常数).

与心脏线的情形相同，曲线对基线是对称的.

与上面的讨论同祥地先画出通过极点，中心在基线上、直径为 a 的圆，对于此圆上的一点 Q，在直线 OQ 上取两点 P、P' 使 $QP=QP'=b$，则两点 P、P' 的轨迹就是蚶线，如图 7-139 所示.

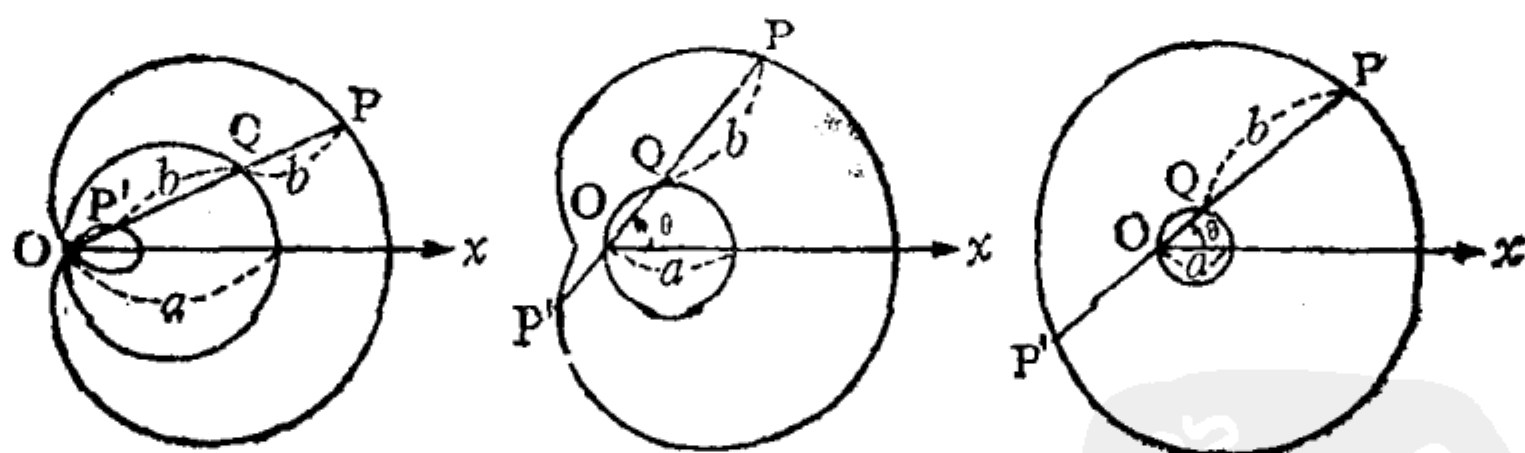


图 7-139

注意 当 $b=a$ 时，蚶线就是心脏线.

例题4. 设有一曲线 c，其极坐标方程为 $r=f(\theta)$，现把它围绕极点旋转 α 角，得到一条新曲线 c'. 试求 c' 的极坐标方程. 然后，应用这个结果，考查下列各组曲线间的关系.

(1) $\begin{cases} r=a\cos 2\theta; \\ r=a\sin 2\theta; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} r=a\cos 3\theta; \\ r=a\sin 3\theta; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} r=a(1+\cos\theta), \\ r=a(1-\cos\theta), \\ r=a(1+\sin\theta). \end{cases}$

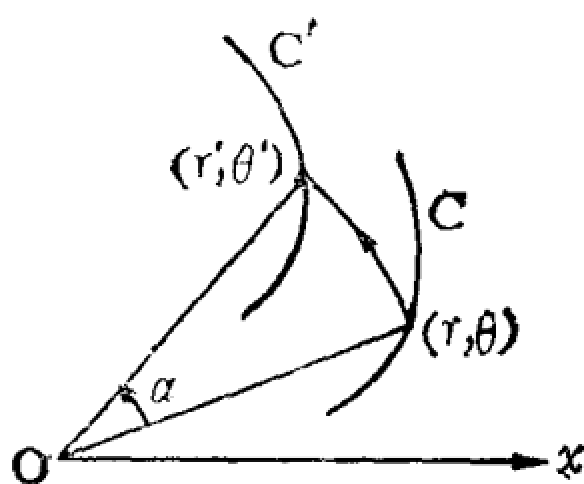


图 7-140

解 设(r,θ)是曲线C上的任意一点，把此点围绕极点转过α角，令所得到的点为(r', θ')，则有

$$\begin{cases} r'=r. \\ \theta r=\theta+\alpha, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} r=r', \\ \theta=\theta'-\alpha. \end{cases}$$

把上式代入$r=f(\theta)$得

$$r'=f(\theta'-\alpha).$$

满足上式的点(r', θ')的轨迹就是C'，如图 7-140 所示

把流动坐标从(r', θ')变为(r, θ)，所求的方程可写成下列形式.

$$r=f(\theta-\alpha).$$

(1) 在$r=a\cos 2\theta$中，若用$\theta-\dfrac{\pi}{4}$代替θ，则变为$r=a\sin 2\theta$. 从而，$r=a\sin 2\theta$是把曲线$r=a\cos 2\theta$围绕极点旋转$\dfrac{\pi}{4}$后得到的曲线.

(2) 在$r=a\cos 3\theta$中，若用$\theta-\dfrac{\pi}{6}$代替θ，则变成$r=a\sin 3\theta$. 因此，后者是把前者围绕极点旋转$\dfrac{\pi}{6}$后得到的结果.

(3) 由于$\cos(\theta-\pi)=-\cos\theta$，$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$，因此把曲线$r=a(1+\cos\theta)$围绕极点旋转$\pi$或$\dfrac{\pi}{2}$后，所得结果分别是曲线.

$$r=a(1-\cos\theta), \quad r=a(1+\sin\theta).$$

例题5. 试把下列极坐标方程表示的曲线变换成以极点为原点，基线为x轴的直角坐标方程.

(1) $r=a\cos 2\theta$, (2) $r^2=a^2\cos 2\theta$,

(3) $r=a(1+\cos\theta)$.

解 应用【定理】1.

(1) 用 r^2 乘 $r=a\cos 2\theta$ 两端，得

$$r^3=a(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta),\quad \therefore\ r^3=a(x^2-y^2).$$

两端再平方 $r^6=a^2(x^2-y^2)^2$,

$\therefore$ $(x^2+y^2)^3=a^2(x^2-y^2)^2$.

(2) 用 r^2 乘 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 两端，得

$$r^4=a^2(r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta),\qquad \therefore\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

(3) 用 r 乘 $r=a(1+\cos\theta)$两端，得

$$r^2=a(r+r\cos\theta),\quad \therefore\ x^2+y^2=ar+ax.$$

$\therefore$ $x^2+y^2-ax=ar$.

两端再平方得 $(x^2+y^2-ax)^2=a^2r^2$,

$\therefore$ $(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$.

§7. 空间图形

7.1 空间点的直角坐标

【定义】1. 空间直角坐标、坐标平面、坐标轴 在空间中确定一点 O，称为原点。过O点建立三个两两相互正交的数轴，分别称为x轴、y轴和z轴，统称坐标轴，由空间一点 P 各向 x 轴、y 轴和 z 轴作垂线，设垂足分别为 L、M、N，它们在各自坐标轴上的坐标分别为x、y、z. 这时，一点 P 和一组有序实数 (x, y, z) 一一对应。这组数叫做 P 点的坐标，写成 $P(x, y, z)$.又由 x 轴和 y 轴所决定的平面叫做xy平面。同样也有yz平面zx和平面.这些平面叫做坐标平面.

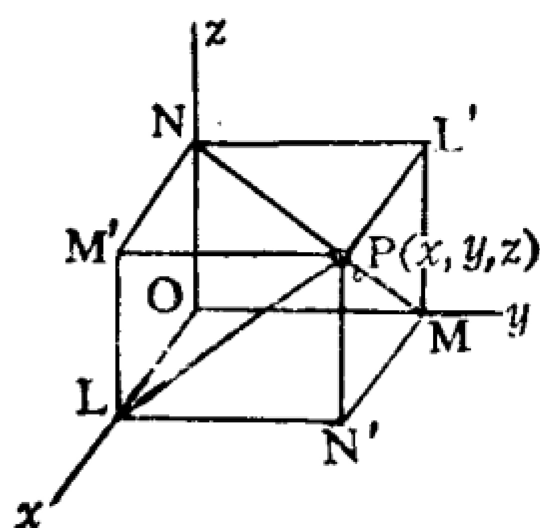
注意 若从 P 点向各坐标平面作垂线，设垂足分别为 L'、M'、N'，如图 7-141 所示，则有$OL=L'P=x$ $OM=M'P=y$ $ON=N'P=z$.

【定理】1. 设点 $P(x, y, z)$把连接两点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ 的线段从 A 点算起内分为 $m:n(m>0, n>0)$，则下式成立

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n},\quad z=\frac{mz_2+nz_1}{m+n}.$$

证明 如图 7-142 所示，从 A、B、P 向 xy 平面作垂线，设垂足分别为 A'、B'、P'，则在 xy 平面上各点坐标是 $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $P'(x,y)$,由于 P' 点把线段 $A'B'$从 A'点向 B'点内分为 $m:n$，所以根据§1.【定理】5，有

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$



$OL = L'P = x,$

$OM = M'P = y,$

$ON = N'P = z.$

图7-141

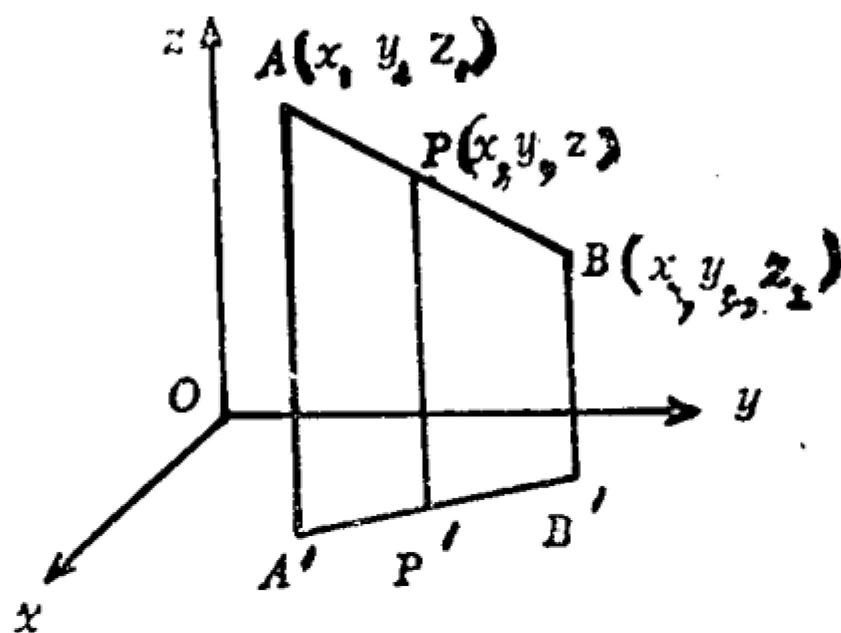


图 7-142

同样，由 A、B、P 向 yz 平面或 zx 平面作垂线，根据类似分析得

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}.$$ □

【系】1 连接两点(x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)的线段，其中点是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

略证 只要在上述定理中，令 $m=n$ 即可得证. □

【系】2. 在【定理】1中，若 m、n 中的一个取负，则可得外分点的坐标.

略证 只要象§1.【定理】4的注意事项那样考虑即可.

例题 设三角形三顶点的坐标为 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$，试求其重心的坐标.

解 设 D 为边 BC 的中点，则把线段 AD 从 A 点算起内分为 2:1 的点是重心，令 D 的坐标为(x_4, y_4, z_4)，重心的坐标为(x, y, z). 根据【定理】1和【系】1，若考虑 x 坐标，则有

$$x_4 = \frac{x_2+x_3}{2}, \quad x = \frac{x_1+2x_4}{1+2},$$

$$\therefore \qquad x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

对于 y、z 坐标也是同样的，因而，重心的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

注意1. 上例的解法和§1.【定理】6的例题是完全相同的.

2. 一般地，n 个点$(x_i, y_i, z_i)(i=1, 2, \cdots, n)$的重心的坐标是

$$x=\sum_{j=1}^{n} x_i/n, \quad y=\sum_{j=1}^{n} y_i/n, \quad z=\sum_{j=1}^{n} z_i/n$$

【定理】2. 两点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$间的距离为

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2+z_1)^2}.$$

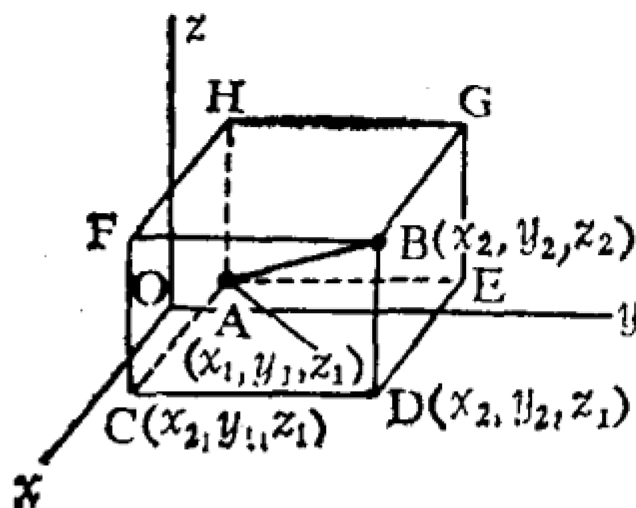


图7-143

证明　如图 7-143 所示，如果分别过A、B点作平行于坐标平面的平面，那么一般就构成了一个长方体。图中，$\angle ACD=\angle ADB=90^\circ$ 因此根据勾股定理有

$$AB^2=AD^2+DB^2$$
$$=AC^2+CD^2+BD^2.$$

但 AC 平行于 x 轴，C 的x坐标等于B 的 x 坐标(即 x_2)，因此对于有向距离 AC 有 $AC=x_2-x_1$，同样有 $CD=y_2-y^1$ $DB=z_2-z_1$.

$$\therefore \quad AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.$$

而 $AB\geqslant 0$，　$\therefore \quad AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$　□

注意　对于上面的证明，也有不能构成长方体的情形。但即使在这种情形下，上面的证明也是通用的。

【系】　原点和点(x_1, y_1, z_1)之间的距离是

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

略证　在上述定理中，令 $x_2=y_2=z_2=0$即可得证。　□

7·2　轨迹和方程

空间中的轨迹和方程的关系，可以类似地应用§1.【定义】12、13，【定理】12、13 来讨论.

例题1. 通过 z 轴上的点$(0, 0, C)$作平行于 xy 平面的平面(垂直于 z轴的平面)，试求此平面的方程.

解　如图 7-144 所示，设(x, y, z)是此平面上的任意一点，则恒有

$$z=C.$$

反之，若令(x, y, z)是满足 $z=C$ 的任意一点，则此点必位于上述平面上。

根据以上所述，所求平面的方程是 $z=0$.

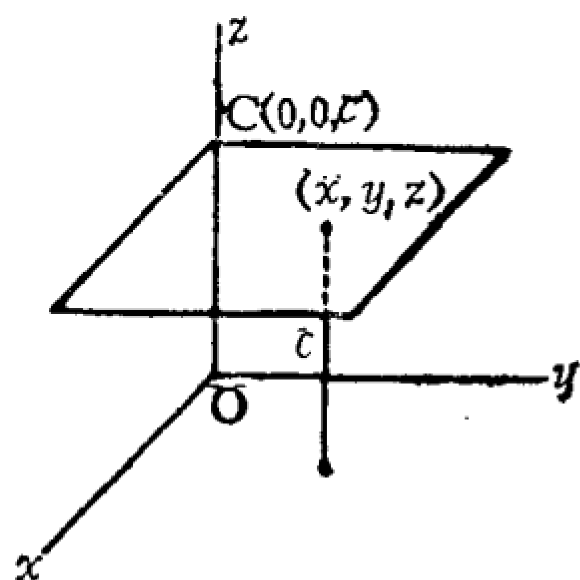


图7-144

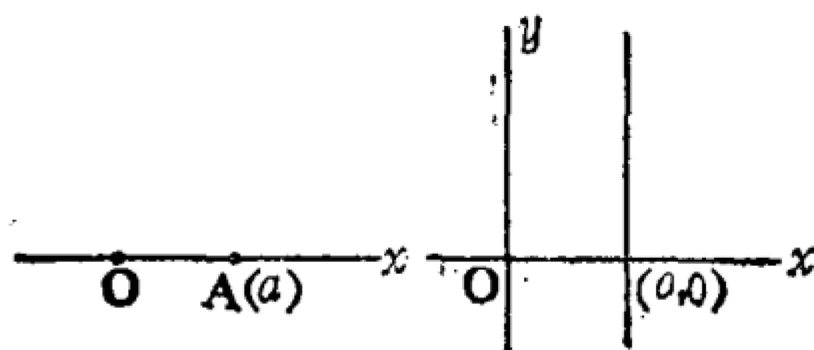
讨论 同样，通过点$(a, 0, 0)$而平行于yz平面的平面的方程是$x=a$，通过点$(0, b, 0)$而平行于zx平面的平面的方程是$y=b$.

注意 方程$x=a$表示的图形，在一维空间中是一个点，二维空间中是一条直线，三维空间中是一个平面，如图7-145所示.

例题2. 通过xy平面上的点$(a, b, 0)$作平行于z轴的直线(垂直于xy平面的直线)，试求此直线的方程.

解 设$P(x, y, z)$是此直线上的任意一点。因为由P向xy平面所作垂线的垂足为$(a, b, 0)$，所以得

$$\begin{cases}x=a,\\ y=b.\end{cases} \quad ①$$



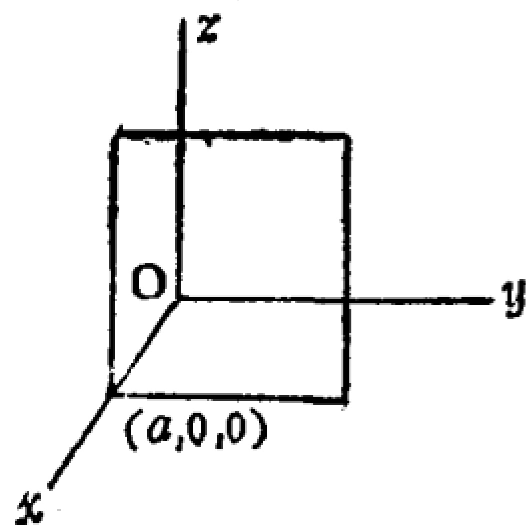


图 7-145

反之，若令(x, y, z)是满足上述联立方程组的任意一点，则z不论取什么值，该点都必位于此直线上.

根据以上所述，所求的方程就是①式.

注意 空间直线用联立方程组给定。上面①式所示的直线，就是两个平面$x=a$，$y=b$的公共部分(交线)，如图7-146所示.

【定义】2. 母线、准线、柱面、锥面 如图7-147所示，若动直线g既与定曲线(或定直线)c相交，同时按某规则运动，则g上的一切点的集合一般构成某个曲面，这时，g叫做母线，c叫做准线。当母线恒平行于某定直线时所构成的曲面叫做柱面；当母线恒通过某定点V时所构成的曲面叫做锥面，该定点叫做锥面的顶点.

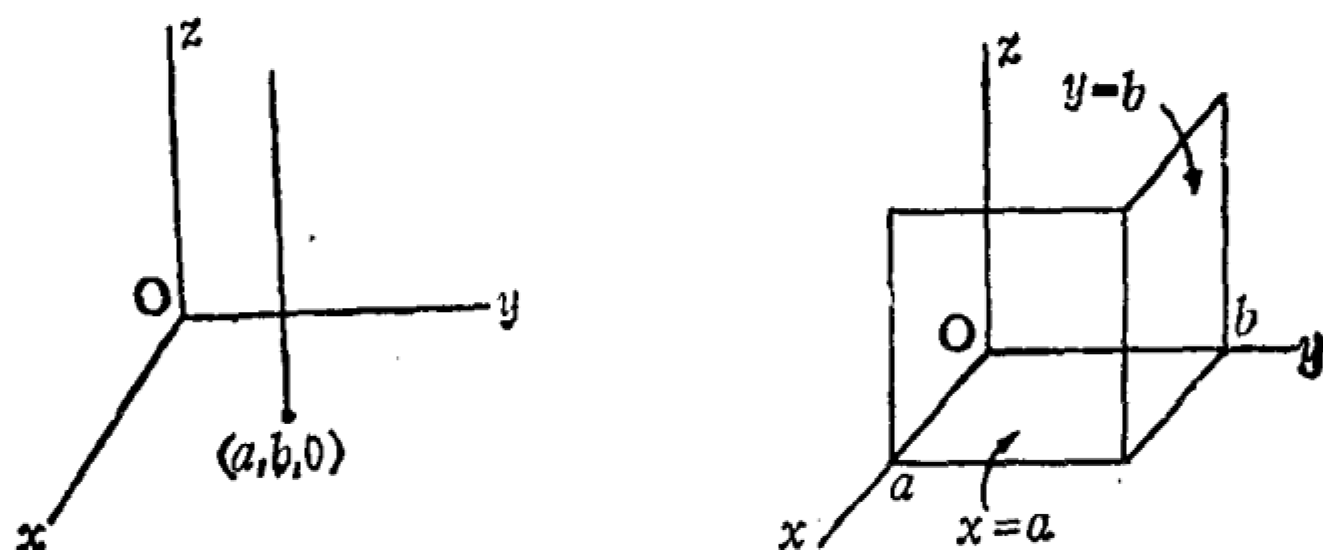


图 7-146

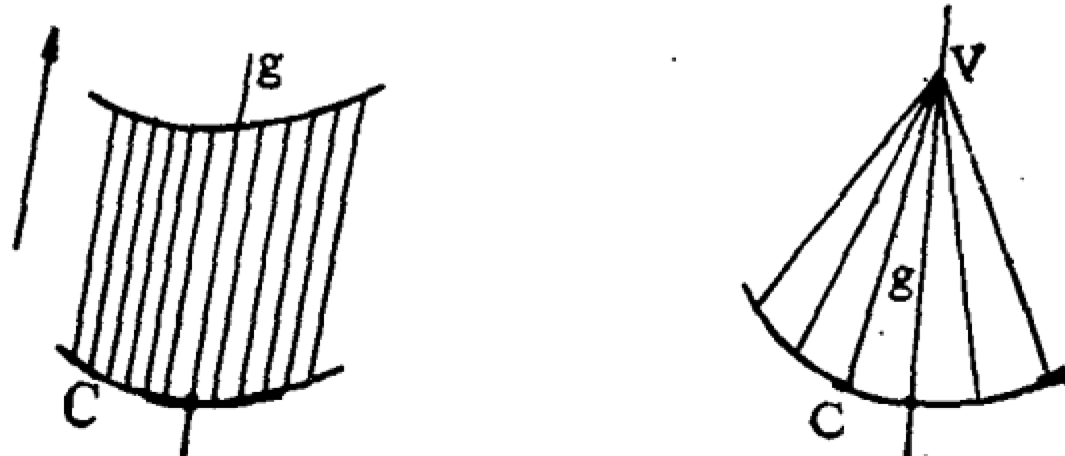


图 7-147

注意　准线是直线时的柱面一般是平面.

例题　设以 xy 平面上的下列直线或圆作为准线构成柱面，若母线平行于 z 轴，试求其柱面的方程：

(1) l：$ax+by+c=0$，

(2) c：$x^2+y^2=r^2$.

解　(1) 这个柱面是平面(图 7-148左图)，令此平面为 π.

设 $P(x, y, z)$是 π 上任意一点，则由 P 向 xy 平面作垂线，其垂足必位于直线 l 上. 从而，下式成立

$$ax+by+c=0. \quad ①$$

若 $Q(x, y, z)$是不在 π 上的任意一点，则由 Q 向 xy 平面作的垂线决不与 l 相交，从而。

$$ax+by+c\neq 0.$$

于是，所求平面的方程是①，亦即与原来的 l 的方程是相同的.

(2) 与(1)类似可知，所求柱面的方程是 $x^2+y^2=r^2$，它表示圆柱面(图 7-148 左图).

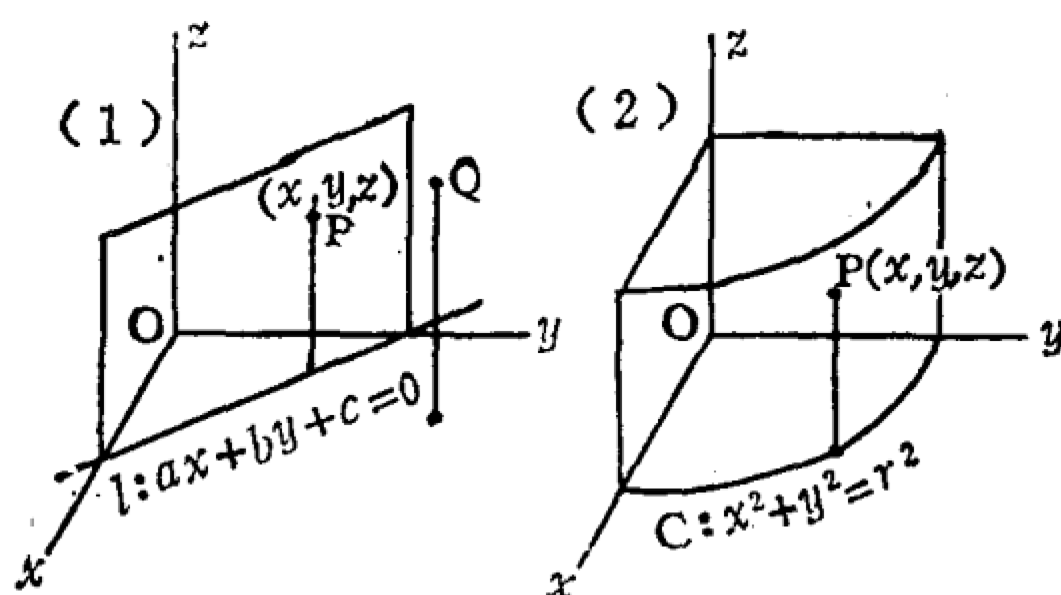


图 7-148

讨论 方程 $ax+by+c=0$ 在平面上表示直线，在空间表示平面，又方程 $x^2+y^2=r^2$ 在平面上表示圆，在空间表示圆柱面

一般地，方程 $f(x, y)=0$ 在平面上表示平面曲线，同样的方程在空间则表示以曲线 $f(x, y)=0$ 作准线、母线平行于 z 轴的柱面。(参看例题1的注意事项)

7·3 球面方程

【定义】3. 球面 空间中，到某定点的离距为一定值的点的轨迹叫做球面。该定点叫做球心，此定距离叫做该球面的半径.

【定理】3. 以点(a, b, c)为球心，$r(r>0)$为半径的球面的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

证明 设点 (a, b, c) 为 A，$P(x, y, z)$是空间一点，这时，此球面是满足 $AP=r$ 的点的轨迹，由【定理】2有

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r.$$

由于两端都非负，故与两端平方后得到的下式等价，

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad \square$$

【系】 以原点为球心，r 为半径的球面，其方程式为

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

略证 在【定理】3中，令 $a=b=c=0$ 即可得证. □

【定理】4. 球面方程可表示成下列形式

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0. \qquad ①$$

反之，当方程①表示图形时，除了仅一个点的情形外，都表示球面.

证明 把【定理】3中所得方程里的括号展开，并整理便可化成①的形式。

反之，由①式得

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}.$$

因此，当 $A^2+B^2+C^2-4D=0$ 时，表示一点 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$，而当 $A^2+B^2+C^2-4D>0$ 时，表示以点 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ 为球心，以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}/2$ 为半径的球面.

7·4　直线方程

【定理】5. 设有过原点的直线 g. 取定 g 的正方向. 且令它的正方向与 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向的夹角分别为 α、β、γ，则 g 的方程式为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\cos\beta,\quad (t\text{是参变量})\\ z=t\cos\gamma.\end{cases}$$

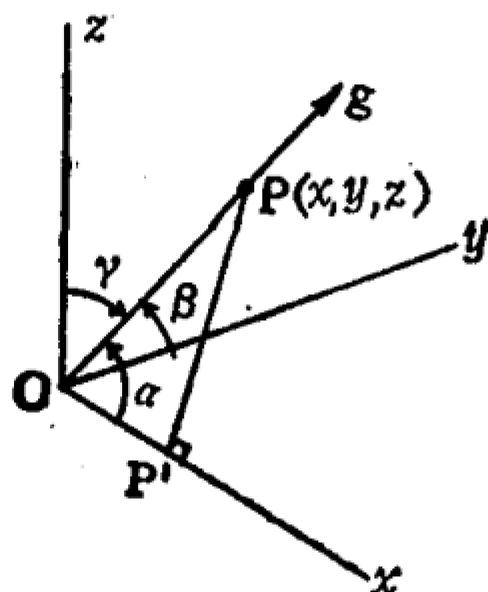


图 7-149

证明　如图 7-149所示，设 $P(x,\ y,\ z)$ 为 g 上任意一点，令有向距离 $OP=t$，由 P 向 x 轴作垂线，垂足为 P'，则 $OP'=(OP)_x=OP\cos(ox,g)$，

$\therefore\qquad x=t\cos\alpha.$

同样可得　$y=t\cos\beta$，$z=t\cos\gamma$.□

【系】 若取定通过点 (a,b,c) 的直线的正方向，且设它的正方向与 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向之间的夹角分别为 α、β、γ，则此直线的方程为

$$\begin{cases}x=a+t\cos\alpha,\\ y=b+t\cos\beta,\ (t\text{是参变量})\\ z=c+t\cos\gamma.\end{cases}$$

证明　这条直线是把【定理】5 中的直线在 x 轴方向平移 a、在 y 方向平移 b、在 z 方向平移 c 所得的结果. 这时，方程的变化和平面的情形相同，因§ 4.【定理】1 成立，故把【定理】5 的 x、y、z 变换成 $x-a$，$y-b$，$z-c$ 便得. 即

$$\begin{cases}x-a=t\cos\alpha,\\ y-b=t\cos\beta,\\ z-c=t\cos\gamma,\end{cases}\qquad\therefore\qquad\begin{cases}x=a+t\cos\alpha,\\ y=b+t\cos\beta,\\ z=c+t\cos\gamma.\end{cases}$$

□

注意　这个方程，除了维数的差别外，与§6.1(Ⅰ)是同形的.

【定义】4. 直线的方向余弦、方向数　在【定理】5及其【系】中的 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 叫做直线的方向余弦，通常用 l、m、n 表示. 又，与方向余弦成比例的三个数叫做方向数(或方向比)

注意　如果把 g 的正方向反向，则其正方向与 x 轴正方向的夹角是 $\alpha-\pi+2n\pi$(n 是整数)，因此得 $\cos(\alpha-\pi+2n\pi)=-\cos\alpha$. 对 g 与 y 轴、z 轴夹角的方向余弦也有同样的结果. 也就是说，"如果把方向余弦为 l、m、n 的直线的正方向反向，则方向余弦变为 $-l$, $-m$, $-n$."

【定理】6. 方向余弦为 l、m、n，且通过点(a, b, c)的直线的方程为

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}.$$

其中当分母为0时，约定对应的分子也为0.

证明　直接将【定理】5的【系】的结果改写一下就是,

$$\begin{cases} x=a+tl, \\ y=b+tm, \\ z=c+tn. \end{cases} \qquad ①$$

(*i*)　当 $lmn\neq0$ 时，由上述三式消去 t 便得

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}.$$

(*ii*)　当 l、m、n 中某一个(例如 n)为0而 $l\neq0$, $m\neq0$ 时，则由①式得

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m},\ z-c=0,$$

根据约定，该定理成立.

当 $l\neq0$、$m=n=0$ 时，由①式得

$$y-b=0,\ z-c=0,$$

根据约定，定理也成立.

其他的情形，也可同样证明. 根据(*i*)、(*ii*)，证明完结.　□

注意1. 在【定理】7中将要看到. 不可能有 $l=m=n=0$.

2.　在【定理】6中"关于分数式的约定"常常被应用，今后如事先未特别申明，常使用这一约定.

讨论　【定理】6中的公式，可认为是把两个方程式 $\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}$,

$\frac{x-a}{l}=\frac{z-c}{n}$联立起来.这是因为这些方程分别表示垂直于$yx$平面,$zx$平面的平面(参看7.2【定义】2的例题),而这两个平面的交线正是方向余弦为l、m、n的直线.

【系】 通过点(a,b,c)、方向数为L、M、N的直线的方程为

$$\frac{x-a}{L}=\frac{y-b}{M}=\frac{z-c}{N}.$$

证明 设此直线的方向余弦为l,m,n,则有$L:M:N=l:m:n$.因此由【定理】6便得结果. □

例题 试求通过不同二点(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)的直线的方程.

解 设L、M、N为此直线的方向数,则此直线的方程是

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}, \quad ①$$

由于此直线通过(x_2,y_2,z_2),所以

$$\frac{x_2-x_1}{L}=\frac{y_2-y_1}{M}=\frac{z_2-z_1}{N}. \quad ②$$

由①、②式消去L、M、N,便得所求的方程式:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

讨论1. 通过二点(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)的直线的方向数为x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1.

2. 通过二点(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)的直线的方程可写成

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ (\lambda\text{是参变量}).$$

【定理】7. 设l、m、n为一直线的方向余弦,则

$$l^2+m^2+n^2=1.$$

证明 设g'为通过原点且与g同指向的平行直线,则g,g'与x轴、y轴、z轴正方向的夹角分别相等,令这些夹角为α、β、γ,则

$$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma.$$

取$P(x,y,z)$为g'上不是原点的任意一点(图7-150),通过P作三个坐标平面的平行平面,则一般地说,这些平行平面和坐标平面构成长方体,而

OP 是此长方体的一条对角线. 在图 7-150 中所用的记号下，有

$$OM=x, MN=y, NP=z, \quad ①$$
$$OP^2=OM^2+MN^2+NP^2.$$

若令 $OP=t$，则由【定理】5，有

$$x=t\cos\alpha=tl.$$

同样有 $y=tm$，$z=tn$.

代入①式得

$$t^2=t^2(l^2+m^2+n^2)，因 t\neq0，故$$
$$l^2+m^2+n^2=1. \quad □$$

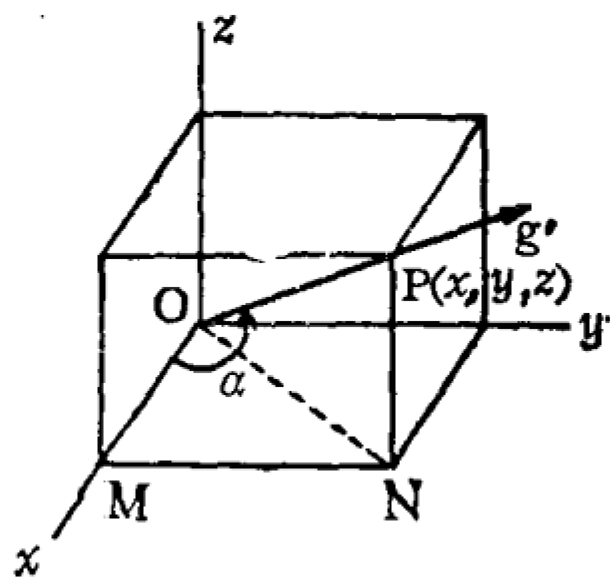


图 7-150

【系】 假设一条直线的方向数为 L、M、N，方向余弦为 l、m、n，则下式成立：

$$\begin{cases} l=\pm\dfrac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \\ m=\pm\dfrac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \\ n=\pm\dfrac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}. \end{cases}$$ （同取正号或同取负号）

证明　由【定义】4 有 $\dfrac{L}{l}=\dfrac{M}{m}=\dfrac{N}{n}$，令此比值为 k，则

$$L=kl,\ M=km,\ N=kn, \quad ①$$
$$\therefore \quad L^2+M^2+N^2=k^2(l^2+m^2+n^2)=k^2.$$
$$\therefore \quad k=\pm\sqrt{L^2+M^2+N^2}.$$

把上式代入①式便得结论.　□

【定理】8. 设两条直线 g_1、g_2 的方向余弦各为 l_1、m_1、n_1；l_2、m_2、n_2，g_1 和 g_2 平行或重合的充分必要条件是

$$l_2=l_1,\ m_2=m_1,\ n_2=n_1,$$

或　$$l_2=-l_1,\ m_2=-m_1,\ n_2=-n_1.$$

证明　g_1、g_2 平行或重合，与它们各自过原点的二平行线重合是等价的；

因而，若 g_1 和 g_2 的正方向相同，则由方向余弦的定义有 $l_2=l_1$，$m_2=m_1$，$n_2=n_1$；若正方向相反，则由【定义】4，有 $l_2=-l_1$，$m_2=-m_1$，$n_2=-n_1$.　□

【系】 设两条直线的方向数分别为 L_1, M_1, N_1; L_2, M_2, N_2. 这两条直线平行或重合的充分必要的条件是

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}.$$

证明 设两条直线的方向余弦分别为 l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2. 则有

$$L_1:M_1:N_1=l_1:m_1:n_1,$$
$$L_2:M_2:N_2=l_2:m_2:n_2,$$

因此，由【定理】8 便得结果. □

【定理】9. 设两条直线的方向余弦各为 l_1、m_1, n_1; l_2、m_2、n_2. 此二直线的正方向的夹角为 θ, 则.

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$

证明 通过原点作平行于 g_1、g_2 的直线，令它们各为 g_1', g_2'. 则 g_1'、g_2' 的正方向的夹角为 θ.

在 g_1'、g_2' 上分别任取一点 P_1、P_2, 使 $OP_1>0$, $OP_2>0$, 令 P_1、P_2 的坐标为 (x_1, y_1, z_1)、$(x_2、y_2、z_2)$, 如图 7-151所示.

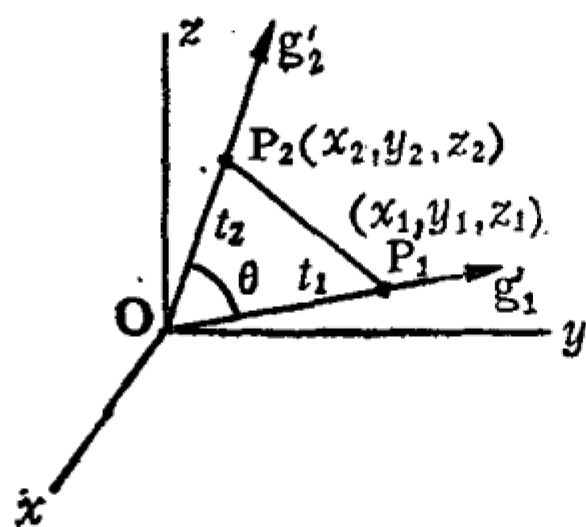


图 7-151

根据余弦定理，有

$$\cos\theta=\frac{OP_1{}^2+OP_2{}^2-P_1P_2{}^2}{2OP_1\cdot OP_2}$$

令 $OP_1=t_1$, $OP_2=t_2$, 应用【定理】2及【定理】5,

$$\begin{aligned}\text{上式分子}&=(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)+(x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2)\\&\quad-\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}\\&=2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\\&=2(t_1l_1t_2l_2+t_1m_1t_2m_2+t_1n_1t_2n_2)\\&=2t_1t_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2),\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{2t_1t_2(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)}{2t_1t_2}$$
$$=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2.$$ □

注意 对于方向数不一定有 $\cos\theta=L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2$.

【系】1. 方向余弦分别为 l_1, m_1、n_1; l_2、m_2、n_2 的两条直线相互垂直的

充分必要条件是

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

证明 因两条直线的夹角是$\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{\pi}{2}=0$，故应用【定理】9便得出结果。

□

【系】2. 方向比各为 L_1，M_1，N_1；L_2，M_2，N_2 的两条直线相互垂直的充分必要条件是

$$L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2=0.$$

证明 设两条直线的方向余弦分别为 l_1、m_1、n_1；l_2、m_2、n_2，则有 $L_1:M_1:N_1=l_1:m_1:n_1$，$L_2:M_2:N_2=l_2:m_2:n_2$. 因此由【系】1，便得结果. □

讨论 在【定理】9中，当 $g_1 /\!/ g_2$ 时，$\theta=0$ 或 π，因此 $\cos\theta=\pm1$.

$$\therefore \quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=\pm1.$$

当然它们满足条件 $l_1^2+m_1^2+n_1^2=1$，$l_2^2+m_2^2+n_2^2=1$.

7.5 平面方程

在 7.2 例题 1 及【定义】2 的例题中，研究了简单的平面方程。在这里，我们再进一步研究一般形式的平面方程.

【定理】10. 设在空间中有一平面 π. 通过原点 O 作垂直于 π 的直线 g，它与 π 的交点为 H. 设 g 的方向余弦为 l、m、n，$OH=p$. 则平面 π 的方程是

$$lx+my+nz=p,$$

其中约定取 g 的正方向使 $p\geqslant0$.

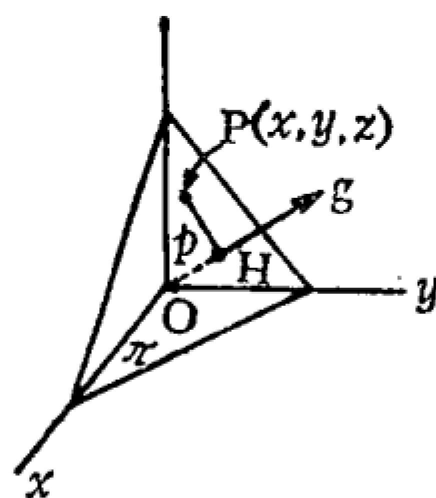


图 7-152

证明 如图 7-152 所示，对于空间中不同于 H 的一点 P，使 $PH\perp g$ 的点P 的集合和点 H 合起来就构成平面 π.

根据【定理】5，H 的坐标是 (pl, pm, pn)，因此，若令 P 的坐标为 (x, y, z)，则由【定理】6【系】的讨论 1，直线 PH 的方向数是 $x-pl$，$y-pm$，$z-pn$. 应用【定理】9的【系】2，有

$$(x-pl)l+(y-pm)m+(z-pn)n=0,$$

$$\therefore \quad lx+my+nz=p(l^2+m^2+n^2).$$

$$\therefore \quad lx+my+nz=p. \qquad ①$$

又，对于点 H 有

$$l(pl)+m(pm)+n(pn)=p(l^2+m^2+n^2)=p,$$

因此满足①式。

根据以上所述，①是 π 的方程。 □

【定理】11．x、y、z 的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0\ (A、B、C\ 中至少有一个不为\ 0)$$

表示平面。

证明 设 g 是通过原点且方向余弦为

$$l=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad m=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad n=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ 的

直线，在 g 上取一点 H 使满足 $OH=p=\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，若通过 H 点作垂直于 g 的平面，则由【定理】4，此平面的方程是

$$lx+mg+nz=p,\quad 即\quad \frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

亦即 $Ax+By+Cz+D=0$.

因而，这个平面的方程是 $Ax+By+Cz+D=0$.

换句话说，所给 x、y、z 的一次方程就是上述那个平面的方程。 □

【定理】12．平面方程是 x、y、z 的一次方程；反之，x、y、z 的一次方程表示平面。

证明 这不过是【定理】10和【定理】11的结合而已。 □

【定义】5．**平面的方向余弦、方向数** 垂直于平面的直线的方向余弦及方向数分别叫做这个平面的方向余弦及方向数。

【定理】13．平面 $Ax+By+Cz+D=0$（A、B、C 中至少有一个不为0）的方向数是 A，B，C.

证明 正如在【定理】11 的证明中所看到的，若令 l，m，n 是垂直于此平面的直线的方向余弦，则有 $l:m:n=A:B:C$. □

【定理】14．设有两个平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

(1) $\pi_1 /\!/ \pi_2$（也包括重合的情形）的充分必要条件是

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

(2) $\pi_1\perp\pi_2$ 的充分必要条件是

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

证明 如图 7-153 所示，设 g_1 是垂直于 π_1 的直线，g_2 是垂直于 π_2 的直

线，则根据【定理】13，g_1、g_2 的方向比分别是 A_1、B_1、C_1，A_2、B_2、C_2。

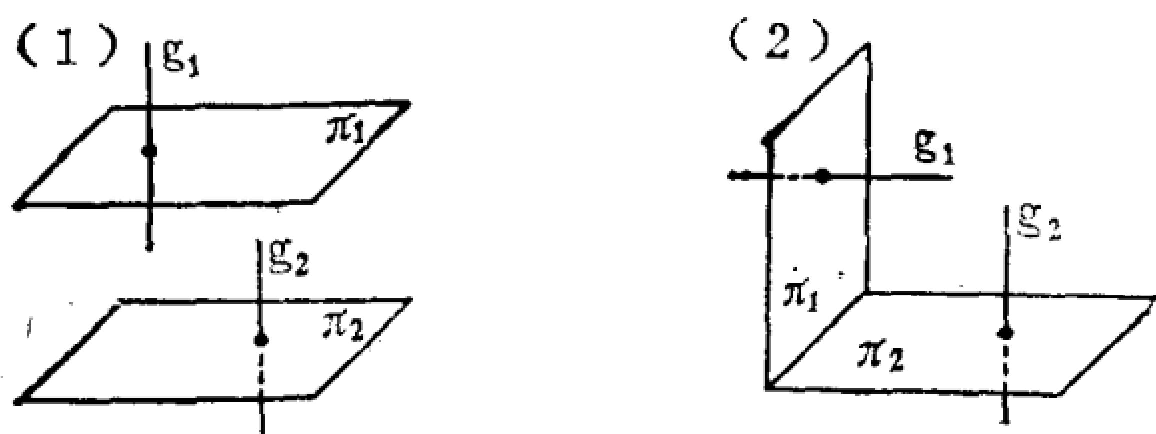


图7-153

(1) $\pi_1 /\!/ \pi_2$ 的充分必要条件是 $g_1 /\!/ g_2$，从而，由【定理】8的【系】得证。

(2) $\pi_1 \perp \pi_2$ 的充分必要条件是 $g_1 \perp g_2$. 从而，由【定理】9的【系】2得证. □

【定理】15. 设有一平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 和一直线 l:

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N},$$

(1) $\pi /\!/ l$ 的充分必要条件是

$$AL+BM+CN=0.$$

(2) $\pi \perp l$ 的充分必要条件是

$$\frac{A}{L}=\frac{B}{M}=\frac{C}{N}.$$

证明 如图 7-154 所示，设 g 是垂直于 π 的直线，则由【定理】13，g 的方向比是 A、B、C.

(1) $\pi /\!/ l$ 的充分必要条件是 $l \perp g$. 从而，根据【定理】9的【系】2 得证.

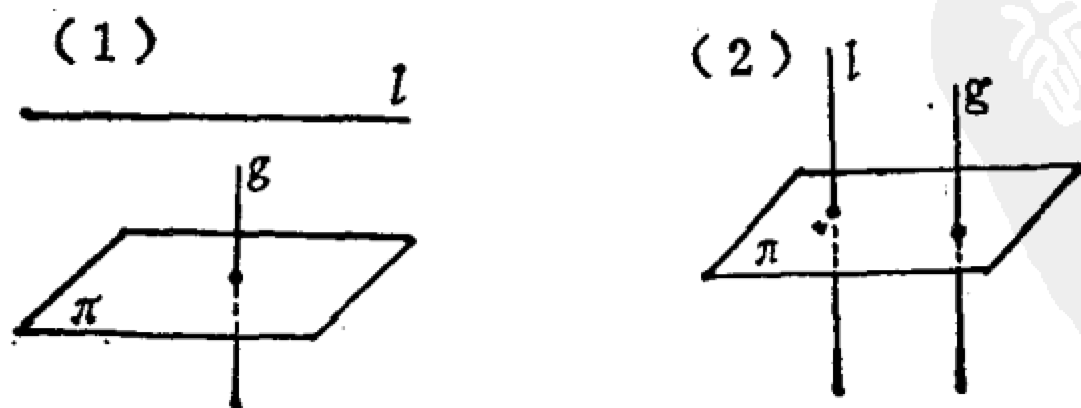


图7-154

(2) $\pi\perp l$ 的充分必要条件是 $l\,/\!/\,g$. 从而，根据【定理】8的【系】得证. □

7·6　空间曲线及曲面

【定理】16. 联立方程组

$$\begin{cases}F(x,\ y,\ z)=0,\\ G(x,\ y,\ z)=0,\end{cases}$$

一般表示空间曲线(也包括直线).

证明　$F(x,\ y,\ z)=0$ 及 $G(x,\ y,\ z)=0$ 一般表示空间曲面(也包括平面)，如图 7-155 所示. 因而，把两式联立时，同时满足这二方程式的点 $(x,\ y,\ z)$的轨迹，作为两曲面的交线，表示空间曲线. □

讨论　在一定条件下，$F(x,\ y,\ z)=0$ 也可改写成 $z=f(x,\ y)$.

$$\begin{cases}F(x,\ y,\ z)=0,\\ G(x,\ y,\ z)=0,\end{cases}\text{也可改写成}\begin{cases}y=\phi(x),\\ z=\psi(x).\end{cases}$$

如果采用参变量时，也可改写成

$$\begin{cases}x=f(t),\\ y=g(t),\\ z=h(t).\end{cases}$$

在【定理】5中的直线方程就属于这种形式.

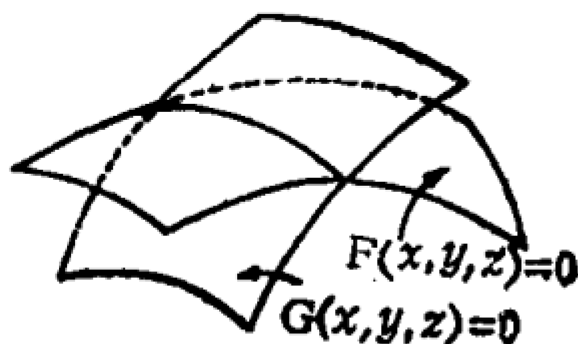


图7-155

例题1.　联立方程组

$$\begin{cases}2x+y+z+3=0,\\ -x+4y+2z-1=0.\end{cases}$$

表示直线. 试求此直线的方向数.

解　因为这条直线是两个平面 $2x+y+z+3=0$，$-x+4y+2z-1=0$ 的交线，所以也包含在其中任何一个平面内。从而，若令方向数为 L、M、N，则由【定理】15有

$$\begin{cases}2L+1\cdot M+1\cdot N=0,\\ (-1)L+4M+2N=0.\end{cases}$$

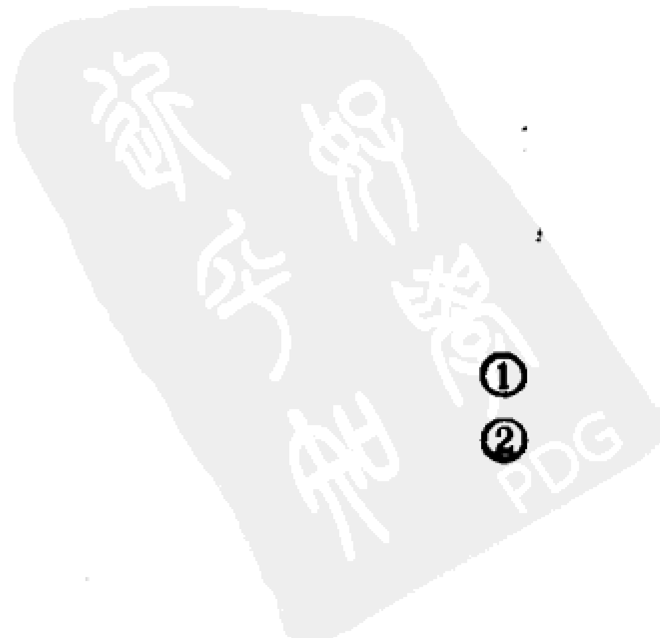
由此，所求直线的方向数为

$$L:M:N=2:5:(-9).$$

例题2. 联立方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=25, & ①\\ x+2y+4z=21. & ②\end{cases}$$

表示空间的圆.



(1) 求此圆的圆心 C的坐标和半径长,

(2) 求此圆在 xy 平面上的投影的方程式.

解 (1) 如图 7-156 所示，因为①的球心是原点，所以由原点向平面②所作垂线g的垂足是此圆的中心.

根据【定理】13，g 的方向数是 1，2，4，所以由【定理】6的【系】，g 的方程式是

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}.$$

令其比值为 t，则 $x=t$，$y=2t$，$z=4t$.

把它们代入②式得

$$t+4t+16t=21,\quad \therefore t=1.$$

$$\therefore\qquad x=1,\ y=2,\ z=4,$$

因而，圆心C 的坐标是(1，2，4).

由于球的半径为 5，故若令圆半径为 r，则由勾股定理有

$$r^2=5^2-OC^2=5^2-(1^2+2^2+4^2)=4,\qquad \therefore\ r=2.$$

故圆心是 $C(1,\ 2,\ 4)$，半径是2.

(2) 如图 7-157 所示，设 $Q(x,\ y,\ 0)$ 是圆上任意一点 $P(x,\ y,\ z)$ 在 xy 平面上的投影，则 Q 点的 x、y 间关系与 P 间点的 x、y 间关系是相同的。从而，所求的方程式是由①、②式消去 z 后所得的结果.

由②　$z=\dfrac{21-x-2y}{4}$,

把它代入①得

$$x^2+y^2+\left(\frac{21-x-2y}{4}\right)^2=25$$

$$\therefore\qquad 17x^2+4xy+20y^2-42x-84y+41=0.$$

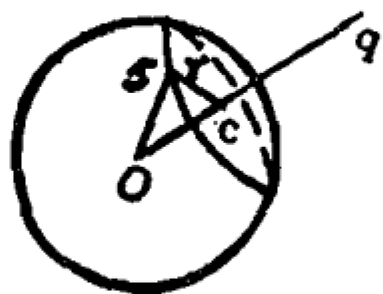


图7-156

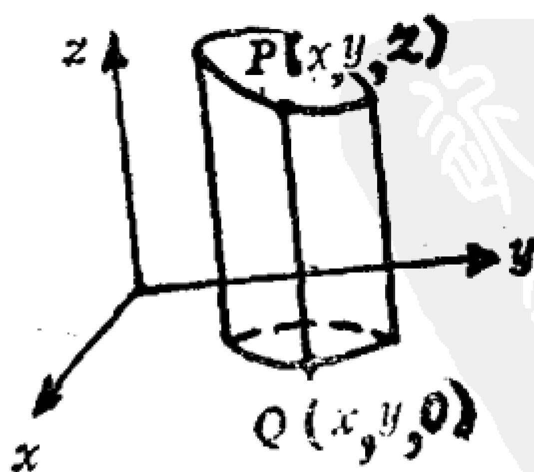


图7-157

讨论　根据§4.【定理】15,(2)中的投影曲线是椭圆。一般地,"把圆平行投影后得到的曲线是椭圆"(参看§4.【定理】2的例题1).

例题3. 假设有一个以 z 轴为轴、半径为 a 的直圆柱，它与 x 轴、y 轴的正半轴的交点分别为 A, B. 现把一张角度为 α 的纸片象图 7-158 那样卷起来，使其一边沿着 $\overset{\frown}{AB}$. 求纸片另一边在空间所构成的曲线的方程.

解　如图 7-158 所示，设 $P(x, y, z)$ 是曲线上任意一点，由 P 向 xy 平面作垂线，垂足为M，则M点的坐标是$(x, y, 0)$，M点位于圆柱在 xy平面的截口的圆周上.

若令 OM 与 OA 的夹角为 t，则有

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t.$$

又，因 $\overset{\frown}{AM}=at$，故 $z=MP=at\operatorname{tg}\alpha$. 从而，所求的方程是

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad (t\text{ 是参变量}) \\ z=at\operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

注意　这个曲线叫做螺旋线。若令 $a\operatorname{tg}\alpha=b$，则可写成 $z=bt$.

例题4. 试求以圆 $\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2=a^2, \end{cases}$

作准线，而母线平行于直线 $x=2y=-3z$ 的柱面的方程.

解　把直线的方程改写成 $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{-2}$，因此方向数是6，3，$-2$.

设 $P(x, y, z)$是柱面上的任意一点(图7-159). $Q(x_1, y_1, z_1)$是通过 P 点的母线与准线的交点，则有

$$z_1=0,\ x_1^2+y_1^2=a^2. \quad ①$$

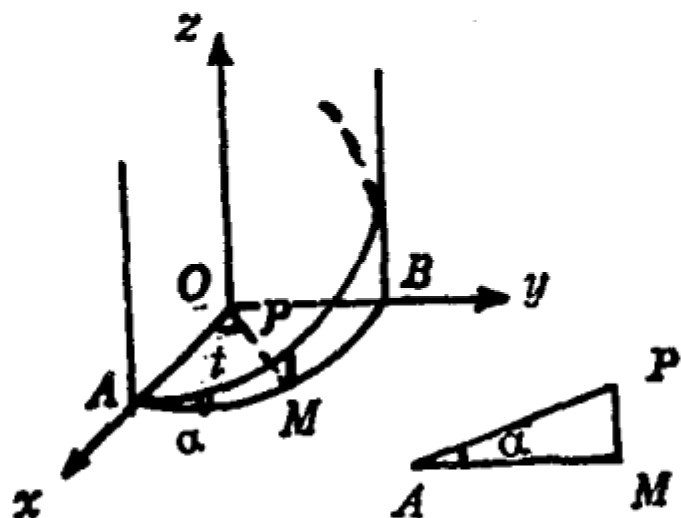


图7-158

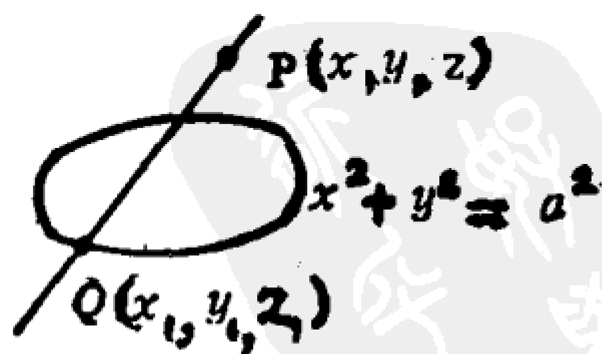


图7-159

从而，直线 PQ 的方向数是 $x-x_1$，$y-y_1$，z. 因此有

$$\frac{x-x_1}{6}=\frac{y-y_1}{3}=\frac{z}{-z}. \quad ②$$

同时满足①、②式的点 $P(x,y,z)$的轨迹就是所求的柱 面. 由①、②式 消去 x_1、y_1，得

$$(x+3z)^2+(y+\frac{3}{2}z)^2=a^2,$$

$$\therefore \quad 4(x+3z)^2+(2y+3z)^2=4a^2.$$

例题5. 试求以原点为顶点，以圆

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\x+y+z=a.\end{cases}$$

为准线的锥面的方程.

解 如图 7-160 所示，设点 $P(x,y,z)$是锥面上任意一点,$Q(x_1, y_1, z_1)$是通过 P 点的母线和准线的交点，则有

$$\begin{cases}{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=a^2, & ①\\x_1+y_1+z_1=a. & ②\end{cases}$$

因原点 O 和 P、Q 位于同一直线上，从而有 $\frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}=\frac{z_1}{z}$.

同时满足①、②、③式的点 $P(x,y,z)$的轨迹，就是所求的锥面.

由①、②、③消去 x_1、y_1、z_1. 令③中的比值为 t，则有

$$x_1=tx,\ y_1=ty,\ z_1=tz.$$

把它们代入①、②式，得

$$t^2(x^2+y^2+z^2)=a^2, \quad ④$$

$$t(x+y+z)=a. \quad ⑤$$

由④、⑤式得

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2,$$

$$\therefore \quad xy+yz+zx=0.$$

例题6. 试求 xy 平面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$围绕 x 轴旋转时所构成的旋转曲面的方程.

解 如图 7-161 所示，设 $P(x,y,z)$是旋转曲面上的任意一 点. 通过 P 点作垂直于 x 轴的平面. 令此平面为 α. 若 α 和 x 轴及椭圆的交 点 分 别 为 Q、R，则 α 与曲面的交线是以 Q 为中心、QR 为半径的圆，从而

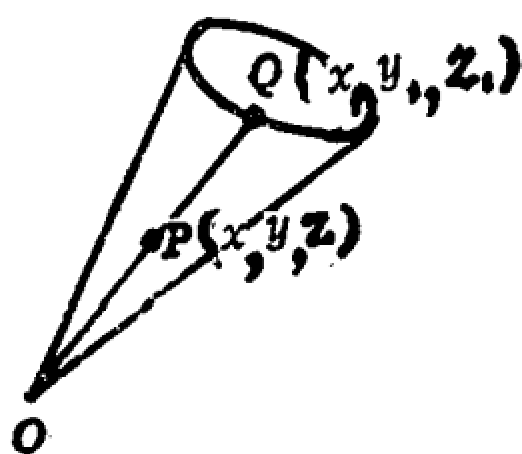


图7-160

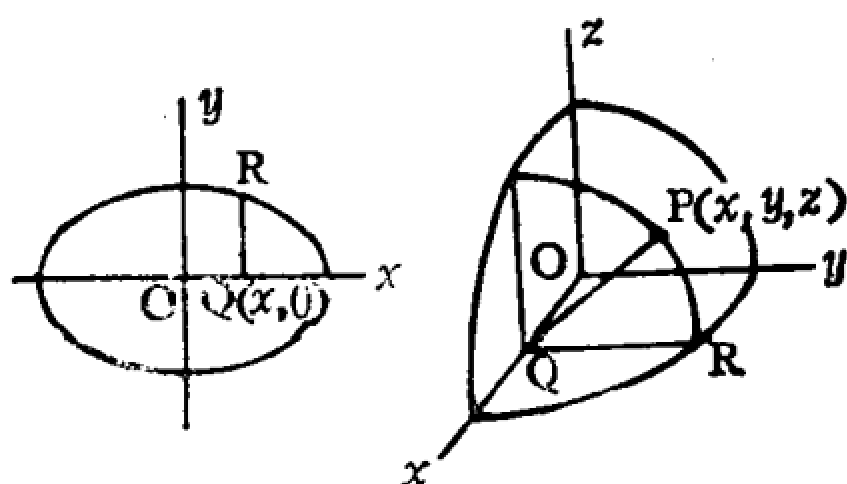


图 7-161

$$QP^2=QR^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

另一方面，$QP^2=y^2+z^2$，从而

$$y^2+z^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

注意　当 $a=b$ 时，化为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，即得到球面方程.

讨论　一般地，xy平面上的曲线$y=f(x)$围绕x轴旋转时，所构成的旋转曲面的方程是　$y^2+z^2=\{f(x)\}^2$.

例题7. 设 g 是平行于 xy 平面且恒与 z 轴相交的动直线，围绕 z 轴以匀角速度 ω 旋转，而且 g 与 z 轴的交点 Q 在 z 轴上以固定速度 a 运动. 试求以 g 为母线的曲面的方程. 假定在时刻 $t=0$时，g 与 x 轴重合.

解　如图 7-162 所示，设 $P(x,y,z)$为时刻 t 时 g 上的任意一点，由 P 点向 xy 平面作垂线，垂足为 P'，则 P' 在 xy 平面上的坐标为 (x,y)，OP' 与 x

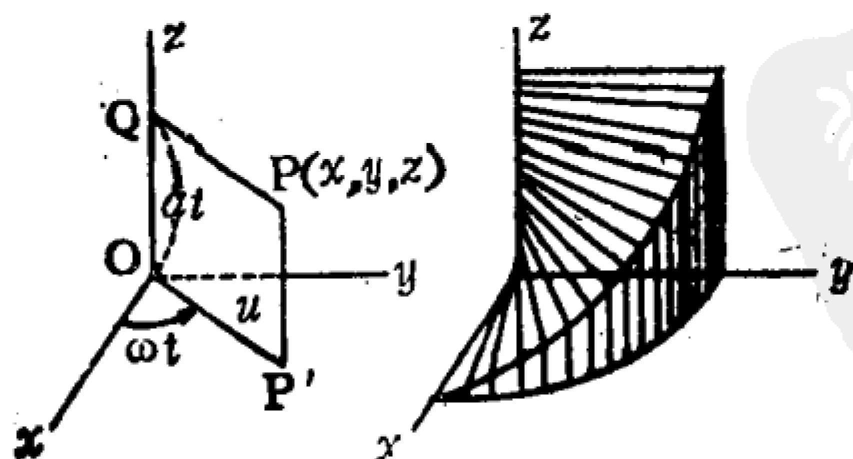


图 7-162

轴的夹角是 ωt. 从而，若令 $OP'=u$，则有

$$x=u\cos\omega t,\quad y=u\sin\omega t.$$

又，$z=P'P=OQ=at$.

从而，所求的方程化为下列形式

$$\begin{cases} x=u\cos\omega t, \\ y=u\sin\omega t, \quad (t,\ u \text{ 是参变量}) \\ z=at. \end{cases}$$

讨论 若消去 u，t，则化为 $\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg} kz(k=\omega/a)$.

注意 螺钉表面的螺旋面是此曲面的一部分.

第八章 排列、组合与二项式定理

§1. 排 列

1·1 不同元素的排列

【定义】1. 排列 从n个不同的元素中每次选取r个不同元素按一定的顺序排成一列，叫做从n个元素中每次选r个的一种排列，(在这里，排列顺序是个很关键的问题).

从不同的n个元素中每次选取r个的所有排列数，用记号P_n^r或A_n^r表示．这里，不言而喻有，$1 \leqslant r \leqslant n$．$P$是英文，permutation(排列)一词的第一个字母，P_n^r（或P_n^r)读作"从不同的n个元素中选取r个的所有排列数".

【定理】1. $P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

特别地，当$r=n$时，$P_n^n = n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1 = n!$.

证明 从不同的n个元素中选取r个排成一列时，排在左起第一个位置上的元素的数目是n种.对于每一个这样排法，排在左起第二个位置上的元素的种数，是从n个元素中除去最初已被排列了的那个以外的$(n-1)$种．对于每一个已作出的排法，可排在第三位的元素有$(n-2)$种，…，排在第r个位置上的元素的数目是$n-(r-1)=n-r+1$种．因此，从n个不同元素中选取r个元素的排列总数P_n^r是

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

把上式乘$(n-r)!$后，右边得$n!$，因此有

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

特别地，当$r=n$时，$n-r+1=1$，因此

$$P_n^n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!.$$ □

另证　从 n 个不同元素每次选取 r 个所作的排列中，把某个特定的元素放在最前头的排列，其数目等于从剩下的$(n-1)$元素中选取$(r-1)$个的排列的数目，因此是 P_{n-1}^{r-1}. 又从 n个元素中选取特定的一个排在最前头的方法有n种. 故 P_{n-1}^{r-1} 与 n 的积等于由 n 个元素中取 r 个的排列的数目，因此

$$P_n^r=n\cdot P_{n-1}^{r-1}.$$

完全同样地，

$$P_{n-1}^{r-1}=(n-1)\cdot P_{n-2}^{r-2},$$

$$P_{n-2}^{r-2}=(n-2)\cdot P_{n-3}^{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$P_{n-r+2}^2=(n-r+2)\cdot P_{n-r+1}^1,$$

显然　$P_{n-r+1}^1=n-r+1.$

把上述各等式相乘，便得

$$P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$ □

【系】　$P_n^r=n\cdot P_{n-1}^{r-1}.$

证明　由上面另证开头的说明，这是很明显的.

又由【定理】1，有

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}=n\cdot P_{n-1}^{r-1}.$$ □

例题　用 0 到 9 的十个不同数字组成的五位数有多少个？

解　由 0 到 9 这十个数字中选取五个组成的排列，其数目是

$$P_{10}^5=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6.$$

其中 0 位于最左端的所有排列数是

$$P_9^4=9\cdot8\cdot7\cdot6=3024.$$

所求的五位数的数目等于它们的差，因此有

$$P_{10}^5-P_9^4=3024(10-1)=27216\text{个}.$$

【定义】2. 循环排列　不是在一直线上，而是在一圆圈上作的排列，叫做循环排列. 在圆圈上选定排列的方向(例如顺时针方向)后，相对位置相同的排列，视为同一循环排列.

例题　三个元素 a,b,c 可作成多少个循环排列？

解　先在某圆圈上选定一种排列方向，例如顺时针方向，在 a、b、c 中任取一个元素，例如 a，放在圆圈的任何位置上，然后，从 a 出发，沿顺时针方向在圆圈上排放第二个元素 b 或 c，最后，沿此方向在圆圈上排第三个元素，c 或 b(c 或 b 不能越过 a 的位置)，因此三个元素 a,b,c 作成的所有不同的循环排列是 abc，acb.

按【定义】2，循环排列 bca，cab 与 abc 应视为同一排列；同样，cba，bac 应与 acb 视为同一排列.

【定理】2. 由 n 个不同的元素组成的全部循环排列有 $(n-1)!$ 种.

证明　设这样的循环排列有 x 种. 任取其中的一个循环排列，在它的任意两个元素之间切断圆圈并拉直排列(按事先选定的排列方向，在圆圈上的这两个元素中先排的那个元素在拉直后仍排在首位，这样的(直)排列显然恰有 n 种，因而，由 x 种循环排列可作成 nx 种(直)排列，这正是 n 个元素的全排列，因此.

$$nx=n!,\quad 即\quad x=(n-1)!.\qquad\square$$

另证　当构成循环排列时，按事先选定的排列方向（顺时针方向或反时针方向），哪个元素在最前，哪个元素在最后，是不加区别的. 因此，以其中的一个为基准，考虑其它 $(n-1)$ 个元素的全排列即可，故所求的排列数是

$$P_{n-1}^{n-1}=(n-1)!.\qquad\square$$

例题　使五个男子和五个女子男女相间围坐圆桌的方法有多少种？

解　使五个男子坐圆桌的方法有 $4!$ 种. 又因五个女子可以分开坐在每两个男子之间的五个座位上，所以有 P_5^5 种坐法. 于是所求围坐圆桌的方法总数是

$$4!\times P_5^5=4!\times 5!=24\times 120=2880.$$

在刚才举的例中，已说明三个不同元素在一平面圆圈上总共可以作成两个不同的循环排列：abc，acb. 这两个循环排列有这样的特点，如果把其中的一个(比如 abc)视为顺时针的循环排列，则另一个(acb)恰好是前一个依原次序的逆时针的循环排列. 另一方面，也可以这样来看：设想 a，b，c 是三个不同颜色的滚珠镶在一个轴承槽里，如果从空中，沿顺时针方向循环排列 a，b，c. 又从循环排列 a，c，b 所在面的背面仍沿顺时针方向看它，结果是同一排列. 也就是对同一个代表着不同元素的滚珠轴承，从其正反两面都沿顺时针方向看它们时，恰是两个不同的排列，由此可得如下的定义。

【定义】3．平面圆圈上$n(n>2)$个不同元素的所有循环排列中，必成对地出现这样的循环排列：对于每一对中的任一排列视为顺时针的循环排列，则另一个恰好是前一排列依其原次序的逆时针的循环排列，如果把具有上述性质的每一对循环排列视为一个时，称这样的排列为珠数排列．

【定理】3．　由$n(n>2)$个不同元素作出的珠数排列数为$\frac{(n-1)!}{2}$．

证明　在所有循环排列中，对每一个反时针方向的循环排列，必有一个顺时针方向且同顺序的排列与之对应。按珠数排列的定义，这样的两个排列对应于一个珠数排列。所以珠数排列数应为循环排列数的一半，据【定理】2即为$\frac{(n-1)!}{2}$．　□

例题1　今有10个相异的小球，问

(1) 把它们排在一条直线上，排法有多少种？

(2) 把它们排在圆周上，排法有多少种？

解　(1) 直线上的排列数为P_{10}^{10}，即$10!=3628800$种．

(2)这显然是循环排列，故为$(n-1)!=9!=362880$种．

例题2．要把5个相异的珠子串成珠圈，问有多少种串法．

解　这是名副其实的珠数排列问题，故有$\frac{4!}{2}=12$种排法．

1.2　含相同元素的排列与重复排列

【定理】4．若n个元素中分别有p个，q个，r个……元素$(p+q+r+\cdots=n)$是相同的，则把它们全部取出所作成的排列数为$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$．

证明　设所说的排列数为x，对于其中的一个排列，若把p个相同元素都换成各不相同的元素，那么这p个不同元素可作成$p!$个不同的排列，同理，若将该排列中另外的q个相同元素，r个相同元素都分别换成不同的元素，则由这个排列就能得到$p!q!r!\cdots\cdots$个不同的排列，进而对x个上述排列，都用同样的方法，则可得到n个不同元素作成的全部排列(据【定理】1，它的数目为$p_n^n=n!$)，即$x\cdot(p!q!r!\cdots\cdots)=n!$，

$$\therefore\quad x=\frac{n!}{p!q!r!\cdots}(\text{其中 } p+q+r+\cdots=n)$$　□

例题　用1，1，1，2，2，3，4这七个数字能组成多少个七位数？

解　由于给定的元素中有三个同为1，两个同为2，一个3，一个4，共计7个，由这7个数字组成的不同排列的数目即为所求的7位数的总数，

从而，$$\frac{7!}{3!2!1!1!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2}=420(\text{个}).$$

【定义】4．重复排列　允许同一个元素在同一个排列中重复出现的排列叫做重复排列．

【定理】5．在 n 个相异元素中取 r 个的重复排列，其种数为 n^r（r 可以大于n）．

证明　因为允许重复选取元素，所以在选取 r 个元素的排列中，其第1个、第2个、第3个，…，第 r 个元素都可以独自取这 n 个元素中任何一个，即分别都有 n 种取法．从而所有可能的选取种数为 n^r．

注意　一般用 $\prod_n^r$ 来表示 n 个相异元素中选取 r 个的重复排列，这里 $\prod$ 是表示乘积的记号，它是罗马字母，是表示圆周率的字母 π 的大写．

作为乘积记号的例子，此如 $\prod_{i=1}^n x_i=x_1x_2x_3\cdots x_n$．

例题1．用0、1、2、3、4、5组成不大于10位的正整数，问有多少种组成法？

解　只要从0到5的六个数字中，允许重复地选取10个数字所作成的全部排列，再除去10个数字都是0的那一排列即可．故有

$$\prod_6^{10}-1=6^{10}-1=60466175(\text{种}).$$

例题2．把某大学的新生分作 A、B、C 三组，而某高中有8名毕业生被该大学录取，如果要求甲、乙二亲密学友被分在同一组，问这8名学生被分入 A、B、C 三组的所有可能的分配方案有多少种？

解　由于甲、乙二人始终同组，所以实际上只须考虑7个人的情形即可，此属重复排列问题，所以所求分配方案有 $\prod_3^7=3^7=2187$ 种．

§2．组　　合

2·1　不同元素的组合

【定义】1．组合　从 n 个不同元素中每次取出 r 个不同的元素，不考虑取出元素的顺序如何而做成一组，叫做从 n 个元素中每次取 r 个元素的组合，

或者简单叫做 n 个元素的 r 组合.（这里，没有排列顺序的问题。当不清楚一个问题是排列还是组合问题时，只要考查该问题是否与取出顺序有关，或者是否与排列顺序有关，就可立即得到判断.）

从n个不同元素中取r 个的组合数用C_n^r表示，不言而喻有 $n\geqslant r\geqslant 1$. C 是英文 Combination(组合)一词的第一个字母.C_n^r读作“从 n 个不同的元素中取 r 个的组合数.”

定理11. $C_n=\dfrac{p_n^r}{r!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$　①

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}.\qquad ②$$

证明　设 x 是所求的组合数，若把每一组合所包含的 r 个元素排列起来，则可得到$r!$个排列,所以就全体来说，组成$x\cdot r!$个排列，而且，这些排列都是互相不同的，因而这与从 n个不同的元素中取 r 个的排列完全一致。

$$\therefore\quad r!x=p_n^r.$$

因此　$C_n^r=x=\dfrac{p_n^r}{r!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$.

分母、分子同乘以$(n-r)!$，便得

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$　□

注意　把①式右端的式子记作$\binom{r}{n}$. $\binom{r}{n}$仅仅是①式右端的缩写记号.它本身完全没有“组合”的意义，但是在现在，$\binom{r}{n}$与 C_n^r 常常不加区别，也可以看成$\binom{r}{n}$与 C_n^r是相同的，当 $r=n$时，有$C_n^n=\dfrac{n!}{n!}=1$.（从①式看出，这是很明显的，但从意义上也很明显　对于②式，为 $r=n$ 时也成立，约定 $0!=1$.）

例题　在圆周上有 n 个（$n\geqslant 3$）点，把这些点作为顶点可构成多少个三角形？

解　因为圆周上任何三点都不在一直线上，从而其上任意三点都必然构成三角形，于是，所求的三角形个数是

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

【系】1. $C_n^r=C_n^{n-r}$.

证明　由[定理]1有

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

又
$$C_n^{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\,\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

$$\therefore\ C_n^r=C_n^{n-r}.$$ □

另证　因为从n个不同的元素中，选取r个的组合，就是选取其余的 $n-r$ 个元素的组合，所以，按组合的意义，这个系成立．□

注意　约定 $C_n^0=1$，以使 $r=n$ 时，这个定理也成立．这与约定 $0!=1$ 是完全一致的．

实际上，在计算 C_n^r时，如果 r 很大，用这个[系]来计算就很方便．

例题　试求 C_{100}^{98}的值．

解　$C_{100}^{98}=C_{100}^2=\dfrac{100\cdot 99}{2}=4950.$

注意　实际上，在计算组合数时，使用【定理】1①式的形式比②式的形式更方便．

【系】2.　$C_n^r=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^r$.

证明　上式右端$=\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\dfrac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\left(\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}\cdot\frac{n-r+r}{r(n-r)}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\text{左端}.$$ □

另证　从n个不同元素中取r个的组合数，等于包含这n个元素中某一个特殊元素的组合数与不包含这一特殊元素的组合数两者的总和．包含某一个特殊元素的组合数，是由除它以外的$(n-1)$个元素取$(r-1)$个的组

合数，即 C_{n-1}^{r-1}.

而不含这个特殊元素的组合数，是由除了这一元素以外的 $(n-1)$ 个中选取 r 个的组合数，即 C_{n-1}^{r}.

$$\therefore\quad C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r}. \qquad \square$$

例题1. 试证明从 $2n$ 个不同的元素中取 n 个的组合，其中包含某个元素的组合数与不包含它的组合数相等.

解 设某元素为 a. 则包含 a 的组合，可以从 $2n$ 个元素除去 a 以后的 $2n-1$ 个元素中取 $n-1$ 个的组合，再分别补上 a 而得到，因而包含 a 的组合数是 C_{2n-1}^{n-1}. 不包含 a 的组合数可以从除去 a 以后的 $2n-1$ 个元素中取 n 个而得到，因此是 C_{2n-1}^{n}. 而由【系】1.

$$C_{2n-1}^{n} = C_{2n-1}^{2n-1-n} = C_{2n-1}^{n-1}.$$

例题2. 从 m 个不同的元素取 n 个的组合中，当包含特殊的一个元素的组合数，是不包含它的组合数的 $\frac{1}{p}$ 时，试证明

$$m=(p+1)n.$$

解 从 m 个不同的元素中，取 n 个而且包含了特殊的一个元素的组合数是 C_{m-1}^{n-1}，而不包含这一特殊元素的组合数是 C_{m-1}^{n}，

$$\therefore\quad pC_{m-1}^{n-1} = C_{m-1}^{n}.$$

即

$$\frac{p(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!} = \frac{(m-1)!}{n!(m-n-1)!},$$

$$\therefore\quad \frac{p}{m-n} = \frac{1}{n},\ \text{即}\quad pn = m-n,$$

$$\therefore\quad m=(p+1)n.$$

【系】3. $C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + C_{n-3}^{r-1} + C_{n-4}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}$

证明 由【系】2，有

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r}.$$

在上述公式中，

把 n 换为 $n-1$ 时，$C_{n-1}^{r} = C_{n-2}^{r-1} + C_{n-2}^{r}$，

把 n 换为 $n-2$ 时，$C_{n-2}^{r} = C_{n-3}^{r-1} + C_{n-3}^{r}$，

…… 　　　　…… ，



把 n 换为 $r+1$ 时，$C_{r+1}^{r}=C_{r}^{r-1}+C_{r}^{r}$,

最后　　　　$C_{r}^{r}=C_{r-1}^{r-1}(=1)$.

因此，把上述各式加起来，就得到应证明的公式。　□

【系】4. $C_{n}^{r}=C_{n-1}^{r}+C_{n-2}^{r-1}+C_{n-3}^{r-2}+\cdots+C_{n-r-1}^{0}$.

证明　由【系】2，有

$$C_{n}^{r}=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r},$$

在此公式中，将 n 换为 $n-1$，r 换为 $r-1$，则得

$$C_{n-1}^{r-1}=C_{n-2}^{r-2}+C_{n-2}^{r-1},$$

同理有　$C_{n-2}^{r-2}=C_{n-3}^{r-3}+C_{n-3}^{r-2}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$C_{n-r+1}^{1}=C_{n-r}^{0}+C_{n-r}^{1},$$

$$C_{n-r}^{0}=C_{n-r-1}^{0}.$$

把上列 $r+1$ 个等式相加，就得到欲证明的公式.

例题1. 试证明

$$C_{n}^{r}=C_{n-2}^{r-2}+2C_{n-2}^{r-1}+C_{n-2}^{r}(\text{其中 } r\geqslant 2).$$

解　由【系】2，有　$C_{n}^{r}=C_{n-1}^{r}+C_{n-1}^{r-1}$,

$\therefore$　$C_{n-1}^{r}=C_{n-2}^{r}+C_{n-2}^{r-1}$,

$$C_{n-1}^{r-1}=C_{n-2}^{r-1}+C_{n-2}^{r-2}.$$

把上列二式相加，就得到欲证明的等式.

另证　设 n 个元素中有特定的两个元素 a、b，则从不同的 n 个元素中取 r 个的组合，可分为四类，即：(i)包含 a、b；(ii)包含 a 但不包含 b；(iii)包含 b 但不包含 a；(iv)不包含 a、b. 但(i)中的组合可以从除去 a、b 以外的 $n-2$ 个元素中取 $r-2$ 个的组合再把 a、b 补充进去得到，因此组合数是 C_{n-2}^{r-2}；对(ii)、(iii)，由同样的考虑方法，都得到组合数 C_{n-2}^{r-1}；(iv)是 C_{n-2}^{r} 个. 因而有

$$C_{n}^{r}=C_{n-2}^{r-2}+2C_{n-2}^{r-1}+C_{n-2}^{r}.$$

例题2. 设有番号为 1 到 n 的红牌、绿牌各 n 张，从这 $2n$ 张牌中取出 n 张时，正好只包含 r 张红牌的取法有多少种？利用这个结果证明下式

$$C_{2n}^{n}=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2.$$

解　从 n 张红牌中取出 r 张的取法有 C_n^r 种．对于每个这样的组合，从 n 张绿牌中取出 $n-r$ 张的取法是 $C_n^{n-r}=C_n^r$．因此，从 $2n$ 张牌取出 r 张红牌，$(n-r)$张绿牌的取法有 $(C_n^r)^2$ 种．从 $2n$ 张牌中取出 n 张的取法有 C_{2n}^n 种，而在这 n 张中，红牌有 0 张，1 张，2 张，…，n 张等情形，所以

$$C_{2n}^{n}=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2.$$

例题3．从 12 人中选举 4 个委员，但其中有指定的二人必为委员．这种选举方法有多少种？某指定的一人必当选，另一指定的人不当选的选法有多少种？

解　指定的二人必为委员的情形的选法，就是从剩下的 10 人中选举二人作委员的选法．因此这种选法数目是 $C_{10}^2=45$ 种．

指定的一人必当选，另一人不当选的选法，不消说，只要从这 10 人中选举这两人以外的三人作委员即可．因此这种选法数目是

$$C_{10}^3=120\text{ 种}.$$

注意　【系】3、【系】4 是一般的推广，要紧的是【系】1、【系】2．

·2　重复组合

【定义】2．重复组合　从若干个不同的元素中，允许重复选取的组合，叫做重复组合．从 n 个元素中选取 r 个的重复组合数用记号 H_n^r 表示．与排列及普通组合的情形不同，r 可以比 n 大．

H 是英文 Homogeneous products(齐次积)一词的头一个字母，它来源于单项式的乘积的问题(参看【定理】2 的证明)．H_n^r 读作"从 n 个不同的元素中取 r 个的重复组合数."

【定理】2． $H_n^r=\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}=C_{n+r-1}^r$．

证明　用不同的 n 个字母 a，b，c，…，k，l 表示 n 个不同的元素，则由它们所构成的r次齐次积$a^r,b^r,c^r,\cdots,a^{r-1}b$，…，$a^{r-2}bc,\cdots$的数目可用 H_n^r 表示．(这是采用记号 H_n^r 的原因.)

在 H_n^r 个齐次积中，都分别包含 r 个字母．(例如在 a^r 中，包含 r 个

a). 因此，包含在所有 H_n^r 个齐次积中的字母数目必定是 $r\cdot H_n^r$ 个. 而且，因为 n 个字母应该平等地被包含在齐次积中，所以某个特殊的字母（例如 a）的总数是所有字母个数的 $\frac{1}{n}$，即 $\frac{r\cdot H_n^r}{n}$ 个.

于是在 H_n^r 个 r 次的齐次积中，把包含 a 的齐次积都取出，则得

(i)　a^r, $a^{r-1}b$, $a^{r-1}c$, $\cdots$, $a^{r-2}bc$, $a^{r-2}bd$, $\cdots$, ab^{r-1}, $\cdots$, al^{r-1}.

若把它们分别用 a 除，则得

(ii)　a^{r-1}, $a^{r-2}b$, $a^{r-2}c$, $\cdots$, $a^{r-3}bc$, $a^{r-3}bd$, $\cdots$, b^{r-1}, $\cdots$, l^{r-1}.

这必定是由 a, b, c, $\cdots$, l 的 n 个字母构成的 $(r-1)$ 次齐次积的全体. 也就是说，这些积相互不同，除此以外，没有别的 $(r-1)$ 次齐次积（如果还有，那么乘以 a 后它必包含在(i)中，这与以上所述相矛盾）. 因而，(ii)是由 a, b, c, $\cdots$, l 所构成的 $(r-1)$ 次齐次积的全体，所以它的个数必定是 H_n^{r-1}. 而且包含在(ii)中的字母 a 的总数，完全与前面相类似，必定是 $\frac{(r-1)\cdot H_n^{r-1}}{n}$. 因为用 a 除(i)中的各个齐次积，去掉的 a 的数目显然是 H_n^{r-1}，所以包含在(i)中的 a 的总数是

$$H_n^{r-1}+\frac{(r-1)\cdot H_n^{r-1}}{n}=\frac{n+r-1}{n}H_n^{r-1}.$$

不用说，它应和前面求出的数目相等，因此

$$\frac{r\cdot H_n^r}{n}=\frac{n+r-1}{n}H_n^{r-1},$$

$$\therefore\qquad H_n^r=\frac{n+r-1}{r}H_n^{r-1}.$$

如果把 r 每次减小1，则有

$$H_n^{r-1}=\frac{n+r-2}{r-1}H_n^{r-2},$$

$$H_n^{r-2}=\frac{n+r-3}{r-2}H_n^{r-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$H_n^2=\frac{n+1}{2}H_n^1,$$

显然　$H_n^1=n$,

把以上各式相乘便得



$$H_n^r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-2)(n+r-1)}{r!}.$$

而且上式显然可写成

$$H_n^r=C_{n+r-1}^r.$$ □

另证　假定把 n 个不同的元素用数字 1，2，3，…，n 表示，并把从它们中允许重复地取 r 个的组合的元素，从左起按由小到大的顺序排列起来.例如设为

(i) 1，1，1，2，2，…，n，n(共有 r 个)，对这 r 个数字，如果由左到右依次加上 0，1，2，3…，$r-1$ 所得到的数字的组合，就会产生象

(ii) 1，2,3,4,5，6，…，$n+r-2$，$n+r-1$

这样的从不同的$(n+r-1)$个数字,不重复地取 r 个的组合中的一个，因为在(ii)中，不存在相同的数字,而且最小的数字是 1，最大的是 $n+r-1$，所以(ii)显然是由$(n+r-1)$个不同元素中不允许重复地取 r个的组合中的一个，从允许取重复的组合 (i)，必然得到组合(ii). 反之，若由 (ii) 的各数字，从左起依次减去 0，1，2，3，‥，$r-1$，则得到组合(i). 因此(i)和 (ii) 是一一对应的，也就是说，由 n 个不同的元素，允许重复地取 r 个的全部组合与由$(n+r-1)$ 个不同的元素不允许重复地取 r 个的全部组合之间一一对应着，因此全体的组合数也必然相等.

$$\therefore\quad H_n^r=C_{n+r-1}^r.$$ □

例题1．同时掷三个形状相同大小相等的骰子时，不同的结果有多少种？

解　由于在骰子之间没有区别，所以要求的种数与从 1 到 6 的六个数字允许重复地取三个构成的组合的数目一致，因而所求的结果是

$$H_6^3=6\cdot7\cdot8/3!=56\text{种}.$$

例题2．在$(a+b+c+d)^3$ 的展开式中有多少项？ 又由 a，b，c，d 四个字母中至少取两个相异字母构成的三次齐次积有多少？

解　将$(a+b+c+d)^3$展开，则可得到全部三次齐次积，这就是允许重复地从这四个字母中取三个的组合的个数，从而其总数是

$$H_4^3=C_{4+3-1}^3=6\cdot5\cdot4/3!=20(\text{个}).$$

又这些三次齐次积是由(i)同一字母的三次方，(ii) 同一字母的二次方与另一字母的积，(iii) 不同的三个字母的积组成．但在本题中，同一字母最多只有两次方,故情形 (i) 不发生,因而是由四个字母构成的三次的齐次积的总数 H_4^3减去情形(i)的总数4.即

$H_4^3-4=20-4=16.$

【系】 $H_n^r=H_n^{r-1}+H_{n-1}^r(n\geqslant 2)$.

证明 由 H_n^r的公式

$$H_n^{r-1}=C_{n+r-2}^{r-1},\quad H_{n-1}^r=C_{n+r-2}^r,$$

$$\therefore\quad H_n^{r-1}+H_{n-1}^r=C_{n+r-2}^{r-1}+C_{n+r-2}^r$$

$$=C_{n+r-1}^r=H_n^r.$$

(根据§2.【定理】1【系】2). □

另证 在 H_n^r 个齐次积中，以某字母为公因子的齐次积的数目是H_n^{r-1}，不包含该字母的齐次积的数目是 H_{n-1}^r，这两者加起来就是全体齐次积，故上式成立.

注意 在上面的证明中，没有应用§2.【定理】1［系］2，而是分别计算 C_{n+r-2}^{r-1}，C_{n+r-2}^r.

$$C_{n+r-2}^{r-1}+C_{n+r-2}^r=\frac{(n+r-2)!}{(r-1)!(n-2)!}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{r}\right\}$$

$$=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=C_{n+r-1}^r=H_n^r.$$

不言而喻，这是正确的.

例题 试证明下列各式

① $H_n^r=H_n^{r-1}+H_{n-1}^{r-1}+H_{n-2}^{r-1}+\cdots+H_1^{r-1}(n\geqslant 3)$;

② $H_n^r=H_{n-1}^r+H_{n-1}^{r-1}+\cdots+H_{n-1}^1+1(n\geqslant 2)$.

解 由上面的［系］，$H_n^r=H_n^{r-1}+H_{n-1}^r$，　①

(1) 取 n 为 $n-1$，　$H_{n-1}^r=H_{n-1}^{r-1}+H_{n-2}^r$.

取 n 为 $n-2$，　$H_{n-2}^r=H_{n-2}^{r-1}+H_{n-3}^r$.

…………………

取 n 为 2，　$H_2^r=H_2^{r-1}+H_1^r$.

而　$H_1^r=\frac{r!}{r!}=\frac{(r-1)!}{(r-1)!}=H_1^{r-1}$，$(\because H_1^r=C_r^r, H_1^{r-1}=C_{r-1}^{r-1}.)$

把上列各式相加，则得(1)式.

(2)　在①式中，令 r 为 $r-1$，$H_n^{r-1}=H_n^{r-2}+H_{n-1}^{r-1}$。

令 r 为 $r-2$，$H_n^{r-2}=H_n^{r-3}+H_{n-1}^{r-2}$。

………………………

令 r 为 2，　$H_n^2=H_n^1+H_{n-1}^2$。

令 r 为 1，　$H_n^1=H_n^0+H_{n-1}^1$。

而　$$H_n^0=1.$$

把①式与上列各式相加，便得②式。

注意1. 在(1)式右端，若不写出第三项 H_{n-2}^{r-1}，则可将限制 $(n\geqslant 3)$ 改为 $(n\geqslant 2)$. 又在(2)的证明中，H_n^0 是从 n 个不同的元素中一个也不取出，即全部保留的取法，这只有一种，因此 $H_n^0=1$. 这也可以看成是 $H_n^0=C_{n-1}^0=1$ 的约定。

2. 此外，"在 n 个元素中，a 有 α 个，b 有 β 个，C 有 γ 个，…时，从这些元素中不允许重复地取 r 个的组合数等于

$$(1+x+x^2+\cdots+x^\alpha)(1+x+x^2+\cdots+x^\beta)(1+x+x^2+\cdots+x^\gamma)\cdots$$

的展开式中 x^r 的系数. 由这 n 个元素中取 r 个的排列数等于

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^\beta}{\beta!}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^\gamma}{\gamma!}\right)\cdots$$

的展开式中 x^r 的系数和 $r!$ 的积". 但其内容超过了高中的程度. 故不作进一步的讨论.

§3. 二项式定理

3·1 二项式定理

【定理】1. (二项式定理)当 n 为正整数时，

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1ax^{n-1}+C_n^2a^2x^{n-2}+\cdots$$
$$+C_n^ra^rx^{n-r}+\cdots+a^n.$$

注意　上式叫做二项式定理，C_n^1，C_n^2，…，C_n^r，…，C_n^n是二项式$(x+a)^n$展开后的系数，叫做**二项式系数**. 有时，把字母 n 省略，用小写字母 c_0, c_1, c_2，…，c_r，…，c_n 记之.（读者使用时，必须记住它们是二项式系数.）

采用记号 Σ，二项式可表示成

$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^{n-r}x^r,$$

或

$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r a^r x^{n-r}.$$

不言而喻，$C_n^0=C_n^n=1$. 展开式中第 $r+1$ 项 $C_n^r C^{n-r}x^r$ 或 $C_n^r a^r x^{n-r}$ 叫做通项（或一般项）.

证明　让我们来求$(x+a)^n$的展开式中 x^r 的系数，因为$(x+a)$的 n 次幂是由 n 个$(x+a)$中，取出 x 或 a 作乘积，再求这些积的总和，所以含 x^r 的项是从 r 个因式中取出 x，从余下的$(n-r)$个因式中取出 a 所作乘积的总和. 因而，各项具有 $a^{n-r}x^r$ 的形式，其项数等于从 n 个元素中选取 r 个（从 n 个元素中取 $n-r$ 个）所作的组合数，从而定理成立. □

另证　（用数学归纳法）

1：当 $n=1$ 时，左端$=x+a=$右端，定理成立.

2：假定当 $n=k$ 时，定理成立，则

$$(x+a)^k=x^k+C_k^1 a x^{k-1}+C_k^2 a^2 x^{k-2}+\cdots+C_k^r a^r x^{k-r}+\cdots+a^k.$$

上式两端各乘以$(x+a)$

$$\begin{aligned}(x+a)^{k+1}&=x^{k+1}+C_k^1 a x^k+C_k^2 a^2 x^{k-1}+\cdots\\&\quad+C_k^r a^r x^{k-r+1}+\cdots+a^k x\\&\quad+C_k^0 a x^k+C_k^1 a^2 x^{k-1}+\cdots\\&\quad+C_k^{r-1} a^r x^{k-r+1}+\cdots+C_k^{k-1} a^k x+a^{k+1}\\&=x^{k+1}+(C_k^0+C_k^1) a x^k+(C_k^1+C_k^2) a^2 x^{k-1}\\&\quad+\cdots+(C_k^{r-1}+C_k^r) a^r x^{k-r+1}+\cdots+a^{k+1}.\end{aligned}$$

但是　$C_k^{r-1}+C_k^r=C_{k+1}^r$　（§ 2.【定理】1的[系]2）.

故有

$$C_k^0+C_k^1=C_{k+1}^1,\quad C_k^1+C_k^2=C_{k+1}^2,\quad \cdots,$$

$$C_k^{k-1}+C_k^k=C_{k+1}^k,$$

因而

$$(x+a)^{k+1}=x^{k+1}+C_{k+1}^1ax^k+C_{k+1}^2a^2x^{k-1}+\cdots$$
$$+C_{k+1}^ra^rx^{k+1-r}+\cdots+C_{k+1}^ka^kx+a^{k+1}.$$

这表明$n=k+1$时定理也成立。

从而对于所有的正整数n，定理得证。 □

注意 还有别的证明方法，例如利用逐次微分法，但此处从略。详见有关微分学的书籍。

【系】 $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+x^n.$ ①

$$(1-x)^n=1-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots+(-1)^rC_n^rx^r$$
$$+\cdots+(-1)^nx^n.$$ ②

证明 在【定理】1中，令$a=1$，则得①式；若由①，把x换为$-x$，则得②式。 □

注意 如果对①、②的首项及末项，利用$1=C_n^0$，$1=C_n^n$，则①，②可写成

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n.$$

$$(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\cdots$$
$$+(-1)^rC_n^rx^r+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n.$$

对于【定理】1也可这样作，它就是把记号Σ表出的式子

$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n}C_n^ra^{n-r}x^r$$

直接写出来的结果。

例题 (1) 试根据二项式定理，展开$(2a+b)^8$；

(2) 试求下列二项式展开时的一般项：

(a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$，　(b) $(2x-3y)^n$；

(3) 试求$\left(2x^2-\frac{1}{3x}\right)^8$的展开式中$x^7$的系数。

(4) 试求$\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^6$的常数项.

解 (1) $(2a+b)^8=\sum_{r=0}^{8}C_8^r(2a)^{8-r}b^r$

$$=(2a)^8+C_8^1(2a)^7b+C_8^2(2a)^6b^2+C_8^3(2a)^5b^3$$
$$+C_8^4(2a)^4b^4+C_8^5(2a)^3b^5+C_8^6(2a)^2b^6$$
$$+C_8^7 2ab^7+b^8$$
$$=256a^8+8\cdot128a^7b+28\cdot64a^6b^2$$
$$+56\cdot32a^5b^3+70\cdot16a^4b^4+56\cdot8a^3b^5$$
$$+28\cdot4a^2b^6+8\cdot2ab^7+b^8$$
$$=256a^8+1024a^7b+1792a^6b^2+1792a^5b^3$$
$$+1120a^4b^4+448a^3b^5+112a^2b^6+16ab^7+b^8.$$

(2) (a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r$

$$=\sum_{r=0}^{6}(-1)^r C_6^r x^{6-2r}.$$

(b) $(2x-3y)^n$的一般项是

$$C_n^r(2x)^{n-r}(-3y)^r=(-1)\,C_n^r2^{n-r}3^rx^{n-r}y^r.$$

(3) $\left(2x^2-\frac{1}{3x}\right)^8=\sum_{r=0}^{8}C_8^r(2x^2)^{8-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$=\sum_{r=0}^{8}(-1)^r C_8^r2^{8-r}\cdot3^{-r}x^{16-3r}.$$

因为x^7的系数是对应于$16-3r=7$，即$r=3$的项的系数，故所求的系数为

$$(-1)^3C_8^32^{8-3}\cdot3^{-3}=-\frac{2^5}{3^3}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=-\frac{1792}{27}.$$

(4) $\left(3x^2-\frac{2}{x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}C_6^r(3x^2)^{6-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r$

$$=\sum_{r=0}^{6}(-1)^rC_6^r3^{6-r}\cdot 2^rx^{12-3r}.$$

由于常数项是对应于$12-3r=0$，即$r=4$的项，故所求常数项为

$C_6^4 3^2 \cdot 2^4 = 2160$.

【定义】1. 巴斯卡三角形　在$(a+b)^n$中，当依次取$n=0, 1, 2, \cdots$而求其展开式的系数时，便构成下表所示的系数表，这叫做巴斯卡三角形*。

n	二　项　式　系　数　表	2^n
0	1	1
1	1　1	2
2	1　2　1	4
3	1　3　3　1	8
4	1　4　6　4　1	16
5	1　5　10　10　5　1	32
6	1　6　15　20　15　6　1	64
7	1　7　21　35　35　21　7　1	128
8	1　8　28　56　70　56　28　8　1	256
9	1　9　36　84　126　126　84　36　9　1	512
10	1　10　45　120　210　252　210　120　45　10　1	1024
r	0　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10	r

巴斯卡三角形具有下列性质：

1° 各行的数在左右对称的位置上是相等的(由于$C_n^r = C_n^{n-r}$，故上述性质是显然的)。

2° 除去顶端的数1以外的各个数等于它的左上方和右上方的两个数的和。(由$C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$直接得证。)

3° 各行的每一个系数(除第一个外)，是它的左邻系数的$\frac{n-r+1}{r}$倍。(例如，$n=8$的行，与$r=3$对应的56可由其左方的28算得：

$$28\times\frac{8-3+1}{3}=28\times\frac{6}{3}=56.$$)这可证明如下：

---

* 比巴斯卡早三百多年，我国宋朝数学家杨辉在其著作"详解九章算法"中已指出这样的三角形系数表，故又称杨辉三角形。——译注

$$C_n^{r-1}\cdot\frac{n-r+1}{r}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}\cdot\frac{n-r+1}{r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r.$$

4° 与 r 对应的各列的数是它的右上方数的$\frac{n}{n-r}$倍(例如，$56=35\times\frac{8}{8-3}$)．可以证明如下：

$$C_{n-1}^r\cdot\frac{n}{n-r}=\frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}\cdot\frac{n}{n-r}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r$$

5° 各行数字的和，等于该行最右边 2^n 列的相应数值．这在 $(1+x)^n$ 中令$x=1$并求二项式的系数和便可显见(参看下面的【定理】2)．

注意 在这里，不要忘记行数 n 和序号 r 都是从 0 开始的，因此特地在二项式系数表上写出了 n 和 r．上面，与 56 对应的位置号是 $n=8$，$r=3$．(在 $n=8$ 时，r 也可以是 5，此时，左方的数是 70．右上方的数变为 21.)

例题 写出 $n=20$ 时的二项式系数．

解 显然 $C_{20}^0=1$，$C_{20}^1=20$．只要准确地算出

$$C_{20}^2=\frac{20\cdot19}{1\cdot2}=190,\quad C_{20}^3=\frac{20\cdot19\cdot18}{1\cdot2\cdot3}=1140,\ \cdots\cdots$$

即可．当然也可以利用性质 3° 计算：

$$C_{20}^2=20\times\frac{20-2+1}{2}=20\times\frac{19}{2}=190.$$

$$C_{20}^3=190\times\frac{18}{3}=1140,$$

$$C_{20}^4=1140\times\frac{17}{4}=4845,$$

$$C_{20}^5=4845\times\frac{16}{5}=15504,$$

$$C_{20}^6=15504\times\frac{15}{6}=38760$$

类似可得

$$C_{20}^{7}=77520,\quad C_{20}^{8}=125970,$$

$$C_{20}^{9}=167960,\quad C_{20}^{10}=184756.$$

下面各系数可以根据性质 1° 对称地写出，即

$$C_{20}^{11}=167960,\quad C_{20}^{12}=125970,\quad C_{20}^{13}=77520,$$

$$C_{20}^{14}=38760,\quad C_{20}^{15}=15504,\quad C_{20}^{16}=4845,$$

$$C_{20}^{17}=1140,\quad C_{20}^{18}=190,\quad C_{20}^{19}=20,\quad C_{20}^{20}=1.$$

又在 $n=19$ 的情形，可以应用性质 2° 求和.

3·2　二项式系数间的关系

【定理】2. 对于二项式系数，下列等式成立

(1)　$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$;

(2)　$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.

证明　根据二项式定理，有

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n.$$

由此

(1)　令 $x=1$，则 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

(2)　令 $x=-1$，则 $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.　□

注意　在(2)式中，将偶数项移项至等式右端得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots.$$

根据(1)，二项式系数全体的和是 2^n，因此上式的左端是它的一半，变为 2^{n-1}. 当 n 是奇数 $2m-1$ 时，上式两端都为 m 项；而当 n 是偶数 $2m$ 时，上式左端为 $m+1$ 项，右端变为 m 项，但它们的和仍然是 2^{n-1}.（不要忘记 $r=0$ 即 C_n^0 项包括在内！）

例题　试证明下列各式

(1)　$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$;

(2)　$1^2C_n^1+2^2C_n^2+3^2C_n^3+\cdots+n^2C_n^n=n(n+1)2^{n-2}$.

注意　对于上述这样的问题，一种方法是用数学归纳法来证明，但在这里，我们利用【定理】2 的方法来证明.

解　(1)　$rC_n^r=\dfrac{r\cdot n!}{r!(n-r)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=nC_{n-1}^{r-1}$,

因此 $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=$

$$=n\{C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\}.$$

然而，根据【定理】2，有

$$C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1},$$

$\therefore$ (1)式左端$=n\cdot 2^{n-1}$.

(2) $r^2=r(r-1)+r$，因此，当 $r=1$ 时，$1^2C_n^1=n\cdot C_{n-1}^0$（与(1)同）. 当 $r\geqslant 2$ 时，

$$r^2C_n^r=r(r-1)\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}+r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(r-2)!(n-r)!}+n\cdot\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=n(n-1)C_{n-2}^{r-2}+nC_{n-1}^{r-1}.$$

$\therefore$ (2)式左端$=n(n-1)\{C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_{n-2}^{n-2}\}$

$$+n\{C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\}$$
$$=n(n-1)\cdot 2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$$
$$=n(n+1)\cdot 2^{n-2}=\text{右端}.$$ □

注意 在讨论二项式系数间关系的问题时，利用微分法和积分法也常常是很方便的．下面就是用微分法证明例题(1)的一个例子．

将等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r$

$$+\cdots+C_n^nx^n$$

两端微分，得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+rC_n^rx^{r-1}$$
$$+\cdots+nC_n^nx^{n-1}.$$

取 $x=1$，便得

$$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+rC_n^r+\cdots nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}.$$ □

另外，在前例的解法中，要弄懂两个式子

$$C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1},$$

$$C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-2}^{n-2}=2^{n-2}.$$

【定理】3．在$(1+x)^n$的展开式的$(n+1)$个系数 C_n^0，C_n^1，C_n^2，…，C_n^r，…，

C_n^r中，若n是偶数，则最中间的系数$C_n^{n/2}$最大；若n是奇数，则最中间的两个系数$C_n^{\frac{n-1}{2}}$和$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等且最大.

证明　二项展开式的第r个系数C_n^{r-1}和第$(r+1)$个系数C_n^r之比是

$$\frac{C_n^{r-1}}{C_n^r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}\Big/\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{r}{n-r+1}.$$

∴　如果$\frac{r}{n-r+1}<1$，即$r<\frac{n+1}{2}$，则$C_n^{r-1}<C_n^r$. 从而在这个范围内，若使r增大，则系数依次增大.

即　　$C_n^0<C_n^1<C_n^2<\cdots<C_n^r$.

反之，若$\frac{r}{n-r+1}>1$，即$r>\frac{n+1}{2}$，则$C_n^{r-1}>C_n^r$. 从而在这个范围内，若使r增大，则系数依次减小.

即　$C_n^{r-1}>C_n^r>C_n^{r+1}>\cdots>C_n^n$.

因而，若n是奇数，则当$r=\frac{n+1}{2}$时，中间两项的系数$C_n^{\frac{n-1}{2}}$和$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等，且为最大，若n是偶数，则当$r=\frac{n}{2}$时，中间一项的系数$C_n^{n/2}$为最大. □

注意　如果观察巴斯卡三角形中二项式系数如何变化，则这个定理就立即明白了.

【定义】2. 高斯记号　用$[n]$表示不超过n的最大整数. $[n]$叫做高斯记号.

例　若采用高斯记号，则当n为偶数时$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$，当$n$为奇数时

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}.$$

若采用高斯记号，则【定理】3 可简单地表述成下列形式.

【定理】3. 在$(1+x)^n$的展开式中，最大系数是$C_n^{[n/2]}$.

注意　项的序号不能这样简单地表示. 比如说，第$\left[\frac{n}{2}\right]+1$项是具有最大系

数的项，但当 n 是奇数时，第 $\left[\frac{n}{2}\right]+2$ 项也为具有最大系数的项.

【定理】4. 当 x 是正数，n 是正整数时，若令 $C_n^r x^r=u_r$，则

$(1+x)^n=1+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_r+\cdots+u_n$. 这时

(1) 若 $\frac{n+1}{1+x}x$ 是整数，则当 $r=\frac{n+1}{1+x}x$ 时，u_{r-1} 和 u_r 相等，比其他任何项都大.

(2) 若 $\frac{n+1}{1+x}x$ 不是整数，则对于满足 $\frac{n+1}{1+x}x>r$ 的 r (r 表示 $\frac{n+1}{1+x}x$ 的最大整数值)，u_r 也比其他项大.

证明　若比较 u_r 和 u_{r-1}，则

$$\frac{u_r}{u_{r-1}}=\frac{C_n^r x^r}{C_n^{r-1}x^{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}x.$$

如果 $\frac{n-r+1}{r}x=1$，即 $\frac{n+1}{1+x}x=r$，则 $u_r=u_{r-1}$.

因而，若以 1，2，3，…代替 r，则开始时 u_r 逐渐增大，然后当 r 的值超过 $\frac{n+1}{1+x}x$ 时，u_r 反而减小.

从而，(1) 若 $\frac{n+1}{1+x}x$ 是整数，则当 $r=\frac{n+1}{1+x}x$ 时，$u_r=u_{r-1}$，且比其他任何项都大. (2) 若 $\frac{n+1}{1+x}x$ 不是整数，则令 r 为不超过它的最大整数时，u_r 为最大项. □

这个定理若采用高斯记号，两个结果还可简单地归并为一个，即

【定理】4. 若令 $(1+x)^n=1+u_1+u_2+\cdots+u_r$ (其中 $u_r=C_n^r x^r$)，则当 $r=\left[\frac{n+1}{1+x}x\right]$ 时 u_r 是最大项.

注意　由于 x 是正的，故 $\frac{n+1}{1+x}x=\frac{n+1}{\frac{1}{x}+1}$ 比 0 大，而比 $n+1$ 小. 从而，$\left[\frac{n+1}{1+x}x\right]$ 是 0 到 n 中的某一整数，而且

(1) 若 $\frac{1}{x}>n$ 亦即 $x<\frac{1}{n}$，则 $\left[\frac{n+1}{1+x}x\right]=0$，从而，首项 $u_0=1$ 是最大项，其他的项都比 1 小.

(2) 若 x 充分大，而 $\left[\frac{n+1}{1+x}x\right]=n$，则末项 $u_n=x^n$ 为最大项.

例题　试求在 $(a+b)^n$ 的展开式中绝对值最大的项.

解　$(a+b)^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$，而在 $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ 的展开式中，绝对值最大的项与 $\left(1+\left|\frac{b}{a}\right|\right)^n$ 展开式中的最大项一致．因而，若令 u_r 是 $(a+b)^n$ 展开式中第 $r+1$ 项，则由【定理】4 知，如果 $\frac{n+1}{1+\left|\frac{b}{a}\right|}\left|\frac{b}{a}\right|=\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ 是整数，并令此整数为 r，那么 u_r 和 u_{r-1} 是最大项；如果它不是整数，令 r 为不超过该数的最大整数，则 u_r 是绝对值最大的项.

例如，设 $a=\frac{1}{5}, b=-\frac{2}{5}$，$n=100$，则

$$\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}=\frac{100+1}{1+\frac{1}{2}}=67\frac{1}{3},\quad \therefore \left[\frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}\right]=67.$$

因而第 68项绝对值最大，其值为

$$C_{100}^{67}\left(\frac{1}{5}\right)^{100-67}\left(-\frac{2}{5}\right)^{67}=-\frac{100!\,2^{67}}{67!\,33!\,5^{100}}$$

(之所以称为第 68 项，是因为首项是 u_0).

3·3　一般的二项式定理

【定理】5. 当 $|x|<1$ 时，对于任意的实数 n

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{r}x^r+\cdots$$

其中　$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

注意　当 n 是正整数时，前已证明

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^rx^r+\cdots+C_n^nx^n.$$

当 n 不是正整数时，C_n^r 记号失去其原来的意义，但是，如果承认 C_n^r 的计算公式即使在 n 是负数和分数的情形下也是合理的，于是可以证明，若 $|x|<1$，则 $(1+x)^n$ 为无穷级数，上式成立．不过，其严格的证明必须借

助于微分学．在此，粗略地证明如下*．

证明 假定$(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，$(1+x)^n$ 变为 x 的多项式(可能有无限多项)．其中，若令 $x=0$，则 $a_0=1$．若两端对 x 求 r 次导数，则得

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(1+x)^{n-r}=r!a_r+(r+1)r\cdots2\cdot a_{r+1}x+\cdots,$$

因此，若令 $x=0$，则有

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)=r!a_r,$$

$$\therefore\quad a_r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\binom{n}{r}.$$

由此即得

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{r}x^r+\cdots \qquad \square$$

注意 即使假定变为 x 的无穷级数，在 n 是正整数时，在 $\binom{n}{n}x^n$以后的各项均为0．因为超过 $\binom{n}{n}x^n$ 时，$\binom{n}{r}$的分子变成0，因而此级数在 $n+1$ 项终结．如果 n 不是正整数，那么，即使 r 增加 $\binom{n}{r}$也不为0，而是无限继续下去，在这里，这个无穷级数在何处收敛便成了问题，当令

$$\left|\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{(r-1)!}x^{r-1}\right|=a_r$$

时，根据达朗贝尔收敛判别法，若

$$\lim_{r\to\infty}\frac{a_{r+1}}{a_r}=\lim_{r\to\infty}\left|\frac{n-r}{r}x\right|=|x|<1,$$ 则$|x|<1$ 为级数的收敛范围．

在上面的证明中，假定了$(1+x)^n$ 可展开成 x 的多项式，但若令 $f(x)=(1+x)^n$，而按微分学中的麦克劳林展式展开，则立即可得二项式定理的展开式．

又利用本定理，当绝对值充分小(至少$|x|<1$)时，近似公式

$$(1+x)^n\approx1+nx$$

或 $$(1+x)^n\approx1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

成立．这是因为在$|x|<1$ 且充分小时，在上列$(1+x)^n$的展式中，可忽略第三项(含 x^2 的项)及以后的各项．

例题1．假如$|x|<1$，试展开$(1+x)^{1/2}$．

---

* 读者可参看第九章 8.6——译注

解　$(1+x)^{1/2}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\cdots+\binom{\frac{1}{2}}{r}x^r+\cdots(|x|<1)$,

其中　$\binom{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$, $\binom{\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=-\frac{1}{8}$, $\cdots$,

$$\binom{\frac{1}{2}}{r}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}=(-1)^{r-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r},$$

$$\therefore\quad(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{r-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots2r}x^r+\cdots(|x|<1).$$

例题2. 利用二项式定理，求出下列各数的近似值.

(1) $\sqrt{7}$；(2) $\sqrt{99}$；　(3) $\sqrt[3]{30}$.

解　(1) $\sqrt{7}=\sqrt{9-2}=\left\{9\left(1-\frac{2}{9}\right)\right\}^{1/2}=3\left(1-\frac{2}{9}\right)^{1/2}$

$$=3\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{9}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\left(-\frac{2}{9}\right)^3-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\left(-\frac{2}{9}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=3\left\{1-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot9^2}-\frac{1}{2\cdot9^3}-\frac{5}{8\cdot9^4}-\cdots\right\}$$

$=3(1-0.11805\cdots)\approx3\times0.88195$

≈2.6458(不足近似值).

(2) $\sqrt{99}=\sqrt{100-1}=10\sqrt{1-\frac{1}{100}}=10\left(1-\frac{1}{100}\right)^{1/2}$

$$=10\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{100}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\right\}$$

$=10(1-0.005-0.0000125-\cdots)$

≈9.949875(不足近似值).

(3) $\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}$

$$=3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{9^3}-\frac{10}{243}\cdot\frac{1}{9^4}+\cdots\right)$$

$$=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}+\frac{5}{19683}-\frac{10}{531441}+\cdots$$

$$\approx 3+0.1111111-0.0041152+0.0002540-0.0000188+\cdots$$

$$\approx 3.10723.$$

【系】1. 当 n 是正整数且 $|x|<1$ 时，

$$(1-x)^{-n}=1+H_n^1x+H_n^2x^2+\cdots+H_n^rx^r+\cdots$$

其中 $$H_n^r=\frac{n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!}.$$

证明 根据【定理】5，由于 $|x|<1$，所以

$$(1-x)^{-n}=1+\binom{-n}{1}(-x)+\binom{-n}{2}(-x)^2+\cdots+\binom{-n}{r}(-x)^r+\cdots$$

其中 $$\binom{-n}{r}(-x)^r=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-1)^rx^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r=H_n^rx^r.$$

因而【系】1 成立. □

【系】2. 若 n 是正整数，$|x|<1$，则

$$(1+x)^{-n}=1-H_n^1x+H_n^2x^2-\cdots+(-1)^rH_n^rx^r+\cdots$$

其中 H_n^r 如【系】1 所示.

证明 在【系】1 中，将 x 取为 $(-x)$，即知【系】2 成立. □

3·4 多项式定理

【定理】6.（多项式定理） 当 n 是正整数时，m 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的和的 n 次幂是

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}.$$

其中 $\sum$ 表示对于满足 $p_1+p_2+\cdots+p_m=n$ 且 $p_1\geqslant 0, p_2\geqslant 0, \cdots, p_m\geqslant 0$ 的整数组 $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 的一切值求和.

证明 $(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_m)(a_1+a_2+\cdots+a_m)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_m).$$

把上式右端展开后，显然只是形式为 $a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}$ 的项的和. 这就是从

上式右端的 n 个因式中，取 p_1 个 a_1，取 p_2 个 a_2，…，取 p_m 个 a_m，总共取出了 n 个，再把它们排在一起．然后，根据 1.2 的【定理】4，其个数是

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}，因而$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}.$$

由 1.2 的【定理】4 知其中 Σ 必须是对满足 $p_1+p_2+\cdots+p_m=n$ 及 $p_1\geqslant0$，$p_2\geqslant0,\cdots$，$p_m\geqslant0$ 的一切整数求和． □

另证 1° 当 $m=2$ 时，根据二项式定理

$$(a_1+a_2)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a_1^p a_2^{n-p}=\sum\frac{n!}{p_1!p_2!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}.$$

其中 Σ 表示对满足 $p_1\geqslant0$，$p_2\geqslant0$，且使 $p_1+p_2=n$ 的一切整数组 (p_1,p_2) 求和．从而，当 $m=2$ 时，定理成立．

2° 假定左端的项数为 m 时定理成立，现在证明项数为 $m+1$ 时定理也成立．由二项式定理，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1})^n=\{(a_1+a_2+\cdots+a_m)+a_{m+1}\}^n$$

$$=\sum_1\frac{n!}{n'!p_{m+1}!}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^{n'}a_{m+1}^{p_{m+1}}.$$

由于对 m 项定理成立，故

$$上式=\sum_1\frac{n!}{n'!p_{m+1}!}\left(\sum_2\frac{n'!}{p_1!p_2!\cdots p_m!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}\right)a_{m+1}^{p_{m+1}}$$

$$=\sum_1\sum_2\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_m!p_{m+1}!}a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_m^{p_m}a_{m+1}^{p_{m+1}}.$$

其中 Σ_1 表示对于满足 $n'\geqslant0$，$p_{m+1}\geqslant0$，$n'+p_{m+1}=n$ 的一切整数组 (n',p_{m+1}) 求和，Σ_2 表示对于固定的 n'，满足 $p_1\geqslant0,p_2\geqslant0,\cdots$，$p_m\geqslant0$，$p_1+p_2+\cdots+p_m=n'$ 的一切整数组 $(p_1,p_2,\cdots p_m)$ 求和，这时，二重和 $\Sigma_1\Sigma_2$ 显然表示对于满足 $p_1\geqslant0,p_2\geqslant0,\cdots$，$p_m\geqslant0,p_{m+1}\geqslant0,p_1+p_2+\cdots+p_m+p_{m+1}=n$ 的一切整数组 $(p_1,p_2,\cdots,p_m,p_{m+1})$ 求和，从而我们证明了，如项数为 m 时定理成立，则项数为 $m+1$ 时定理也成立．多项式定理得证． □

例题 在 $(a+b+c+d)^8$ 的展开式中，求含有 $a^3b^2c^2d$ 的一项的系数．

解 根据多项式定理，有

$$(a+b+c+d)^8=\sum\frac{8!}{p!q!r!s!}a^pb^qc^rd^s.$$

对于 $a^3b^2c^2d$ 的系数，由于这时 $p=3$，$q=2$，$r=2$，$s=1$，故得

$$\frac{8!}{3!2!2!1!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=5\cdot6\cdot7\cdot8=1680.$$

【系】 若 m，n 是正整数，则 $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m)^n$

$$\sum\frac{n!}{p_0!p_1!p_2!\cdots p_m!}a_0^{p_0}a_1^{p_1}\cdots a_m^{p_m}x^{p_1+2p_2+\cdots+mp_m}.$$

其中 Σ 表示对于满足 $p_0+p_1+p_2+\cdots+p_m=n$，$p_0\geqslant0,p_1\geqslant0,\cdots,p_m\geqslant0$ 的一切整数组 $(p_0,p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 求和.

证明 由【定理】6显然. □

例题1. 试求在 $(3-2x+x^2-5x^3)^4$ 的展式中含 x^7 的项的系数.

解 由上面的【系】，得

$$(3-2x+x^2-5x^3)^4=\sum\frac{4!}{p!q!r!s!}3^p(-2)^q(-5)^sx^{q+2r+3s},$$

$$p+q+r+s=4,\quad q+2r+3s=7.$$

当 $p=0$ 时，$q+r+s=4$，$q+2r+3s=7$，

$$\therefore\quad r+2s=3.$$

若 $s=0$，则 $r=3$，$q=1$，$p=0$.

若 $s=1$，则 $r=1$，$q=2$，$p=0$.

当 $p=1$ 时，$q+r+s=3$，$q+2r+3s=7$，

$$\therefore\quad r+2s=4.$$

若 $s=1$，则 $r=2$，$q=0$，$p=1$.

若 $s=2$，则 $r=0$，$q=1$，$p=1$.

当 $p\geqslant2$ 时，不能得到满足上式的 q、r、s，因此 x^7 的系数只有上列四种情形，故为

$$\frac{4!}{3!}(-2)+\frac{4!}{2!}(-2)^2(-5)+\frac{4!}{2!}3(-5)+\frac{4!}{2!}3(-2)(-5)^2$$

$$=-8-240-180-1800=-2228.$$

例题2. 试求在 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$ 的展开式中含 x^{10} 的项的系数.

解 $1+x+x^2+x^3+x^4=\dfrac{1-x^5}{1-x}$，

$$\therefore\quad(1+x+x^2+x^3+x^4)^5=(1-x^5)^5(1-x)^{-5}.$$

假设 $|x|<1$，这不会影响展开式的结果，因此由 3.3的【定理】5 及其【系】1，有

$$(1-x^5)^5(1-x)^{-5}=(1-C_5^1x^5+C_5^2x^{10}-\cdots)$$

$$\cdot(1+H_5^1x+H_5^2x^2+\cdots+H_5^5x^5+\cdots+H_5^{10}x^{10}+\cdots).$$

在这个展开式中 x^{10} 的系数是

$$H_5^{10}-C_5^1\cdot H_5^5+C_5^2=1001-5\times126+10=381.$$

注意　在上例中如果用【定理】6 的［系］来求系数，无疑是可以的．但在这里，利用了 3.3 的【定理】5［系］1 求系数的方法，一般说，这个方法简单些，但这时必须事先说明 $|x|<1$，虽然这对于展开后的结果并无影响．

第九章　数列和级数

§1.　数列的定义

1·1　定义和例

在本章中，除了§10以外，均讨论实数.

【定义】1.　数列·项　根据一定的规则排成的一列数(有限个或无限个)叫做数列，它的每一个数叫做数列的项．从最初项起，依次叫做第一项(首项),第二项，…，第 n 项．

【定义】1′.　数列的另一定义　以自然数集合作定义域，实数集合作值域的单值函数，叫做数列*

例1. 把 $\pi=3.1415926535\cdots$ 的各个数字按它们所在位置的顺序排列时，成一数列．因为只要有必要，即使 n 很大，也能求出第 n 个数字来．

例2. 从一个乱数表中随意抽取一些数作成排列，例如

0,3,9,9,11,0,4,6,1,9,3,7,…

这些数的排列不叫数列，因为不能按其项的序号来确定相应的值.

注意　从0到9的数字中随意抽出一些数作成的排列叫做乱数表．在乱数表中，没有某数字特别容易出现或特别不容易出现的情况，也没有在某数字后面必须出现另一个数字的情况．

【定义】2.　一般项　数列的第 n 项由 n 按某种计算法则或公式来表示，叫做通项或一般项．

【定义】3.　有限数列．无穷数列　项数有限的数列叫做有限数列．项数无限的数列叫做无穷数列(或无限数列).

---

* 严格地说，是这个单值函数当自变量依次取自然数时相应的一系列排成行的函数值．——译注

【定义】4.　$\{a_n\}$. $\sum_{n=1}^{k} a_n$　无穷数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 用记号 $\{a_n\}$ 表示；有限数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, a_k$ 的和用 $\sum_{n=1}^{k} a_n$ 表示.

【定义】5. 前 n 项和　数列的最初 n 项的和叫做前 n 项和.

【公式】　设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则有

$$a_n = S_n - S_{n-1} (n \geqslant 2).$$

证明　$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$,

$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$.

$\therefore \quad a_n = S_n - S_{n-1}$. □

1·2　单调数列

【定义】6. 单调增加数列. 单调减少数列. 单调数列　数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，若满足条件 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n < \cdots$，则叫做单调增加数列；若满足条件 $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_{n-1} > a_n > \cdots$，则叫做单调减少数列. 这两种数列统称单调数列.

注意　在【定义】6 中，若用符号 $\leqslant$ 代替不等号 $<$，用 $\geqslant$ 代替 $>$，则所得的数列，分别叫做广义单调增加数列，广义单调减少数列.

1·3　有界数列

【定义】7. 有上(下)界的数列. 有界数列　当数列的所有各项不大于某一常数时，这样的数列叫做是有上界的；所有各项不小于某一常数时，这样的数列叫做是有下界的. 既有上界又有下界的数列叫做有界数列.

例1. 有限数列是有界数列，无界的数列是无穷数列.

例2. 自然数列 $\{n\}$ 没有上界，但有下界.

§2. 等差数列

2·1　等差数列

【定义】1. 等差数列. 公差　在数列 $\{a_n\}$ 中，当对于一切的 $n(n \geqslant 2)$，$a_n - a_{n-1}$ 等于常数 d 时，这个数列叫做等差数列，d 叫做公差.

【公式】1. 设 u_n 是首项为 a，公差为 d 的等差数列的第 n 项(通项)，S_n 是前 n 项和，这时

(1) $u_n=a+(n-1)d$;

(2) $S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n(a+u_n)}{2}$.

证明 (1) $u_1=a$, $u_2-u_1=d$, $u_3-u_2=d$, $\cdots$, $u_n-u_{n-1}=d$. 把这些等式两端各自相加便得

$$u_n=a+(n-1)d.$$

(2) $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$,

$S_n=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+\cdots+u_1$,

$$\therefore\quad 2S_n=(u_1+u_n)+(u_2+u_{n-1})+\cdots+(u_n+u_1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(u_k+u_{n+1-k}).$$

其中 $u_k+u_{n+1-k}=a+(k-1)d+a+(n-k)d$
$=2a+(n-1)d$,

$$\therefore\quad 2S_n=n\{2a+(n-1)d\}.$$

由此便得结论. □

2·2 等差中项，相加平均

【定义】2. 等差中项 设在两个数 a, b 之间插入一个数 x,当三个数 a,x,b 构成等差数列时，x 叫做 a 和 b 的等差中项，当在两个数 a,b 之间插入 n 个数 $x_1,x_2\cdots,,x_n$ 后所组成的数列 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$ 是等差数列时，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 叫做 a 和 b 之间的 n 个等差中项.

【定义】3. 相加平均.算术平均 等差中项叫做两个数的相加平均或算术平均.

【公式】2. 设 A 为两个数 a,b 的等差中项,

则 $$A=\frac{a+b}{2}.$$

2·3 调和数列·调和中项·调和平均

【定义】4. 调和数列 数列各项的倒数组成等差数列时，原数列叫做调和数列.

【定义】5. 调和中项.调和平均, 设在两个数 a,b 之间插入 x.当三个数 a,x,b 构成调和数列时，x 叫做 a 和 b 的调和中项或调和平均.

【公式】3. 当 $\{a_n\}$ 是调和数列时，有

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k-1}}\right).(k\geqslant 2)$$

证明　根据【定义】4 和【公式】1(1)得证.　□

【公式】4. 设 H 是两个数 a,b 的调和中项，

则　$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

证明　根据【定义】5 立即得证.　□

§3.　等比数列

3·1　等比数列

【定义】1. 等比数列. 公比　在数列 $\{a_n\}$ 中，当对于一切的 $n(n\geqslant 2)$，比值 $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ 是一常数 r 时，这个数列叫做等比数列，r 叫做它的公比.

【公式】1. 设 u_n 是首项为 a，公比为 r 的等比数列的通项，则

$$u_n=ar^{n-1}.$$

证明　根据 $u_1=a$，$u_2=u_1r$，$u_3=u_2r$，…，$u_n=u_{n-1}r$ 可得证.　□

【公式】2. 设 S_n 是首项为 a，公比为 r 的等比数列的前 n 项和，则

(1)　当 $r\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$；

(2)　当 $r=1$ 时，$S_n=na$.

证明　(1)　当 $r\neq 1$ 时，

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1},\qquad ①$$

$$\therefore\quad rS_n=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n.\qquad ②$$

①—②　$(1-r)S_n=a-ar^n=a(1-r^n)$，

由于 $r\neq 1$，故　$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

(2)　当 $r=1$ 时，由于各项都等于 a，故 $S_n=an$.　□

3·2　等比中项·几何平均

【定义】2. 等比中项　在两个数 a,b 之间插入数 x. 当三个数 a,x,b 构成等比数列时，x 叫做 a 和 b 的等比中项，当在两个数 a,b 之间插入 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 后所组成的数列 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$ 是等比数列时，x_1，x_2，…，x_n 叫做 a 和 b 之间的 n 个等比中项.

【定义】3. 几何平均(相乘平均) 两个正数 a,b 的正的等比中项叫做 a 和 b 的几何平均(或相乘平均).

【公式】3. 设 G 是两个正数 a,b 的等比中项，则

$$G^2=ab, G=\pm\sqrt{ab}.$$

证明 由【定义】2 可证. □

3·3 各种平均值之间的关系

【定理】1. 设 A,G,H 分别是两个正数 a, $b(a\leqslant b)$ 的算术平均、几何平均和调和平均，则

(1) $G^2=AH$;

(2) $a\leqslant H\leqslant G\leqslant A\leqslant b$(等号仅在 $a=b$ 时成立).

证明 (1) $G^2=ab$, $AH=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{2ab}{a+b}=ab$,

$$\therefore\quad G^2=AH.$$

(2) $b-A=\dfrac{b-a}{2}\geqslant 0$,

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,$$

$$G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0,$$

$$H-a=\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{a(b-a)}{a+b}\geqslant 0$$

根据以上各式便得结论. □

3·4 累积金和分期付款

【定义】4. 单利法. 复利法 本金恒定的利息计算方法叫做单利法. 某期期满后将本和利合计作为下期的本金，这样的利息计算方法叫做复利法.

【公式】4. 设本金为 P, 利率为 r, 利息为 I, 期数为 n, 本利合计为 S_n, 这时有

单利法……$I=P^{rn}$, $S_n=P(1+rn)$.

复利法……$S_n=P(1+r)^n$, $I=S_n-P=P\{(1+r)^n-1\}$.

证明 单利法的公式由【定义】4 可得.

在复利法的情形下，$S_1=P(1+r)$.

现假定 $S_k=P(1+r)^k$，这时因 S_k 是下一期本金，故

$$S_{k+1}=S_k(1+r)=P(1+r)^{k+1}.$$

因而，根据数学归纳法，$S_n=P(1+r)^n$ 对于一切的自然数 n 都成立。 □

【定义】5．累积贮金．期首付款．期末付款 每期储蓄一定金额的储金叫做累积储金．在每期开始时储存的金额叫做期首付款，在期末贮存的金额叫做期末付款．

【公式】5． 设每期的积存金额为 a，一期的利率为 r，期数为 n，存款的本利合计为 S，这时有

$$\text{单利法}\begin{cases}\text{期首付款}\cdots\cdots S=an\left\{1+\dfrac{(n+1)r}{2}\right\}.\\ \text{期末付款}\cdots\cdots S=an\left\{1+\dfrac{(n-1)}{2}r\right\}.\end{cases}$$

$$\text{复利法}\begin{cases}\text{期首付款}\cdots\cdots S=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}\cdot(1+r),\\ \text{期末付款}\cdots\cdots S=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}.\end{cases}$$

证明 设 u_k 为所积存金额 a 在第 k 期期末的本利合计．

在单利期首付款时，根据【公式】4 有

$$u_k=a\{1+r(n-k+1)\},$$

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}a\{1+r(n-k+1)\}.$$

如果运用 § 4.【公式】1 和 2，则

$$S=\sum_{k=1}^{n}a\{1+r(n+1)\}-ar\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=an\left\{1+\frac{(n+1)r}{2}\right\}.$$

在单利期末付款时，根据【公式】4 有

$$u_k=a\{1+r(n-k)\},$$

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}a\{1+r(n-k)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a\{1+rn\}-ar\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=an\left\{1+\frac{(n-1)r}{2}\right\}.$$

在复利期首付款时，根据【公式】4 有

$$u_k=a(1+r)^{n-k+1},$$

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}a(1+r)^{n-k+1}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}\cdot(1+r).$$

在复利期末付款时，根据[公式]4，有

$$u_k=a(1+r)^{n-k},$$

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}a(1+r)^{n-k}$$

$$=\frac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$$

□

【定义】6. 分期偿还 每期归还一定金额的债款，一定时期后偿还全部债款，这叫做分期偿还.

【公式】6. 设债款为 A，每一期的分期付款为 x，期数为 n，每一期的利率为 r，这时有

单利法：

期首付款……$x=\dfrac{A(1+rn)}{n\left(1+\frac{n+1}{2}\cdot r\right)}$，

期末付款……$x=\dfrac{A(1+rn)}{n\left(1+\frac{n-1}{2}\right)\cdot r}$.

复利法：

期首付款……$x=\dfrac{Ar(1+r)^{n-1}}{(1+r)^n-1}$，

期末付款……$x=\dfrac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$.

其中，在复利法下，设分期付款额支付和利息转入的时间是一致的.

证明 当每期积存分期付款 x 时，最终期末的本利合计可以等于本金 A 的最终期末的本利合计，因此根据[公式]4和 5，有

在单利期首付款时 $xn\left\{1+\dfrac{(n+1)r}{2}\right\}=A(1+rn)$，

在单利期末付款时　$xn\left\{1+\frac{(n-1)r}{2}\right\}=A(1+rn)$,

在复利期首付款时　$\frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}(1+r)=A(1+r)^n$,

在复利期末付款时　$\frac{x\{(1+r)^n-1\}}{r}=A(1+r)^n$,

由以上各等式便可分别得出结论. □

§4. 各种数列的和

4·1　乘幂数列的和

【公式】1. (1)　$\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$

(同取正号或同取负号);

(2)　$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$　(c 是与 k 无关的常数).

证明　由记号Σ的定义可直接得证. □

【公式】2. (1)　$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$;

(2)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

证明　(1)　这是首项为1,公差为1的等差数列的前n项和. 故由§2.【公式】1便得结论.

(2)　$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3$

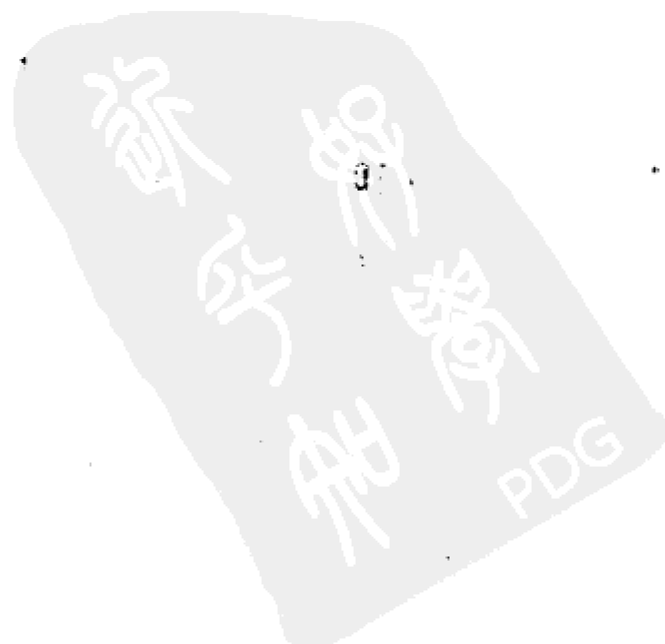
依次用1, 2, 3,…,n代替上述恒等式中的x时, 有

$2^3=1+3\cdot1+3\cdot1^2+1^3$,

$3^3=1+3\cdot2+3\cdot2^2+2^3$,

…………………………,

$(n+1)^3=1+3\cdot n+3\cdot n^2+n^3$.



把上列n个等式两端分别相加, 便得

$$(n+1)^3=n+3\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}k^2+1^3,$$

$$\therefore\quad 3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-n-1-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

(3) $(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$,

依次用 $1,2,3,\cdots,n$ 代替上式中的 x，再把所得到的 n 个等式两端分别相加，得

$$(n+1)^4=n+4\sum_{k=1}^{n}k+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k^3+1^4,$$

$$\therefore\quad 4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1$$

$$=n^2(n+1)^2.$$

由此便得结论. □

【定理】1. 设 r 是正整数，$S_r=\sum_{k=1}^{n}k^r$，则 S_r 可用 $S_1,S_2,\cdots,S_{r-1}$ 的整式来表示.

证明 根据二项式定理.

$$(x+1)^{r+1}=x^{r+1}+C_{r+1}^{1}x^{r}+C_{r+1}^{2}x^{r-1}+\cdots+C_{r+1}^{r}x+1.$$

依次用 $1,2,\cdots,n$ 代替上述恒等式中的 x，再把所得到的 n 个等式两端分别相加，得

$$(n+1)^{r+1}=1+C_{r+1}^{1}S_r+C_{r+1}^{2}S_{r-1}+C_{r+1}^{3}S_{r-2}+\cdots+C_{r+1}^{r}S_1+n.$$

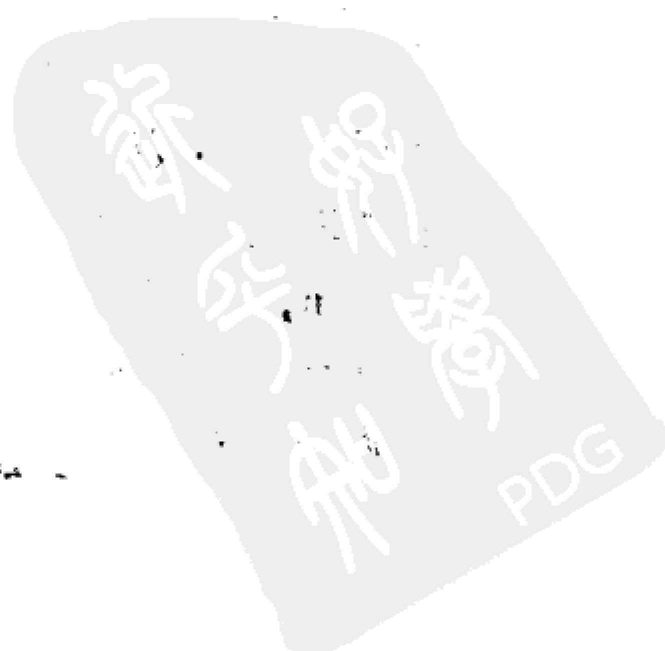
因而 S_r 可用 $S_1,S_2,\cdots,S_{r-1}$ 的整式来表示. □

例题1. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$.

解 $$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$



另解　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

例题2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\dots+n(n+1)(n+2)$.

解　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+n(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

另解　$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

注意　例题1,2的另解方法普遍成立，其公式如下。

【公式】3. $\sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{l=0}^{m-1}(k+l)\right\}$

$$=\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{l=0}^{m}(k+l)-\prod_{l=-1}^{m-1}(k+l)\right\}$$

$$=\frac{1}{m+1}\prod_{l=0}^{m}(n+l).$$

(证明略).

4·2　差分数列

【定义】1. 差分数列．第二差分数列　设有数列 $\{a_n\}$.这时，对于一切正整数 n，以 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$ 作为通项所构成的数列 $\{\Delta a_n\}$，叫做原数列的第一差分数列，而以 $\Delta^2a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n$ 作为通项所构成的数列 $\{\Delta^2a_n\}$ 叫做原数列的第二差分数列。

【公式】4. 设 $\{\Delta a_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第一差分数列，$\{\Delta^2 a_n\}$ 是第二差分数列．这时有

(1) $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$，$\Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$；

(2) $a_n = a_1 + (\Delta a_1 + \Delta a_2 + \cdots + \Delta a_{n-1}) = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \Delta a_k$

$$\Delta a_n = \Delta a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta^2 a_k.$$

证明 (1) 由【定义】1 可证．

(2)
$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$
$$= a_1 + \Delta a_1 + \Delta a_2 + \Delta a_3 + \cdots + \Delta a_{n-1},$$
$$\Delta a_n = \Delta a_1 + (\Delta a_2 - \Delta a_1) + (\Delta a_3 - \Delta a_2) + \cdots + (\Delta a_n - a_{n-1})$$
$$= \Delta a_1 + \Delta^2 a_1 + \Delta^2 a_2 + \cdots + \Delta^2 a_{n-1}.$$ □

4·3 通项是 n 的整式的数列

【公式】5. 对于数列 $\{a_n\}$，当 $a_n = n(k$ 是自然数$)$时，差分数列的通项是

$$\Delta a_n = (n+1)^k - n^k$$
$$= \sum_{k=0}^{k-1} C_k^j n^j \cdots\cdots n \text{ 的}(k-1)\text{次整式}.$$

证明 由【定义】1 可证． □

【定义】2．高阶差分数列 设 $\{\Delta^{k-1} a_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第 $k-1$ 阶差分数列．这时，以$\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n$ 作为通项的数列 $\{\Delta^k a_n\}$，叫做原数列的第 k 阶差分数列．第三阶及三阶以上的差分数列叫做高阶差分数列．

【定理】2. 当数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 是 n 的 k 次整式时，如果整数 r 满足 $k \geqslant r \geqslant 0$，则第 r 阶差分数列的通项 $\Delta^r a_n$ 是 n 的 $(k-r)$ 次整式．

证明 根据[公式]5，每当组成差分数列时 n 的次数减低一次，因而第 r 阶差分数列的通项，比原数列的通项降低 r 次，即为 n 的 $(k-r)$ 次整式．

【定理】3. 当数列 $\{a_n\}$ 的第 r 阶差分数列是常数列 $\{b\}$ (b 是与 n 无关的一个常数)时，a_n 是 n 的 r 次整式．

证明 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 是 n 的 x 阶整式，则根据【定理】2，第 r 阶差分数列的通项是 n 的 $x-r$ 阶差式．由于常数 b 是 0 阶整式，

故 $x - r = 0$，$\therefore\ x = r$． □

【系】 差分数列是常数列 $\{b\}$ 时，该数列是等差数列．

证明 根据【定义】1，这个数列是以 b 作公差的等差数列． □

4·4　分数项数列

例题1. (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}$;

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$;

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}.$$

证明 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}.$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}$$

□

例题2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{n+1}-1.$

证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\sqrt{n+1}-1.$$

□

例题3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}.$

证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{(k+2)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

□

4·5　$\sum a_nx^n$（a_n 是等差数列）．

例题1.

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

其中设 $x\neq1$．

证明　令 $S=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$，则

$$xS=\quad x+2x^2+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n;$$

---

* 在这里的三个例题的解法有一个共同点，就是把 $\sum_{k=1}^{n}a_K$ 表示成 $\sum_{K=1}^{n}(b_K-b_{K+1})$ 的形式，即是使 $a_K=-b_k$，这时和式 $\sum_{K=1}^{n}(b_K-b_{K+1})$ 显然为 b_1-b_{n+1}．——译注

将两式相减，由于 $x\neq1$，故得

$$(1-x)S=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x},$$

$$\therefore\quad S=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$ □

例题2. 若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a，公差为 d 的等差数列，则当 $x\neq1$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx^{k-1}=\frac{a_1-a_nx^n}{1-x}+\frac{dx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}.$$

证明　令 $S=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$，

则　$xS=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$.

将两式相减，由于 $a_k-a_{k-1}=d\quad(k=1,2\cdots)$，

故　$(1-x)S=a_1+d(x+x^2+\cdots+x^{n-1})-a_nx^n$

$$=a_1+\frac{d(1-x^{n-1})x}{1-x}-a_nx^n.$$

由于 $x\neq1$，故

$$\sum_{k=1}^{n}a_kx^{k-1}=\frac{a_1-a_nx^n}{1-x}+\frac{dx(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}.$$

4·6　二重数列与相似形

【定义】3. 二重数列　具有两个下标的数列叫做二重数列.

【定义】3′. 二重数列的另一定义　设 N 为自然数集合. 这时，以直接积* N×N 作为定义域，以数的集合作为值域的单值函数列，叫做二重数列，或形象地说，在坐标纸第一象限的格点(x、y 坐标均为正整数的点) 上定义的单值函数列叫做二重数列.

例1. 通项为 $a_{mn}=\frac{n}{m}$ 的数列如第一表所示，(表中的行序号为 m，列序号为 n).

例2. 通项为 $a_{mn}=\frac{n}{m}$(其中 m、n 是满足 $1\leqslant n\leqslant m$ 的整数)的数列，见第二表.

* 集合 $A=\{a_h\}$, $B=\{b_k\}$的直接积是指集合$\{(a_h,b_k)|a_h\in A,b_k\in B\}$，记作 $A\times B$. ——译注

第一表

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \cdots$$
$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{2},\ \cdots$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \cdots$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \cdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

第二表

$$\frac{1}{1},$$
$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2},$$
$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},$$
$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

例3. a_{mn} 为第三表中位于第 m 行、第 n 列的数时，所成数列见第三表.

例4. a_{mn} 为第四表中位于第 m 行、第 n 列的数时，所成数列见第四表.

第三表

1,2,4,7,11,16,…
3,5,8,12,17,23…
6,9,13,18,24,31,…
10,14,19,25,32,40,…
15,20,26,33,41,50,…
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

第四表

1,2,5,10,17,…
4,3,6,11,18,…
9,8,7,12,19,…
16,15,14,13,20,…
25,24,23,22,21,…
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

例题1. 在上两例中 a_{mn} 的表示法：

在例 3 中，$a_{mn}=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m$，

在例 4 中，当 $m\geqslant n$ 时，$a_{mn}=m^2-(n-1)$

当 $m<n$ 时，$a_{mn}=(n-1)^2+m$.

证明 在例 3 中，第三表的数对应于下列形式：

1	2	3	4	5	6	7	8	…
a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{13}	a_{22}	a_{31}	a_{14}	a_{23}	…

当把它按上表那样分段时，各段内的 $m+n$ 不变而 a_{mn} 依次变为 2,3,4,…，故 a_{mn} 位于第 $m+n-1$ 段的第 m 号．由于从最初到第 $m+n-2$ 段的数的个数是

$$1+2+3+\cdots+(m+n-2)=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1),$$

故　　$a_{mn}=\frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m.$

在例 4中，第 n 列的数字，从上到下依次是$(n-1)^2+1,(n-1)^2+2,\cdots$；第 m 行的数字，从左到右依次是 m^2，m^2-1，$m^2-2,\cdots$，因此 a_{mn} 变为结论所示的式子． □

注意　由于第一象限内的全体格点的集合是可数的，因此适当选择项的顺序，二重数列可视为单一数列．在例题 1 中证明例 3 时使用的自然数和 a_{mn} 的对应表就是一例．

又把单一数列适当地分段处理有方便之处(在例 3 的证明中，分段处理的结果导致自然数列)．有时称为分段数列．在分段数列中，如果把段的番号取为第一足标，把在每段内的各项的番号取为第二足标，这时便可视为二重数列．下面列举三个分段数列的例子．

例5． $(1)(2,3)(4,5,6)(7,8,9,10)(11,\cdots$

试与第三表比较．

例6． $(1)(2,3,4)(5,6,7,8,9)(10,\cdots,16)(\cdots$

试与第四表比较．

例7． $\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}\right)\left(\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4}\right)\cdots$

试与第二表比较

下面举出二重数列求和问题的两个典型例子．

例题2． 第五表中 n^2 个数的和是 n^3．

第五表

$$\begin{array}{l}1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\\ 2,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ n+1,\\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n+2,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1.\end{array}$$

证明　第 k 行的 n 个数的和是

$$\sum_{i=1}^{n}(k+i-1)=nk+\frac{n(n-1)}{2}.$$

因为对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一切行，上式都成立，故 n^2 个数的和是

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{nk+\frac{n(n-1)}{2}\right\}=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n-1)}{2}=n^3.$$ □

例题3. 把$(2n+1)^2$个数排成$(2n+1)$行和$(2n+1)$列的正方形．第一行构成等差数列(首项a，公差d)，各列都是公比为r的等比数列．这$(2n+1)^2$个数的和S是

当$r\neq1$时，$S=(2n+1)(a+nd)\dfrac{1-r^{2n+1}}{1-r}$，

当$r=1$时，$S=(2n+1)^2(a+nd)$．

证明　第k行的数是首项ar^{k-1}、公差dr^{k-1}的等差数列，故其和为

$$S_k=\frac{(2n+1)}{2}\cdot\{2ar^{k-1}+2ndr^{k-1}\}$$

$$=(2n+1)(a+nd)r^{k-1}.$$

由于上式对于$k=1, 2, \cdots, 2n+1$的一切k都成立，故所求的和为

$$S=\sum_{k=1}^{2n+1}S_k=\sum_{k=1}^{2n+1}(2n+1)(a+nd)r^{k-1}$$

$$=(2n+1)(a+nd)\sum_{k=1}^{2n+1}r^{k-1}.$$

因而，当$r\neq1$时，$S=(2n+1)(a+nd)\dfrac{1-r^{2n+1}}{1-r}$，

当$r=1$时，$S=(2n+1)^2(a+nd)$．　□

§5　数学归纳法

5·1　归纳公理

定义自然数的下列公理体系，是有名的皮亚诺(1858—1932)公理．

【定义】1．自然数　当集合N满足下列五个公理时，这个集合的元素叫做自然数．

【公理】1． 在N中含有称为1的元素．

【公理】2． 对N的各个元素x，其后继元素(记为x')只有一个．

【公理】3． 若$x\in N$，则$x'\neq1$．

【公理】4． 若$x'=y'$，则$x=y$．

【公理】5． 设M是N的子集合，且(1)　$M\ni1$；(2)　如果$M\ni x$就有$M\ni x'$，那么$N\subset M$($\therefore M=N$)．

注意　【公理】5是数学归纳法的理论根据，因而叫做归纳公理，从【定义】1的公理体系可导出自然数的一切性质．

5·2　数学归纳法

【定义】2．数学归纳法　设对于自然数 n 的某命题 $P(n)$ 已证明下列两条成立：

(1)　$P(1)$ 真；

(2)　若 $P(n)$ 真，则 $P(n+1)$ 也真．这时，令 M 代表使 $P(n)$ 为真的一切 n 的集合．根据[公理]5，M 包含一切自然数，故可推断 $P(n)$ 对于一切自然数 n 都是真的．这个推断叫做数学归纳法或完全归纳法．

例题1． 运用数学归纳法证明．

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{①}$$

证明　(甲)　令 $n=1$，则①式的左端是 $1^2=1$，右端是 $\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$，故等式①在 $n=1$ 时成立．

(乙)　假设 n 等于某个正整数 r 时等式①成立，则

$$\sum_{k=1}^{r} k^2=\frac{1}{6}r(r+1)(2r+1). \tag{②}$$

在上式两端再加上 $(r+1)^2$，得

$$\sum_{k=1}^{r+1} k^2=\frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)+(r+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(r+1)\ \{r(2r+1)+6(r+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(r+1)(r+2)\ \{2(r+1)+1\}\ .$$

因而，等式①在 $n=r+1$ 时也成立．

(丙)　设命题 $P(n)$ 表示等式①成立，则根据(甲)、(乙)款，可证明 $P(n)$ 满足【定义】2 的两个条件(1)、(2)，因此根据归纳公理，等式①对于一切自然数成立．

注意　在数学归纳法中，也可以用下列的[甲]、[乙]、[丙]三种等价形式之一代替【定义】2的方式．

【甲】　设对于自然数 n 的某命题 $P(n)$，已证明下列两条成立：

(1)　$P(1)$ 真．

(2)　若 $P(1)$，$P(2)$，…，$P(n)$ 真，则 $P(n+1)$ 也真．

这时，对于一切的自然数 n，$P(n)$ 真．

【乙】 设对于自然数的某命题 $P(n)$，已证明下列两条成立：

(1) $P(r)$真(r是自然数).

(2) 若取任意自然数 k，使 $k \geqslant r$ 时 $P(k)$真，则 $P(k+1)$也真.

这时，对于 $n \geqslant r$ 的一切自然数 n，$P(n)$真.

【丙】 设对于自然数 n 的某命题 $P(n)$，可证明下列两条成立：

(1) $P(r)$真(r是自然数).

(2) 若取满足 $k \geqslant r$ 的任意自然数 k 时，$P(r)$，$P(r+1)$，…，$P(k)$真，则 $P(k+1)$也真.

这时，对于 $n \geqslant r$ 的一切自然数 n，$P(n)$真.

例题2. 设 $f(0)=1$，且对于一切自然数 n，下式成立.

$$f(n)=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1). \quad ①$$

这时，试用数学归纳法[甲]证明

$$f(n)=2^{n-1}. \quad ②$$

证明 (1) 由①式得 $f(1)=f(0)=1=2^0$，

因而等式②在 $n=1$ 时成立.

(2) 假定对于 $n=1, 2, \cdots, k-1$，等式②恒成立，则

$$\begin{aligned} f(k)&=f(0)+f(1)+\cdots+f(k-1)\\ &=1+2^0+2+\cdots+2^{k-2}\\ &=1+\frac{1-2^{k-1}}{1-2}=2^{k-1}. \end{aligned}$$

也就是说，在 $n=k$ 时等式②也成立. 由于(1)、(2)两个条件都被满足，故对于一切正整数等式②成立. □

例题3. 设 n 是大于或等于 3 的自然数，这时，试根据数学归纳法[乙]证明下列不等式成立.

$$2^n>2n+1 \ (n \geqslant 3). \quad ①$$

注意 当 $n=2$时，不等式①不成立.

证明 (1) $2^3=8>2\cdot 3+1$，因而不等式①在 $n=3$ 时成立.

(2) 设 k 是大于 3 的任意自然数，这时假定不等式①对于 $n=k$ 成立，即

$$2^k>2k+1. \quad ②$$

但是 $$2^k>2, \quad ③$$

因此将②，③式两端分别相加，得

$$2^k+2^k>2k+3,$$

$\therefore\quad 2^{k+1}>2(k+1)+1.$

亦即不等式①在 $n=k+1$ 时也成立.

由于满足(1)和(2)两个条件，所以对大于 2 的一切整数 n，不等式①成立. □

§6. 数列的收敛. 发散

6·1 数列收敛、发散的定义

【定义】1. 数列的极限. 收敛 设有数列 $\{a_n\}$ 和一常数 A. 当任给正数 ε 时，若与此对应地可以选择*适当的自然数 N，使得对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，$|a_n-A|<\varepsilon$ 成立，则 A 叫做 $\{a_n\}$ 的极限(值)，采用记号

$$\lim_{n\to\infty} a_n=A$$

或简单地写成：$n\to\infty$ 时，$a_n\to A$.

当数列具有极限值时，就说这个数列收敛.

【定义】2. 正无穷大. 负无穷大 假设对于任意给定的正(负)数 G，与此对应地存在适当的自然数 N，使得对于满足 $n>N$ 的一切整数，$a_n>G$ ($a_n<G$)成立，这时就说数列 $\{a_n\}$ 趋于正(负)无穷大，采用记号

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad (\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty),$$

或简单地写成：$n\to\infty$ 时，$a_n\to\infty$ ($a_n\to-\infty$)，

【定义】3. 数列的发散. 振动 当数列趋于正或负的无穷大时，就说这个数列是(狭义)发散的. 既不收敛也不狭义发散的数列叫做振动的. 不收敛的数列叫做(广义)发散的. 如果没有特别事先声明，则认为发散是广义发散.

例 (1) 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 收敛于 0.

因为可以取 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ 作为【定义】1 中的 N. 其中[ ]是高斯记号.

(2) $\{n\}$ 趋于正无穷大. 因为可以取 $[G]+1$ 作为【定义】2 中的 N.

(3) $\{(-1)^n\}$ 振动. 因为随着 n 是偶数或奇数，对应项取为 $+1$ 或

* "可以选择"的说法，改用"存在"的说法为宜，因为即使 N 存在，有时却无法选择出 N 来. ——译注

-1.

6·2 关于收敛数列的定理

【定义】4. 子数列 从某数列中去掉若干(有限的或无限多的)项后得到的一个新数列. 当其各项的顺序保持不变时，新数列叫做原数列的子数列.

【定理】1. 收敛数列的子数列也收敛于原来的极限值.

证明 根据【定义】1 可证. □

【定理】2. 设 A 是收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限值，则存在满足 $|a_n|<M(n=1, 2, 3, \cdots)$ 的常数 M，使

$$|A|\leqslant M.$$

证明 当给定任意正数 ε 时，可以选择自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切 n，$|a_n-A|<\varepsilon$，即 $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$ 成立. 假如选取一个比下列 $N+2$ 个数都大的数 M：

$$|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_N|, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|,$$

那么，无论 $n\leqslant N$ 或 $n>N$ 都恒使 $|a_n|<M$ 成立.

现暂且设 $|A|>M$，则可选取 M' 使 $|A|>M'>M$(实数的稠密性)，因此有

$$|A-a_n|\geqslant|A|-|a_n|>M'-M>0,$$

这和 $a_n\to A$ 矛盾，从而 $|A|\leqslant M$. □

【定理】3. 当两数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别收敛于 A, B 时，有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=kA$($k$ 是常数)；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$(同取正号或同取负号)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=AB$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$，其中 $b_n\neq0$，$B\neq0$；

(5) 若恒有 $a_n\leqslant b_n$，则 $A\leqslant B$；

(6) 设有另一数列 $\{c_n\}$，若恒有 $b_n\leqslant c_n\leqslant a_n$，且 $A=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=A$*.

证明 (1) 当 $k=0$ 时，$ka_n=0$，$kA=0$. 因此显然成立.

当 $k\neq0$ 时，对于任意给定的正数 ε，选取正数 ε' 使 $0<|k|\varepsilon'<\varepsilon$.

---

* 如果(4)，(5)，(6)中的条件 $b_n\neq0$，$a_n\leq b_n$ 及 $b_n\leq c_n\leq a_n$ 分别从某一确定的项起成立，则相应的结论也是对的. ——译注

根据【定义】1，对于 ε' 可选择适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的数一切整数 n，有

$$|a_n-A|<\varepsilon',$$

$$\therefore\quad |ka_n-kA|<|k|\varepsilon'<\varepsilon \quad 成立.$$

从而，根据【定义】1 知结论(1)成立.

(2) 对于任意给定的正数 ε，取正数 ε' 使 $0<2\varepsilon'<\varepsilon$，根据【定义】1，对于 ε'，存在自然数 N_1，N_2 使

对于满足 $n>N_1$ 的一切整数 n 有 $|a_n-A|<\varepsilon'$.

对于满足 $n>N_2$ 的一切整数 n 有 $|b_n-B|<\varepsilon'$. 现设 $max(N_1, N_2)=N$，则对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有

$$|a_n-A|<\varepsilon',\ |b_n-B|<\varepsilon',$$

$$\therefore\quad |a_n\pm b_n-(A\pm B)|\leqslant|a_n-A|+|b_n-B|<2\varepsilon'<\varepsilon.$$

(同取正号或同取负号).

从而，根据【定义】1 知结论(2)成立.

(3) 根据【定理】2，存在正常数 M_1，M_2 使 $|a_n|<M_1$，$|b_n|<M_2$. 假设 $\max(M_1, M_2)=M$，则 $|a_n|<M$，$|b_n|<M$. $|A|\leqslant M$，$|B|\leqslant M$（根据【定理】2）.

今对于任意给定的正数 ε，取正数 ε' 使 $0<2M\varepsilon'<\varepsilon$. 对于 ε'，存在自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有

$$|a_n-A|<\varepsilon',\ |b_n-B|<\varepsilon',$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad |a_nb_n-AB|&=|(A-a_n)B+a_n(B-b_n)|\\&<M(|A-a_n|+|B-b_n|)\\&<2\varepsilon'M<\varepsilon.\end{aligned}$$

从而，根据【定义】1 便得结论(3).

(4) 由假定 $B\neq0$ 知 $|B|>0$. 现对于任意正数 ε，取正数 ε' 使 $0<2\varepsilon'<|B|^2\varepsilon$. 由于 $b_n\to B$，故对于 ε' 存在自然数 N_1，使对于满足 $n>N_1$ 的一切整数 n，有 $|b_n-B|<\varepsilon'$. 另外，由于 $b_n\to B$，故存在某一自然数 N_2，使对于满足 $n>N_2$ 的一切整数 n 有 $2|b_n|>B$，从而，若令 $\max(N_1, N_2)=N$，则对于满足 $n>N$ 的一切整数下式成立.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{B}-\frac{1}{b_n}\right|&=\left|\frac{b_n-B}{Bb_n}\right|<\frac{2|b_n-B|}{|B|^2}\\&<\frac{2\varepsilon'}{|B|^2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

亦即　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{B}$.

根据(3)，便得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{A}{B}.$$

(5)　用反证法，假设 $A>B$. 对于任意给定的正数 ε 可选择自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，有

$$|a_n-A|<\varepsilon,\ |b_n-B|<\varepsilon,$$

$$\therefore\ |b_n-a_n-(B-A)|<2\varepsilon(n>N).$$

但是，根据假定 $b_n\geqslant a_n$，因此 $b_n-a_n-(B-A)\geqslant A-B>0$ (对于一切 n)，这与 $b_n-a_n-(B-A)<2\varepsilon$ 矛盾. 从而，$A\leqslant B$.

(6)　据据假定，对于任意给定的正数 ε，存在自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，有

$$-\varepsilon<a_n-A<\varepsilon,\ -\varepsilon<b_n-A<\varepsilon.$$

但是　$b_n\leqslant c_n\leqslant a_n$,

因此　$-\varepsilon<b_n-A\leqslant c_n-A\leqslant a_n-A<\varepsilon$,

从而根据【定义】1，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$　□

注意　【定理】3　(5)结论中等号成立的例：

设 $a_n=\dfrac{1}{n}$，$b_n=\dfrac{2}{n}$，则 $a_n<b_n$，但 $A=B=0$.

关于实数连续性的康托公理是不加证明而承认的.

【公理】 康托公理　设闭区间 $I_n=[a_n,\ b_n]$的序列 I_1，I_2，I_3，…满足 $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$，且当 n 增大时，b_n-a_n 无限趋于 0，则只有一个实数属于一切的 I_n 中.

【定义】5. 上界. 下界　当实数集 M 的任意数都不大于(小于)某数 r 时，r 叫做 M 的上界(下界)，具有上界(下界)的集合叫做是有上界(下界)的，既有上界又有下界的集合，简单地叫做有界集合.

【定义】6. 上确界. 下确界　所谓实数集 M 的上确界 a，是满足下列两个条件 1°，2° 的数. 采用记号 $Sup\,M$ 表示.

1°. 对属于 M 的一切数 x，有 $x\leqslant a$.

2°. 若 $a'<a$，则在 M 中存在数 x，使满足 $a'<x$.

对于下确界，可令 1°，2° 的不等号反向. 用记号 $inf\,M$ 表示下确界.

【定理】4. 若实数集 M 有上(下)界，则 M 的上确界(下确界)存在，

证明 设 M 有界. 对于 M 的一个元素 a_1（不是 M 的上界）和 M 的一个上界 b_1，令 $c_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1)$，当 c_1 是 M 的上界时，令 $a_2=a_1$，$b_2=c_1$；当 c_1 不是 M 的上界时，令 $a_2=c_1$，$b_2=b_1$.

作 $c_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2)$，当 c_2 是 M 的上界时，令 $a_3=a_2$，$b_3=c_2$，当 c_2 不是 M 的上界时，令 $a_3=c_2$，$b_3=b_2$. 以下同样，当依次决定 a_4，b_4，a_5，、$b_5\cdots a_n$，$b_n\cdots\cdots$ 时，由于区间 $I_n=[a_n, b_n]$ 满足康托公理的假定，故可决定包含在一切 I_n 中的一个实数 k.

这个 k 就是 M 的上确界，原因是

(1) 假定在 M 中存在比 k 大的元素 y. 由于随着 n 变大，I_n 的长度变得任意小，所以存在番号 n 使 $b_n-a_n<y-k$. 这时 $k-a_n<y-b_n$，但是由于 $0\leqslant k-a_n$，故 $b_n<y$. 这与 b_n 为 M 的上界矛盾，因而对于 M 的一切数 x，$x\leqslant k$ 成立. 【定义】6 的 1° 成立.

(2) 取任意小的正数 ε. 可取 n 充分大，使区间 I_n 的长度比 ε 小，这时，$I_n\cap(k-\varepsilon,k)\neq\phi$. 但是，$I_n$ 恒包含 M 中的数，根据 (1)，在 M 中没有比 k 大的数，因此区间 $(k-\varepsilon, k)$ 和 I_n 的公共部分含有 M 中的数，也就是说，区间 $(k-\varepsilon, k)$ 含有 M 的数，【定义】6 的 2° 遂成立.

同样可以证明 M 有下界时，下确界存在. □

【定理】5. 有上界的广义单调增加数列是收敛的. 有下界的广义单调减少数列也是收敛的. 因而有界的广义单调数列收敛.

证明 根据【定理】4，有上界的广义单调增加数列 $\{a_n\}$ 有上确界 k. 根据【定义】6，2°，对于任意的正数 ε，存在项 a_N 使 $k-\varepsilon<a_N$. 由于是单调增加的，故对于满足 $n>N$ 的 n，恒有 $k-\varepsilon<a_n$. $\therefore$ $|a_n-k|<\varepsilon$.
也就是说，$\{a_n\}$ 收敛于 k.

对于有下界的(广义)单调数列也可同样证明. □

【定理】6.（柯西收敛判别条件） 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任意给定的正数 ε，存在适当的自然数 N，使对于满足 $p>N$，$q>N$ 的一切整数 p，q，$|a_p-a_q|<\varepsilon$ 成立.

证明 （必要性） 假设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，则由【定义】1 知，对任意给定的正数 ε，可选择适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切 n，$|a_n-A|<\varepsilon$
因而，若 $p>N$，$q>N$，则 $|a_p-a_q|\leqslant|a_p-A|+|a_q-A|<2\varepsilon$.

（充分性） 当上列条件成立时，对于任意给定的正数 ε，可选择适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切 n，$|a_{N+1}-a_n|<\varepsilon$ 成立. 因此，

$\{a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \cdots\}$,从而数列 $\{a_n\}$ 有界. 其子数列 $a_t, a_{t+1}, a_{t+2}, \cdots$ 也有界. 故由【定理】4, 子数列有上确界 l_t, 下确界 m_t, 而且

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3 \leqslant \cdots \leqslant m_t \leqslant \cdots \leqslant l_t \leqslant \cdots \leqslant l_3 \leqslant l_2 \leqslant l_1.$$

从而, 两个数列 $\{m_t\}$, $\{l_t\}$ 同时是广义单调有界数列,故收敛(【定理】, 5),

但是 $l_t - m_t = Sup\{a_p - a_q : p, q \geqslant t\}$, 根据假定只要增大 t, 就可使 $|a_p - a_q|$ 从而使 $l_t - m_t$ 任意减小. 因此 $\{m_t\}$, $\{l_t\}$ 具有同一极限值 A.

因而, 对任意给定的正数 ε, 存在适当的自然数 N 使

$$A - \varepsilon < m_N \leqslant l_N < A + \varepsilon.$$

从而, 对于满足 $n > N$ 的一切 n, 有

$$A - \varepsilon < m_N \leqslant m_n \leqslant a_n \leqslant l_n \leqslant l_N < A + \varepsilon.$$

也就是说, $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ 成立. 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. □

【定理】7. 以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项构成子数列 $\{a_{2n-1}\}$,偶数项构成子数列 $\{a_{2n}\}$. 如果这两个子数列都收敛于相同的极限值 A, 则原数列也收敛于 A.

证明 由于数列 $\{a_{2n-1}\}$ 收敛于 A, 故对于任意的正数 ε, 存在适当的自然数 N_1, 使对于满足 $n > N_1$ 的一切奇数 $m = 2n-1$, $|a_m - A| = |a_{2n-1} - A| < \varepsilon$ 成立.

同样地, 对于相同的 ε, 存在适当的自然数 N_2, 使对于满足 $k > N_2$ 的一切偶数 $k = 2n$, $|a_k - A| = |a_{2n} - A| < \varepsilon$ 成立.现设 $\max(N_1, N_2) = N$, 则对于满足 $l > N$ 的任意整数 l(无论是奇数还是偶数), $|a_l - A| < \varepsilon$ 恒成立.

从而, 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A. □

6·3 关于发散数列的定理

【定理】8. (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$;

(2) 若 $a_n \leqslant b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

若 $a_n \leqslant b_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$(常数), $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$,

若 $\lim\limits_{n\to\infty} = A$(常数), $\lim\limits_{\to\infty} b_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$

(4) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$(正常数)或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 时,

若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\pm\infty$(同取正号或同取负号)，

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(负常数)或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 时，

若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$，则 $a_nb_n=\mp\infty$.(同取上面符号或同取下面符号)；

(5) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(正常数)，$a_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$ 时，$\lim \dfrac{b_n}{a_n}=\pm\infty$，

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(负常数)，$a_n\neq 0(n=1,2\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pm\infty$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\mp\infty$.(同取上面符号或同取下面符号).

证明 (1) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$ 时，对于任意给定的正数 G，可选择适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有 $0<G<a_n$.

$$\therefore\quad \frac{1}{a_n}<\frac{1}{G}.$$

根据【定义】1 便得结论.

又当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 时，把 G 取为负数同样地有 $\left|\dfrac{1}{a_n}\right|<\left|\dfrac{1}{G}\right|$，于是可得结论.

(2) 由【定义】2，显然可得结论.

(3) 前半部分，对于任意给定的两个正数 ε 和 G，存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon,\quad G<b_n.$$

从而，$A+G-\varepsilon<a_n+b_n$ 成立. 因此，根据【定义】2，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty,$$

后半部分也同样证明.

(4) (甲) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=+\infty$ 的证明如下：

对于任意给定的两个正数 $\varepsilon(A>\varepsilon)$ 和 G，可选择自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的整数 n 有

$$0<A-\varepsilon<a_n,\quad 0<G<b_n,$$

$$\therefore\quad (A-\varepsilon)G<a_nb_n.$$

因为 $A-\varepsilon$ 为正，G 可取为任意大，故由【定义】2 便得结论.

(乙)　当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n=-\infty$ 的证明如下：

对于任意的正数 G_1 和负数 G_2，可选择适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有 $0<G_1<a_n$，$b_n<G_2<0$。因而 $a_n b_n<G_1 G_2<0$ 成立，故由【定义】2 便得结论。

其他的情形也可同样证明。

(5)　视 $\dfrac{b_n}{a_n}=b_n\cdot\dfrac{1}{a_n}$，使用(4)的结论即可。　□

6·4　无穷数列的例题

【定理】9．数列 $\{r^n\}$

在 $|r|<1$ 时收敛于极限值0；

在 $|r|>1$ 时趋于正无穷大；

在 $r=1$ 时收敛于极限值；

在 $r=-1$ 时振动．

证明　(1)　当 $1>r>0$ 时，可令 $r=\dfrac{1}{1+h}$，$h>0$，从而

$$0<r^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，故由【定理】3，(6)，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$。

(2)　当 $0>r>-1$ 时，$0<|r|<1$，从而，由(1)有

$\lim\limits_{n\to\infty}|r|^n=0$，∴　$\lim\limits_{n\to\infty}|r^n|=0$，∴　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$

(3)　当 $r=0$ 时，对于一切的 n 值，$r^n=0$，从而 $\{r^n\}$ 收敛且极限值也为 0。

(4)　当 $r>1$ 时，若令 $r=1+h$，$h>0$，则 $r^n=(1+h)^n>1+nh$，但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+nh)=+\infty$，∴　$\lim\limits_{n\to\infty} r^n=+\infty$。

(5)　当 $r<-1$ 时，$|r|>1$．从而由(4)得 $\lim\limits_{n\to\infty}|r|^n=\infty$．$r^n$ 的符号随 n 是偶数或奇数而变为正或负，因而数列 $\{r^n\}$ 振动．

(6)　当 $r=-1$ 时，随着 n 是偶数或奇数，得 $r^n=1$ 或 -1，因而 $\{r^n\}$ 振动．

(7)　当 $r=1$ 时，对一切的 n 值 $r^n=1$，从而 $\{r^n\}$ 的极限值也是1。

□

例题1. 数列 $\{n^k\}$ 当 $k>0$ 时趋于正无穷大，当 $k<0$ 时收敛于 0.

证明 $n^k=e^{k\ln n}$.

(1) 当 $k>0$ 时，$(n+1)^k-n^k=e^{k\ln(n+1)}-e^{k\ln n}=$

$e^{k\ln n}\left(e^{k\ln\frac{n+1}{n}}-1\right)$，而且因为 $\ln\frac{n+1}{n}>0, k>0$，所以 $e^{k\ln\frac{n+1}{n}}>1$.

$\therefore$ $(n+1)^k>n^k$，即 $\{n^k\}$ 是单调增加数列. 因而，对于任意给定的正数 G，若令 $N=\left[e^{\frac{1}{k}\ln G}\right]+1$（[ ]是高斯记号），则对于满足 $n>N$ 的一切整数 n 有 $n^k>N^k>\left(e^{\frac{1}{k}\ln G}\right)^k=G$，从而根据[定义]2，$\{n^k\}$ 趋于正无穷大.

(2) 当 $k<0$ 时，令 $k=-l(l>0)$，则 $n^k=\frac{1}{n^l}$. 而且由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n^l=+\infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^k=0$.

例题2. 设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{k_n\}$，对于一切的 n，$|a_{n+1}|=k_n|a_n|$ 成立，若 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=k$，$0\leqslant k<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证明 取常数 l，使满足 $k<l<1$. 若取自然数 N 充分大，则对于满足 $n>N$ 的任意整数 n，$k_n<l$ 成立. 从而对于任意的自然数 m 有

$$|a_{N+1+m}|<l^m|a_{N+1}|.$$

由于 $0<l<1$，故当 $m\to\infty$ 时，$a_{N+1+m}\to0$. 从而，当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to0$. □

例题3. 对于任意的实数 x，数列 $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ 都收敛于 0.

证明 由于 $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{x}{n+1}\cdot\frac{x^n}{n!}$，故令 $K=\frac{|x|}{n+1}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=0$. 从而，此数列满足例题 2 的假定，故收敛于 0. □

例题4. 当 $a>0$ 时，数列 $\{\sqrt[n]{a}\}$ 收敛于 1.

证明 (1) 当 $a>1$ 时，令 $\sqrt[n]{a}=1+\lambda_n(\lambda_n>0)$，则

$$a=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n>n\lambda_n,$$

$\therefore$ $0<\lambda_n<\frac{a}{n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$,

$\therefore\ \lim\limits_{b\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\lambda_n)=1.$

(2) 当 $a=1$ 时，由于 $\sqrt[n]{a}=1$，故数列收敛于 1.

(3) 当 $0<a<1$ 时，令 $b=\dfrac{1}{a}>1$，则根据(1) $\lim\limits_{b\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$，

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}=1.$ □

例题5. 数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 收敛于 1.

证明 当 $n>2$ 时，由于 $\sqrt[n]{n}>1$，故若令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n(\lambda_n>0)$，则有

$$n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots+\lambda_n^n$$

$$>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2,$$

$\therefore\ 0<\lambda_n^2<\dfrac{2}{n}$，但当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{2}{n}\to0$，$\therefore\lambda_n\to0$ 故，$\sqrt[n]{n}\to1$. □

例题6. 当 $|a|<1$，p 是任意实数时，数列 $\{n^pa^n\}$ 收敛于 0.

证明 当 $a=0$ 时显然成立. 当 $a\neq0$ 时，由于 $b=\dfrac{1}{|a|}>1$，故可令 $b=1+\lambda(\lambda>0)$. 设 k 是满足 $k<n$ 的整数，则

$$b^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1}+\cdots+\lambda^n$$

$$>\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\lambda^{k+1},$$

$$\therefore\ n^k|a|^n=\frac{n^k}{b^n}<\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}\cdot\frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}$$

(分母是 n 的 $(k+1)$ 次式).

但是，$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

$$=0,$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}n^k|a|^n=0.$

当 p 是正实数时，令 $[p]=k\geqslant0$，则 $k\leqslant p\leqslant k+1$.

$\therefore\ n^k\leqslant n^p\leqslant n^{k+1}$,

$\therefore\ n^k|a|^n\leqslant n^p|a|^n\leqslant n^{k+1}|a|^n$.

当$n\to\infty$时，由于$n^k|a|^n\to 0$，$n^{k+1}|a|^n\to 0$，所以$n^p|a|^n\to 0$．$\therefore n^pa^n\to 0$．

当p是负实数时，令$p=-q(q>0)$，则当$n\to\infty$时，$n^q\to\infty$，$a^n\to 0$ $(\because |a|<1)$

$$\therefore\quad n^pa^n=\frac{a^n}{n^q}=a^n\cdot\frac{1}{n^q}\longrightarrow 0.$$

□

例题7． 数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$收敛.

证明 令$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，则根据二项式定理

$$a_n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\quad ①$$

用$n+1$代替n时，①式右端的各项增大，而且增加一个正的项，因而数列$\{a_n\}$是单调增加数列，但是，从①式推知

$$a_n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<3,$$

也就是说，$\{a_n\}$是单调增加数列且有上界，故由【定理】5知$\{a_n\}$收敛.

□

§7. 用递推公式表示的数列

7·1　二项递推公式（一次式）

【定义】　递推公式　在数列的相邻项之间的关系式中，可用来依次决定各项的关系式，叫做数列的递推公式.

除非特别事先说明，在本节中都用 $\{a_n\}$ 表示数列.

【定理】1. 当递推公式是 $a_{n+1}-a_n=f(n)$（其中 $f(n)$ 是自然数 n 的函数，$n=1,2,\cdots$）时，有

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

证明　在递推公式 $a_{k+1}-a_k=f(k)$ 中，用 $1,2,\cdots,n-1$ 代替 k，再将所得的各等式两端分别相加，得

$$a_n-a_1=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1),$$

$$\therefore\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

□

【定理】2. 当递推公式是 $a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$（$f(n)$ 是自然数 n 的函数，$n=1,2,\cdots$）时，有

$$a_n=a_1\prod_{k=1}^{n-1}f(k).$$

证明　在递推公式 $a_{k+1}=a_k\cdot f(k)$ 中，用 $1,2,\cdots,n-1$ 代替 k，再将所得的各等式两端分别相乘，便得

$$a_n=a_1\cdot f(1)\cdot f(2)\cdots f(n-1)=a_1\prod_{k=1}^{n-1}f(k).$$

□

【定理】3. 当递推公式是 $a_{n+1}=pa_n+q(n=1,2,\cdots)$（$p,q$ 是常数）时，若 $p=1$，则此数列通项为 $a_n=a_1+(n-1)q$ 的等差数列. 若 $q=0$，则比数列是通项为 $a_n=a_1\cdot p^{n-1}$ 的等比数列. 若 $p\neq1$，则此数列的通项是

$$a_n=\frac{q}{1-p}+\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}.$$

证明　当 $p=1$ 时，递推公式是 $a_{n+1}-a_n=q$. 这表明 $\{a_n\}$ 是公差为 q 的等差数列. 从而有

$$a_n=a_1+(n-1)q.$$

当 $q=0$ 时，递推公式是 $a_{n+1}=pa_n$. 这表明 $\{a_n\}$ 是公比为 p 的等比数列，从而

$$a_n=a_1p^{n-1}.$$

当 $p\neq1$ 时，由递推公式 $a_{n+1}=pa_n+q, a_n=pa_{n-1}+q$ 的前一式减去后一式，得

$$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1}).$$

这表明：在 $\{a_n\}$ 的差分数列 $\{\Delta a_n\}$ 中，

$$\Delta a_n=p\Delta a_{n-1}.$$

$\{\Delta a_n\}$ 是公比为 p 的等比数列.

从而.

$$\Delta a_n=p^{n-1}\Delta a_1,$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=p^{n-1}(a_2-a_1).$$

上式是 $\{a_n\}$ 的递推公式，即【定理】1 的情形. 从而

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}p^{k-1}(a_2-a_1)$$

$$=a_1+(a_2-a_1)\cdot\frac{1-p^{n-1}}{1-p}.$$

将 $a_2=pa_1+q$ 代入上式，得

$$a_n=a_1+\{(p-1)a_1+q\}\cdot\frac{1-p^{n-1}}{1-p}$$

$$=\frac{q}{1-p}+\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}.$$

□

【定理】4. 由 $a_1=a$, $a_n=pa_{n-1}+q(n\geqslant2)$ 定义的无穷数列 $\{a_n\}$

(1) 当 $|p|<1$ 时收敛于 $\frac{q}{1-p}$.

(2) 当 $p\neq1$, 且 $pa+q=a$ 时，收敛于 a.

其中 a,p,q 是常数.

证明 (1) 因为这是【定理】3 中 $p\neq1$ 的情形. 故 $a_n=\frac{q}{1-p}+\left(a-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$. 但是 $|p|<1$, 因此当 $n\to\infty$ 时，$p^{n-1}\to0$,

$$\therefore\quad a_n\to\frac{q}{1-p}.$$

(2) 由 $p\neq1, pa+q=a$ 得 $a-\frac{q}{1-p}=0$. 从而，由【定理】3 中 $p\neq1$ 的情形得

$$a_n=\frac{q}{1-p}=a,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=a.$$ □

7·2 三项递推公式(一次式)

【定理】5. 当递推公式是 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=f(n)$($f(n)$是自然数 n 的函数)时，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{a_2-a_1+\sum_{k=1}^{r-1}f(k)\right\}.$$

证明 设 $\{\Delta a_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的差分数列，根据§4.[公式]4 知，递推公式是

$$\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=f(n).$$

从而根据【定理】1，$\Delta a_n=\Delta a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(k)$，

亦即 $$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k),$$

这又是【定理】1 的情形，因此

$$a_n=a_1+\sum_{j=1}^{n-1}\left\{a_2-a_1+\sum_{k=1}^{j-1}f(k)\right\}.$$ □

【定理】6. 数列 $\{a_n\}$ 的递推公式是

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0(p,q\text{ 是常数}).$$

另外，设二次方程式 $x^2+px+q=0$ 的两个根为 α,β，则

(1) 当 $\alpha\neq\beta(p^2-4q\neq0)$时，

$$a_n=\frac{a_2-a_1\beta}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^{n-1}+\frac{a_1\alpha-a_2}{\alpha-\beta}\cdot\beta^{n-1};$$

(2) 当 $\alpha=\beta(p^2-4q=0)$时，

$$a_n=a_1\alpha^{n-1}+(a_2-a_1\alpha)(n-1)\alpha^{n-2}.$$

证明 根据二次方程式的根与系数的关系，有

$$p=-(\alpha+\beta),\ q=\alpha\beta.$$

从而，递推公式是

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0,$$

$$\therefore\quad a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n).$$

这表明数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 是公比为 β 的等比数列。

从而，根据【定理】3 得

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1). \qquad ①$$

现在令 $a_n=b_n+(\lambda+\mu n)\beta^{n-1}$（$\lambda,\mu$ 是常数） ②

则由①得

$$b_{n+1}+\{\lambda+\mu(n+1)\}\beta^n-\alpha\{b_n+(\lambda+\mu n)\beta^{n-1}\}$$
$$=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1},$$

$$\therefore\quad b_{n+1}=\alpha b_n-\{(\lambda+\mu+\mu n)\beta-(\lambda+\mu n)\alpha-(a_2-\alpha a_1)\}\beta^{n-1}. \qquad ③$$

其中若规定 λ，μ 使

$$\begin{cases}(\lambda+\mu)\beta-\lambda\alpha-(a_2-\alpha a_1)=0,\\ \mu(\beta-\alpha)=0.\end{cases} \qquad ④$$

则③式变为　$b_{n+1}=\alpha b_n$。

由于数列 $\{b_n\}$ 是公比为 α 的等比数列，故

$$b_n=b_1\alpha^{n-1}. \qquad ⑤$$

如果当 $\alpha\neq\beta$ 时，$\mu=0,\lambda=\dfrac{\alpha a_1-a_2}{\alpha-\beta},b_1=\dfrac{\beta a_1-a_2}{\beta-\alpha}$.

当 $\alpha=\beta$ 时，$\lambda=0,\alpha\mu=a_2-\alpha a_1,\alpha b_1=2a_1\alpha-a_2$.

则②，④式同时成立，因此由②与⑤式得

(1)　$p^2-4q\neq0$ 时，$a_n=\dfrac{a_2-\beta a_1}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}+\dfrac{\alpha a_1-a_2}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$.

(2)　$p^2-4q=0$ 时，$a_n=a_1\alpha^{n-1}+(a_2-\alpha a_1)(n-1)\alpha^{n-2}$.

【系】　当 $p+q+1=0$ 时，递推公式

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0(n=1,2,\cdots)$ 可变形为下列两种二项递推公式：

(甲)　$a_n-a_{n-1}=q^{n-2}(a_2-a_1)$；

(乙)　$a_n-qa_{n-1}=a_2-qa_1$；

且其通项为

(丙)　$q\neq1(p\neq-2)$时，$a_n=\dfrac{a_2-qa_1}{1-q}+\dfrac{a_1-a_2}{1-q}\cdot q^{n-1}$；

(丁)　$q=1(p=-2)$时，$a_n=a_1+(a_2-a_1)(n-1)$.

证明　利用证明【定理】6 的记号.

由于 $p+q+1=0$，故 α，β 中至少有一个等于 1

当 $\alpha=1$ 时，$\beta=q$，由①式得递推公式(甲).

当 $\beta=1$ 时，$\alpha=q$，由①式得递推公式(乙).

由于二次方程的根的判别式是 $p^2-4q=(p+2)^2=(1-q)^2$，故当 $q\neq1$ 时是【定理】6(1)的情形，当 $q=1$ 时是【定理】6(2)的情形，因此，运用【定理】6 的结论，便分别得到(丙)、(丁)两式. □

例　在数列 $\{a_n\}$ 中，当 $a_1=a_2=1$，递推公式为 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=1,2,\cdots)$时，此数列叫做费波那奇数列.

在【定理】6 中，这是 $p=q=-1$，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 的情形，因此由【定理】6(1)式知，数列的通项为

$$a_n=\frac{1-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left\{\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right\}.$$

【定理】7. p,q,r 是常数($r\neq0$)，数列 $\{a_n\}$ 的递推公式是

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=r(n=1,2,\cdots). \qquad ①$$

现假设二次方程式 $x^2+px+q=0$ 的两个根 α,β 都不等于 1，这时，令

$$b_n=a_n-\frac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \qquad ②$$

则数列 $\{b_n\}$ 的递推公式成为

$$b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n=0(n=1,2,\cdots), \qquad ③$$

这就是[定理]6 的情形.

证明　由②式　$a_n=b_n+\dfrac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}$

将上式代入①式得

$$\left\{b_{n+2}+\frac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}+p\left\{b_{n+1}+\frac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}+$$

$$q\left\{b_n+\frac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right\}=r,$$

$$\therefore\quad (b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n)+\frac{r}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1+p+q)=r. \qquad ④$$

但是，α,β 是 $x^2+px+q=0$ 的根，因此

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta).$$

把 $x=1$代入上式得

$$1+p+q=(1-\alpha)(1-\beta).$$

从而④式化为

$$b_{n+2}+pb_{n+1}+qb_n=0. \qquad \square$$

7·3　与两个数列有关的递推公式

【定理】8. 设 p,q,r,s 是常数，且在两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 之间下列两个递推公式

$$a_{n+1}=pa_n+qb_n, \qquad ①$$

$$b_{n+1}=ra_n+sb_n \qquad ②$$

成立，则关于 $\{a_n\}$ 的递推公式为

$$a_{n+2}-(p+s)a_{n+1}+(ps-qr)a_n=0. \qquad ③$$

关于 $\{b_n\}$ 的递推公式为

$$b_{n+2}-(p+s)b_{n+1}+(ps-qr)b_n=0. \qquad ④$$

即化为【定理】6 的情形．

证明　①×s−②×q，

$$sa_{n+1}-qb_{n+1}=(ps-qr)a_n. \qquad ⑤$$

另一方面，由①式知　$a_{n+2}=pa_{n+1}+qb_{n+1}$. ⑥

从⑤、⑥式中消去 qb_{n+1}，便得③式，关于④式也同样可得．　□

【系】　特别地，若递推公式为

$$a_{n+1}=pa_n+qb_n, \qquad ①$$

$$b_{n+1}=qa_n+pb_n, \qquad ②$$

则两数列的通项分别是

$$a_n=\frac{1}{2}\{(a_1+b_1)(p+q)^{n-1}+(a_1-b_1)(p-q)^{n-1}\},$$

$$b_n=\frac{1}{2}\{(a_1+b_1)(p+q)^{n-1}-(a_1-b_1)(p-q)^{n-1}\}.$$

证明　由①+②，得

$$a_{n+1}+b_{n+1}=(p+q)(a_n+b_n).$$

从而，数列 $\{a_n+b_n\}$ 是公比为$(p+q)$的等比数列

$$a_n+b_n=(p+q)^{n-1}(a_1+b_1).\qquad ③$$

又①－②，得

$$a_{n+1}-b_{n+1}=(p-q)(a_n-b_n).$$

从而，数列 $\{a_n-b_n\}$ 是公比为 $(p-q)$ 的等比数列

$$a_n-b_n=(p-g)^{n-1}(a_1-b_1).\qquad ④$$

由③和④式便得结论.

【定理】9. 设 p,q,r,s,t,u 是常数，$(1-p)(1-s)\neq rq$，且在两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 之间有两个递推公式 □

$$a_{n+1}=pa_n+qb_n+t,\qquad ①$$

$$b_{n+1}=ra_n+sb_n+u,\qquad ②$$

又设联立方程组

$$x=px+qy+t,\qquad ③$$

$$y=rx+sy+u\qquad ④$$

的两个根为 α、β，则递推公式①、②变为

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)+q(b_n-\beta),\qquad ⑤$$

$$b_{n+1}-\beta=r(a_n-\alpha)+s(b_n-\beta)\qquad ⑥$$

两个数列 $\{a_n-\alpha\}$ 和 $\{b_n-\beta\}$ 化为【定理】8 的情形.

证明　由于假定，$(1-p)(1-s)\neq rq$，故联立方程组③和④有根. 在③、④式中令 $x=\alpha$，$y=\beta$，并由①，②式中分别减去所得的等式，便得⑤、⑥两式. □

7·4　两项递推公式(分数式)

【定理】10. 设 p,q,r,s 是常数，数列 $\{a_n\}$ 的递推公式是

$$a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}\ (ps-qr\neq 0).\qquad ①$$

设方程式　$$x=\frac{px+q}{rx+s}\qquad ②$$

具有两个相异的根 α,β，且令

$$b_n=\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta},$$

则此时　数列 $\{b_n\}$ 成为公比是 $\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}$ 的等比数列。

证明　由于 α,β 是方程式②的根，故



$$\alpha=\frac{p\,\alpha+q}{r\,\alpha+s},\ \beta=\frac{p\,\beta+q}{r\,\beta+s}.$$

将上列二式和①式代入③式，整理后得

$$b_n=\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\frac{\dfrac{pa_{n-1}+q}{ra_{n-1}+s}-\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}}{\dfrac{pa_{n-1}+g}{ra_{n-1}+s}-\dfrac{p\beta+q}{r\beta+s}}$$

$$=\frac{r\beta+s}{r\alpha+s}\cdot\frac{a_{n-1}-\alpha}{a_{n-1}-\beta}=\frac{r\,\beta+s}{r\,\alpha+s}b_{n-1}.$$

因而，数列 $\{b_n\}$ 是公比为$\dfrac{r\,\beta+s}{r\,\alpha+s}$的等比数列. □

7·5 其他递推公式

【定理】11. 如果正数数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为

$$a_{n+1}=Aa_n^k(k,A\text{是常数},A>0), \qquad ①$$

则数列 $\{\ln a_n\}$ 满 足【定理】3 类型的递推公式.

证明 在①式两端取对数便得

$$\ln a_{n+1}=\ln A+k\ln a_n. \qquad □$$

【定理】12. 当正数数列 $\{a_n\}$ 的递推公式是

$$a_{n+2}^k=Aa_{n+1}^l\cdot a_n^m(k,l,m,A\text{是常数}) \qquad ②$$

且 $A>0$ 时，数列 $\{\ln a_n\}$ 满足【定理】7 类型的递推公式.

证明 在②式两端取对数便得

$$k\ln a_{n+2}=l\ln a_{n+1}+m\ln a_n+\ln A. \qquad □$$

例题1. 在数列 $\{a_n\}$ 中，当$a_1=A$，$a_{n+1}=B\sqrt{a_n}$（A，B是正的常数)时，

(1) 用 A、B 和 n 表示 a_n;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的极限值.

解 (1) 由于这是【定理】11 中 $k=\frac{1}{2}$ 的情形，故运用【定理】3 的结论 得

$$\ln a_n=\frac{\ln B}{1-\frac{1}{2}}+\left\{\ln A-\frac{\ln B}{1-\frac{1}{2}}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\ln B^2+\left(\ln\frac{A}{B^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$\therefore\quad a_n = A^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \cdot B^{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$.

(2) 当$n\to\infty$时，由于$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0$，故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B^2.$$

例题2. 在数列$\{a_n\}$中，当$a_1=1$，$a_2=8$，递推公式为$a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$时，

(1) 求a_n和a_{n-1}之间的递推公式；

(2) 用n表示a_n，并求$\{a_n\}$的极限值.

解 (1) 这是【定理】12中$k=A=1$，$l=m=\frac{1}{2}$的情形，取递推公式的对数便得

$$\ln a_n = \frac{1}{2}(\ln a_{n-1} + \ln a_{n-2}).$$

这表明：数列$\{\ln a_n\}$是【定理】6【系】的情形．从而，由【系】的(乙)式得

$$\ln a_n + \frac{1}{2}\ln a_{n-1} = \ln 8,\quad \therefore\quad a_n\sqrt{a_{n-1}} = 8.$$

(2) 由(丙)式 $\ln a_n = \dfrac{\ln 8}{1+\frac{1}{2}} - \dfrac{\ln 8}{1+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$= \left\{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right\}\ln 4,$$

$\therefore\quad a_n = 4^{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}}$，$\quad\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4.$

例题3. 在数列$\{a_n\}$中，当$a_1=1$，$a_{n+1}=1+\sqrt{a_n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$时，求数列$\{a_n\}$的极限值.

解 $|a_n-3| = \left|\sqrt{a_{n-1}+1}-2\right| = \left|\dfrac{a_{n-1}+1-4}{\sqrt{a_{n-1}+1}+2}\right|$

$$\leqslant \frac{|a_{n-1}-3|}{2} = \frac{1}{2}\left|a_{n-1}-3\right|.$$

这个不等式对于满足$n\geqslant 2$的一切整数n都成立．重复运用上列不等式便得

$$0 \leqslant \left|a_n - 3\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|a_{n-1}-3\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2\left|a_{n-2}-3\right|$$

$$\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-3|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$\therefore\quad 0\leqslant\lim_{n\to\infty}|a_n-3|\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|a_n-3|=0.\quad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}a_n=3.$$

注意　$|a_n-3|$中的 3 是这样求得的：把递推公式中的 a_n，a_{n+1} 同时换为 x 后得到方程式 $x=1+\sqrt{x+1}$，其正根 $x=3$ 便是.

§8.　级　　数

8·1　级　　数

【定义】1. 级数. 前 n 项和. 级数的项　以无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 作为通项的无穷数列 $\{S_n\}$，叫做无穷级数或级数. 用记号

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots\quad\text{或}\quad\sum_{K=1}^{\infty}a_k$$

(略作Σa_K)表示. s_n叫做此级数的前 n 项和或第 n 部分和，a_n 叫做级数的通项.

【定义】2. 级数的收敛、发散、级数的和　当数列 $\{S_n\}$ 收敛于极限值 S 时，称级数 Σa_n 收敛于 S. S 叫做它的和，当数列 $\{S_n\}$ 发散时，就说级数 Σa_n 发散.

注意　从级数中除去(或增添)前有限个项，其收敛性或发散性仍然保持不变.（根据【定义】1 和 2)

【定理】1. 当$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_K$ 收敛时，如果不改变项的顺序而把若干项用括号括起来作为新级数的项，则此新级数仍然收敛且其和不变.

证明　当把级数$\sum a_n$ 作为数列 $\{S_n\}$ 考虑时，项的顺序不变而把若干项用括号括起来后的新级数可视为 $\{S_n\}$ 的某子数列，因而根据§6【定理】1 便得结论.　□

【定理】2. 当$\sum\limits_{K=1}^{\infty}a_k$，$\sum\limits_{K=1}^{\infty}b_K$ 同时收敛时，

(1) $\sum_{K=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{K=1}^{\infty} a_k$（$c$ 为常数）；

(2) $\sum_{K=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{K=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{K=1}^{\infty} b_k$（同取正号或同取负号）.

证明 由【定义】1 和 §6【定理】3 可证. □

【定理】3. 柯西收敛条件

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充分必要条件是，对于任意的正数 ε，可以选择适当的自然数 N，使对于满足 $n+p>n>N(p=1,2,\cdots)$ 的一切整数 n,p，有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

证明 由【定义】1 及 §6.【定理】6 可证. □

【系】1. 当 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛时，$\lim_{K\to\infty} a_k = 0$.

证明 在【定理】3 中令 $p=1$ 便得证. □

注意 通项趋于零是级数收敛的必要条件，但不是充分条件.

例 在 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散（8.7 例题 3）.

【系】2. 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 不成立，则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 这是【系】1 的对偶命题. □

8·2 正项级数

【定义】3. 正项级数 所有各项都是正数的级数叫做正项级数.

【定理】4. 正项级数 $\sum a_n$ 收敛的充分必要条件是：其部分和的数列 $\{S_n\}$ 有界.

证明 若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ 的极限值 S 存在. 由于 a_n 都是正数，故 S_n 也是正数且与 n 一起增加，从而，$0<S_n<S$，即 $\{S_n\}$ 是有界的. 反之，若 $\{S_n\}$ 有界，则有与 n 无关的正数 k 存在使 $S_n<k(n=1,2,\cdots)$. 但是，S_n 是和 n 一起增加的，因此由 §3.【定理】5 知，$\{S_n\}$ 收敛，$\sum a_n$ 也收敛. □

【定理】5. 对于两个正项级数$\sum a_n$，$\sum b_n$，

(1) 若$\sum b_n$收敛，且对于一切n有$a_n \leqslant b_n$，则$\sum a_n$也收敛。

(2) 若Σb_n发散，且对于一切n有$a_n \geqslant b_n$，则$\sum a_n$也发散。

证明 令 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，$A_n > 0$，$B_n > 0$。

(1) 根据假定，对于一切n有$A_n \leqslant B_n$。但$\sum b_n$是收敛的，因此由【定理】4知，$\{B_n\}$有界而且小于级数$\sum b_n$的和B。$\therefore A_n < B$。

也就是说，由于$\{A_n\}$有界，所以由【定理】4，$\sum a_n$收敛。

(2) $A_n \geq B_n$，但当$n \to \infty$时，$B_n \to \infty$，因此$A_n \to \infty$，故$\sum a_n$发散。

□

【定理】6. 设$f(x)$是在区间$[k, \infty]$上定义的单调减少连续函数，且$f(x) > 0$。又令k为正整数。有

(1) 若$\int_k^{\infty} f(x)dx$收敛，则$\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$也收敛；

(2) 若$\int_k^{\infty} f(x)dx$发散，则$\sum_{n=K}^{\infty} f(n)$也发散。

注意 $\int_k^{\infty} f(x)dx$的意义是指$\lim_{p \to \infty} \int_K^p f(x)dx$。

证明 根据假定，$f(x)$是单调减少函数，因此对于任意的自然数n，

$$\int_k^{k+n} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)dx + \int_{k+1}^{K+2} f(x)dx + \cdots + \int_{K+n-1}^{K+n} f(x)dx$$

$$\leqslant f(k) + f(k+1) + \cdots + f(k+n-1). \quad ①$$

又

$$\int_k^{K+n} f(x)dx \geqslant f(k+1) + f(k+2) + \cdots + f(k+n), \quad ②$$

从而，若$\int_k^{\infty} f(x)dx$收敛，则由②式有

$$f(k+1) + f(k+2) + \cdots + f(k+n) < \int_K^{\infty} f(x)dx.$$

也就是说，正项级数$\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$的部分和数列$\left\{\sum_{i=K+1}^{K+n} f(i)\right\}$有界，从而级数

$\sum_{n=K}^{\infty} f(n)$收敛(根据【定理】4).

若$\int_K^{\infty} f(x)dx$发散，则由①式，$\sum_{i=K}^{K+n-1} f(i)$也与n一起趋于无穷大，因而级数$\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$发散. □

【定理】7. 在两个正项级数$\sum a_n$，$\sum b_n$中，若存在$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$($k$是常数，且$k>0$)，则两个级数或者都收敛，或者都发散.

证明　当任意取ε使$k>\varepsilon>0$时，存在与此对应的某自然数N，使对于满足$n>N$的一切整数n，有

$$0<k-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<k+\varepsilon,$$

亦即

$$(k-\varepsilon)b_n<a_n, \quad ①$$

$$a_n<(k+\varepsilon)b_n. \quad ②$$

若$\sum a_n$收敛，则根据①式和【定理】5，$\sum(k-\varepsilon)b_n$，从而$\sum b_n$收敛. 若Σb_n收敛，则$\Sigma(k+\varepsilon)b_n$收敛，根据③式和【定理】5，Σa_n收敛.

若$\sum a_n$发散，则根据②式和【定理】5，$\sum(k+\varepsilon)b_n$，从而$\sum b_n$发散.

若$\sum b_n$发散，则$\sum(k-\varepsilon)b_n$发散，根据①式和【定理】5，$\sum a_n$发散. □

【定理】8. 对于两个正项级数$\sum a_n$，$\sum b_n$，当存在适当的自然数N，使对于满足$n>N$的一切整数n，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n} \quad ①$$

成立时，若$\sum b_n$收敛，则$\sum a_n$也收敛，另外，当对于满足$n>N$的一切整数n，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{b_{n+1}}{b_n} \quad ②$$

成立时，若$\sum b_n$发散，则$\sum a_n$也发散.

证明　显然，

$$a_n=\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\cdot\frac{a_{N+4}}{a_{N+3}}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot a_{N+1}.$$

由①令 $n=N+1, N+2, \cdots, n-1$ 得

$$a_n \leqslant \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} \cdot \frac{b_{N+3}}{b_{N+2}} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} \cdot a_{N+1} = \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} \cdot b_n.$$

现在令 $C=\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}$，C 是与 n 无关的正常数，由于对满足 $n>N$ 的一切n值，$a_n \leqslant C b_n$，故由【定理】5，若$\sum b_n$收敛，则$\sum a_n$也收敛.

同样，当②式对 $n>N$ 成立时，与上面相仿，对于满足 $n>N$ 的一切 n 值，$a_n \geqslant C b_n$ 成立，因而根据【定理】5，若$\sum b_n$发散，则$\sum a_n$也发散. □

【定理】9.（达兰贝尔判别条件） 对正项级数$\sum a_n$，存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，有

(1) 若存在常数 r 使 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant r < 1$，则$\sum a_n$收敛；

(2) 若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$，则$\sum a_n$发散.

证明 在【定理】8中，令 $b_n=r^n$，则$\sum b_n$是公比为 r 的等比级数. 因而，当 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} = r < 1$ 时，$\sum b_n$收敛，而由【定理】8，$\sum a_n$也收敛.

当 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ 不成立. 根据【定理】3【系】2，$\sum a_n$发散. □

【系】 对正项级数$\sum a_n$，当 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ 时，

(1) 若 $r<1$，则$\sum a_n$收敛；

(2) 若 $r>1$，则$\sum a_n$发散.

【证明】 当 $r \neq 1$ 时，取 ε 使 $|1-r|>\varepsilon>0$. 对于这个 ε 存在自然数 N，使得对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，$r-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r+\varepsilon$ 成立.

(1) 当 $r<1$ 时，由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r+\varepsilon < 1$ 成立，故由【定理】9，$\sum a_n$收敛.

(2) 当 $r>1$ 时，由于 $1 < r-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 成立，故由【定理】，$\sum a_n$发散. □

【定理】10. 对正项级数$\sum a_n$，存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，

(1) $\sqrt[n]{a_n}\leqslant k<1$（$k$ 为正常数），则 $\sum a_n$ 收敛。

(2) $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$，则 $\sum a_n$ 发散.

【证明】 (1) 根据假定 $a_n\leqslant k^n$，而 $\sum k^n(0<k<1)$ 是收敛的等比级数，故由【定理】5，$\sum a_n$ 也收敛.

(2) 根据假定 $a_n\geqslant 1$，故由【定理】3【系】2，$\sum a_n$ 发散.

【系】 对于正项级数，Σa_n 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$ 时，

(1) 若 $k<1$，则 $\sum a_n$ 收敛.

(2) 若 $k>1$，则 $\sum a_n$ 发散.

证明　当 $k\neq 1$ 时，取 ε 使 $|1-k|>\varepsilon>0$. 对于这个 ε 存在自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，$k-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<k+\varepsilon$ 成立.

(1) 当 $k<1$ 时，由于 $\sqrt[n]{a_n}<k+\varepsilon<1$ 成立，故由【定理】10，$\sum a_n$ 收敛.

(2) 当 $k>1$ 时，由于 $1<k-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}$ 成立，故由【定理】10，$\sum a_n$ 发散　□

8·3　关于交错级数的定理

【定理】11. 若 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则交错级数

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k=a_1-a_2+a_3-\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots\text{收敛.}$$

【证明】 设 n 为任意正整数. 部分和

$$S_{2n}=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}$$
$$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

由于对一切 n 值，$a_n\geqslant a_{n+1}$，故各括号内的值非负，因而

$$0\leqslant S_2\leqslant S_4\leqslant\cdots\leqslant S_{2n}\leqslant\cdots$$

也就是说，$\{S_{2n}\}$ 是单调增加数列.

同样，由于 $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$
$<a_1$，

故数列 $\{S_{2n}\}$ 有界. 从而，由§6.【定理】5，$\{S_{2n}\}$ 收敛.

另外　　$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}+\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$.

因而，由§6.【定理】7，数列 $\{S_n\}$ 收敛．亦即此级数收敛． □

8·4　绝对收敛级数

【定义】4．绝对值级数　对于级数 $\sum a_n$，$\sum|a_n|$ 叫做它的绝对值级数．

【定理】12．当一个级数的绝对值级数收敛时，这级数本身也收敛．

证明　当取任意的两个自然数 p，$q(p<q)$ 时，有

$$|a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q|\leqslant|a_p|+|a_{p+1}|+\cdots+|a_q|. \qquad ①$$

但是 $\sum|a_n|$ 收敛，故由【定理】3，对于任意的 $\varepsilon>o$，存在 N 使对于满足 $N<p<q$ 的 p，q，①式的右端比 ε 小，从而左端比 ε 小．再由【定理】3 可知，$\sum a_n$ 收敛 □

【定义】5．绝对收敛级数．条件收敛级数　其绝对值级数收敛的级数，叫做绝对收敛级数．其绝对值级数不收敛但本身收敛的级数，叫做条件收敛级数．

例　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$

根据【定理】11，上述级数收敛，其绝对值级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散(8.7 例题 3)．从而，上述级数是条件收敛级数．

注意　收敛的正项级数是绝对收敛级数．

【定理】13．对于绝对收敛级数 $\sum a_n$，设正项，负项按原来顺序分别是 p_1，p_2，$\cdots$；$-q_1$，$-q_2$，$\cdots$时，则 $\sum p_n$，$\sum q_n$ 都收敛，而且

$$\sum a_n=\sum p_n-\sum q_n.$$

证明　根据假定，$\sum|a_n|$ 收敛，设其和为 A，则

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\leqslant\sum_{i=1}^{r}|a_i|<A.$$

其中 p_n 是原级数的第 r 项．因而，正项级数 $\sum p_i$ 的部分和 $\sum_{i=1}^{n}p_i$ 有上

界. 于是, 根据【定理】4, $\sum p_i$ 收敛.

对于 $\sum q_i$ 也可以进行同样的推理.

其次, 设在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中的正项为 $p_1, p_2, \cdots, p_l$; 负项为 $q_1, q_2, \cdots, q_m$, 且 $l+m=n$,

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=(p_1+p_2+\cdots+p_l)-(q_1+q_2+\cdots+q_m),$$

因为当 $n\to\infty$ 时, $l\to\infty$. $m\to\infty$, 故

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\lim_{l\to\infty}(p_1+p_2+\cdots+p_l)-\lim_{m\to\infty}(q_1+q_2+\cdots+q_m).$$

亦即 $$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\sum_{i=1}^{\infty}p_i-\sum_{i=1}^{\infty}q_i.$$ □

【定理】14. 绝对收敛级数无论怎样改变项的顺序也绝对收敛, 其和不变.

证明 (1) 现在对正项级数来证明. 收敛的正项级数是绝对收敛的. 设 $\sum a_n$ 是收敛的正项级数, A 是它的和. 设变更项的顺序后所组成的级数为

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}+\cdots \quad ①$$

再设它的前 n 项和为 A_n', 这时

$A_n'=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_m$, 其中 $m=\max(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 从而, $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_n}$ 包含在一切 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 之中.

根据假定, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项收敛级数, 因此 $\sum_{n=1}^{m}a_n<A$.

$\therefore\ A_n'>A$.

由于部分和是有界的, 故由【定理】4, 新级数①收敛. 设其和为 A', 则

$$A'\leqslant A.$$

由于改变正项级数 $\sum a_{i_n}$ 的顺序后所得的级数可视为 $\sum a_n$, 因此根据上面的考虑, $A'\geqslant A$. 把两个不等式合在一起, 便得 $A'=A$.

(2) 现在对于一般的绝对收敛级数 $\sum a_n$ 来证明, 假设变更 $\sum a_n$ 各项的顺序而形成 $\sum b_n$, 则此级数的绝对值级数是变更 $\sum a_n$ 的绝对值级数的顺序后得到的级数. 因此根据(1)的证明, $\sum|b_n|$ 收敛. 亦即 $\sum b_n$

是绝对收敛级数，令其和为 B. 现在运用【定理】13 把 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 划分为正项级数和负项级数，设为。

$$A=\sum p_n-\sum q_n,\quad B=\sum r_n-\sum s_n.$$

$\sum r_n$ 不过是 $\sum p_n$ 的项变更顺序后的新级数，因此根据(1)，$\sum p_n=\sum r_n$. 同样 $\sum q_n=\sum s_n$.

$\therefore\quad A=B.$ □

【系】 任意改变收敛的正项级数各项的顺序所得的级数收敛，其和等于原级数的和.

证明 这是因为收敛正项级数是绝对收敛的. □

【定理】15. 若存在绝对收敛的两级数 $A=\sum a_n$, $B=\sum b_n$, 这时，作 $\sum a_n$ 的任意一项和 $\sum b_n$ 的任意一项的乘积(不重复也不遗漏)，则这些积按任意顺序排列后作成的级数 $\sum a_pb_q$ 绝对收敛，其和等于 AB.

证明 考虑按定理假设所作成的级数 $\sum a_pb_q$ 的前 n 项和 C_n. 设 a_p, b_q 的下标 p, q 的最大值为 m. 考虑绝对值级数 $\sum |a_pb_q|$ 的前 m 项和 $\bar{C}_m$. 它的各项全部包含在 $\left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|\cdot\sum_{i=1}^{m}|b_i|\right)$ 中.

因而，设 $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ 的和分别为 $\bar{A}$, $\bar{B}$ 时，有

$$\bar{C}_m\leqslant\sum_{i=1}^{m}|a_i|\cdot\sum_{i=1}^{m}|b_i|<\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|$$
$$=\bar{A}\cdot\bar{B}.$$

从而，$\sum a_pb_q$ 绝对收敛(【定理】4). 令其和为 C.

其次，变更 $\sum a_pb_q$ 各项的顺序，作成下面的新级数

$$a_1b_1+[a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2]+[a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3+a_2b_3+a_1b_3]+\cdots$$

也就是说，作部分和使形成

$$C_1'=a_1b_1=A_1B_1,$$

$$C_4'=a_1b_1+a_2b_1+a_2b_2+a_1b_2=(a_1+b_1)(a_2+b_2)=A_2B_2,$$

$$C'_9=(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)=A_3B_3,\cdots,$$

一般地，$C'_{n^2}=A_nB_n$

(其中，设$\sum a_n$，$\sum b_n$的前n项和分别为A_n，B_n)．

由于$\sum a_pb_q$绝对收敛，故由【定理】14知新级数也收敛(设其和为C')．而且由于$\sum a_n$，$\sum b_n$也收敛，故得

$$C=C'=\lim_{n\to\infty}C'_{n^2}=\lim_{n\to\infty}(A_nB_n)$$
$$=AB.$$

□

8·5　条件收敛级数

【定理】16　如果条件收敛级数$\sum a_n$中的正项，负项依次分别为p_1，p_2，…，$-q_1$，$-q_2$，…，则$\sum p_n$，$\sum q_n$都发散．

证明　当取任意的正数n时，设位于$\sum_{i=1}^{n}a_i$中的正项个数为l，负项的个数为m，则$l+m=n$．

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{l}p_i-\sum_{i=1}^{m}q_i \qquad ①$$

当$n\to\infty$时，$l\to\infty$，$m\to\infty$；当$l\to\infty$，$m\to\infty$时，$n\to\infty$．

(甲)　若$\sum p_i$收敛，则由①式有

$$-\sum_{i=1}^{m}q_i=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{l}p_i. \qquad ②$$

式中若$n\to\infty$，则②式右端收敛．从而左端也收敛．

(乙)　当$\sum q_i$收敛时，同样地，$\sum p_i$也收敛．

(丙)　若$\sum p_i$、$\sum q_i$都收敛，则$\sum|a_i|=\sum p_i+\sum q_i$的右端收敛．从而$\sum a_n$绝对收敛，这与定理的假定矛盾．

□

【定理】17．对于条件收敛级数$\sum a_n$，可适当地改变项的顺序使它收敛于任意的和数，也可变为正无限大或负无限大。

证明 设$\sum a_n$的正项、负项依次为p_1，p_2，…；$-q_1$，$-q_2$ …则由【定理】16，$\sum p_n$，$\sum q_n$同时发散．而且，因为它们是正项级数，故其和变为正的无限大，从而，对于任意的正数u，e，m，存在适当的正数N使

$$p_N+p_{N+1}+\cdots+p_{N+e}>u,$$
$$q_N+q_{N+1}+\cdots+q_{N+m}>u.$$

(1) 改变级数的项的顺序，使其和收敛于任意的数w．

假设把正项p_1、p_2、…依次加到p_α之后和才超过w．在它后面依次加上负项$-q_1$，$-q_2$，…一直加到$-q_\beta$之后，和才变得比w小，在后面又把正项$p_{\alpha+1}$，$p_{\alpha+2}$，…顺次相加，直到$p_{\alpha+r}$之后，和才超过w．其次，又依次加负项$-q_{\beta+1}$，$-q_{\beta+2}$，…直到$-q_{\beta+\delta}$，之后和才变得比w小．由于$\sum p_n$，$\sum q_n$一同变为无限大，故可无限继续下去．这样一来，对于所作成的级数

$$p_1+p_2+\cdots+p_\alpha-q_1-q_2-\cdots-q_\beta+$$
$$+p_{\alpha+1}+\cdots+p_{\alpha+r}-q_{\beta+1}-\cdots-p_{\beta+\delta}+\cdots \qquad ①$$

由于$\alpha,\beta,,r\delta,\cdots$至少等于1，因此$\sum a_n$的任意的项都必然被用过，因而①式是$\sum a_n$中变更了项的顺序后的级数．现在令

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i=A_1,\ A_1-\sum_{i=1}^{\beta} q_i=A_2,$$
$$A_2+\sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+r} p_i=A_3,\ A_3-\sum_{i+1}^{\delta} q_{\beta+i}=A_4,\ \cdots$$

则

$$0<|A_1-w|<p_\alpha,\qquad 0<|w-A_2|<q_\beta,$$
$$0<|A_3-w|<p_{\alpha+r},\qquad 0<|w-A_4|<q_{\beta+\delta},\cdots$$

而且由于$\sum a_n$收敛，故由【定理】3[系]1知$a_n\to 0$．因而当番号无限增大时，p_i和q_i都无限变小，从而级数①收敛于w．

(2) 用同样的方法，可适当变更级数的项的顺序使其部分和的绝对值无限变大． □

8·6 幂级数

【定义】6．幂级数 给定无穷数列a_0，a_1，…，a_n，…时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad ①$$

叫做 x 的幂级数.

【定理】18. 如果幂级数①在 $x=X$ 处收敛，则对于满足 $|x|<|X|$ 的 x 值，①绝对收敛. 如果幂级数①在 $x=X$ 处发散，则对于满足 $|x|>|X|$ 的 x 值，①发散.

证明 如果①式在 $x=X$ 处收敛，则由【定理】3【系】1 知，$\lim_{n\to\infty}(a_n X^n)=0$. 从而，存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，有

$$|a_n X^n|<1,$$

$$\therefore \quad \left|a_n x^n\right| = \left|a_n X^n\right| \cdot \left|\frac{x^n}{X^n}\right| < \left|\frac{x}{X}\right|^n.$$

把级数 $\sum\left|a_n x^n\right|$ 和 $\sum\left|\frac{x}{X}\right|^n$ 作比较. 因为对于满足 $|x|<|X|$ 的 x 值有 $\left|\frac{x}{X}\right|<1$，故等比级数 $\sum\left|\frac{x}{X}\right|^n$ 收敛，从而由【定理】5知，$\sum\left|a_n x^n\right|$ 也收敛，亦即①式绝对收敛.

其次，当①式在 $x=X$ 处发散时，假定对于满足 $|X|<|\bar{x}|$ 的 $\bar{x}$ 值，①式收敛，则对于满足 $|\bar{x}|>|X|$ 的 X 值，①式就应收敛，与定理的假设矛盾. □

【定义】7. 收敛半径 设有某正数 r，使得 $|x|>r$ 时幂级数①发散，$|x|<r$ 时①收敛，则 r 叫做幂级数①的收敛半径.

注意 当 $x=r$，$x=-r$ 时，①不一定收敛. 若对于一切实数 x，①式都收敛，则其收敛半径为 ∞；若只限于 $x=0$ 时①式收敛，则其收敛半径是 0.

【定义】8. 收敛域 使幂级数收敛的所有 x 值的范围，叫做收敛域. 幂级数在它的收敛区间上定义一个函数.

【定理】19. 对于幂级数①，

(1) 若存在 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r$，且 $r\neq0$，则①的收敛半径是 $\frac{1}{r}$.

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$，则对于 x 的一切实数值，①收敛（收敛半径为 ∞）.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$，则仅仅在 $x=0$ 处①收敛(收敛半径为 0)。

证明 对于幂级数①，令 $b_n=a_nx^n(n=1,2,\cdots)$.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=r|x|$(其中 $r>0$). 因而，若 $|x|<\frac{1}{r}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<1$. 从而，根据【定理】9 的【系】，$\sum|b_n|=\sum|a_nx^n|$ 收敛，故 $\sum a_nx^n$ 也收敛.

若 $|x|>\frac{1}{r}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|>1$，因而存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|>1$，$\therefore|b_{n+1}|>|b_n|$.

从而，设 p 是大于 2 的任意自然数，则

$$\left|\frac{b_{N+p}}{b_{N+p-1}}\right|\cdot\left|\frac{b_{N+p-1}}{b_{N+p-2}}\right|\cdots\left|\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}\right|>1,$$

$$\therefore\quad |b_{N+p}|>|b_{N+1}|.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ 不成立. 因而由【定理】3【系】2，$\sum a_nx^n$ 发散. 也就是说，$\frac{1}{r}$ 是收敛半径.

(2) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=0<1$ 对于 x 的一切值都成立.从而对于 x 的一切值，$\sum|a_nx^n|$ 收敛，故 $\sum a_nx^n$ 也收敛.

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|$ 对于除 $x=0$ 以外的一切 x 值都发散，故存在适当的自然数 N，使对于满足 $n>N$ 的一切整数 n，$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|>1$ 成立. 与(1)的后半部分同样地，$\sum a_nx^n$ 发散.

对于 $x=0$，有 $\sum a_nx^n=a_0$，即收敛半径是 0.

【定理】20. 两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad ①$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots \qquad ②$$

具有相同的收敛半径.

证明　设级数①的收敛半径为 r.

(1)　先证明对于满足 $|x|<r$ 的任意 x 值，级数②收敛. 取任意值 x_1 使 $0 \leqslant |x_1| < r$，取 x_2 使 $|x_1| < x_2 < r$. 这时根据假定，在 $x = x_2$ 处①收敛. 因而设 M 为任意正数时，可选择自然数 N_1，使对于满足 $n > N_1$ 的一切 n 值，有　$|a_n x^n| < M$(【定理】3).

从而

$$\left|na_n x_1^{n-1}\right| = \left|na_n x_2^n \frac{1}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1}\right| < \frac{M}{x_2} \cdot n\left|\frac{x_1}{x_2}\right|^{n-1}$$

但是，$\left|\frac{x_1}{x_2}\right|$ 的幂级数 $\sum n\left|\frac{x_1}{x_2}\right|^{n-1}$ 的收敛半径是 1(【定理】9)，因此当 $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1$ 时收敛，从而根据【定理】5，级数 $\sum na_n x_1^{n-1}$ 绝对收敛. 亦即级数②对于满足 $|x|<r$ 的一切值收敛.

(2)　再证明级数②对于满足 $|x|>r$ 的任意 x 值发散.

假定在满足 $|x_3|>r$ 的 x_3 处②收敛，则对于满足 $r < x_4 < |x_3|$ 的值 x_4，②收敛. 从而根据[定理]5，$\sum\left|a_n x_4^{n-1}\right|$ 也收敛，亦即 $\sum a_n x_4^n$ 对于 $x_4 > r$ 绝对收敛，这与级数①的收敛半径是 r 的假设矛盾.

由(1)、(2)知，级数②的收敛半径是 r.　□

【定理】21. 设 $f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n$，$g(x) = \sum_{n=1} na_n x^{n-1}$，这时在两者共同的收敛域内部(也就是说，如果前一级数的收敛半径为 r，则在 $|x|<r$ 内)，有

$$f'(x) = g(x).$$

这叫做 $f(x)$ 在收敛域内部可逐项微分. 亦即

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1} na_n x^{n-1} \quad (|x|<r).$$

证明　两个级数具有相同的收敛半径.(【定理】20). 现取 t 使 $|x|<t<r$，取 h 使 $|x+h|<t<r$. 由于两个级数都绝对收敛，故可自由地变更项的顺序(【定理】14)，利用括号(【定理】1). 从而

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) = \sum_{n=1} a_n\left\{\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right\} \qquad ③$$

由中值定理

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n(x+\theta_n h)^{n-1}\ (0<\theta n<1),$$

$$\therefore\quad \frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n\left\{(x+\theta_n h)^{n-1}-x^{n-1}\right\}$$

$$=(\theta_n h)n(n-1)(x+\alpha_n\theta_n h)^{n-2}\ (0<\alpha_n<1).$$

因此对于一切 n 值

$$\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|<|h|n(n-1)t^{n-2}.$$

由上式及③式得

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|<|h|\sum_{n=2}n(n-1)|a_n|t^{n-2} \qquad ④$$

但是，两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ 具有同样的收敛半径。从而由于 $t<r$，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|t^{n-2}$ 收敛．令其和为 S，则由④式有

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|<|h|S.$$

从而

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right\}=0,$$

即 $\quad f'(x)=g(x).$ □

【系】1．函数 $f(x)=\sum a_nx^n$ 在收敛域内部($|x|<r$)可求导任意多次．

【系】2．若 r 是幂级数 $\sum a_nx^n$ 的收敛半径，则此级数在 $(-r,\ r)$ 定义一连续函数．

证明 可求导的函数是连续的． □

【定理】22．设 $r(>0)$ 是 $\sum_{n=0} a_nx^n$ 的收敛半径，t 是 $(-r,\ r)$ 中的任意值．则

$$\int_0^t\left(\sum_{n=0}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}$$

这叫做幂级数在其收敛域内部可逐项积分．

证明　$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 和 $f(x)=\sum_{n=0}a_nx^n$ 具有同样的收敛半径r，而且根据【定理】21，当$|x|<r$时，$F'(x)=f(x)$成立. 又由【定理】21【系】2，$f(x)$在$|x|<r$内是连续函数，因此当t位于$|x|<r$内时，

$$\int_0^t\left(\sum_{n=0}a_nx^n\right)dx=\left[F(x)\right]_0^t=\sum_{n=0}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}.$$ □

【定理】23. 如果幂级数$\sum_{n=0}a_nx^n$在包含$x=0$的区间I上收敛于函数$f(x)$，则此幂级数就是$f(x)$的马克劳林级数.

证明　在包含$x=0$的区间I，令

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

则　$a_0=f(0)$.

由于在I内可逐项求导(【定理】21)，故

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$\therefore$　$a_1=f'(0)$.

以下同样地，对于任意的正整数n,

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$ □

注意　这个定理表明：给定函数的幂级数展开式是唯一确定的。

8·7　各种级数的例题

例题1. 等差级数是发散的.

解　设等差级数的首项为a，公差为$d(>0)$，通项为a_n.

对于任意给定的正数G，令$N=\left[\frac{G-a}{d}\right]+2$，则对于满足$n>N$的一切整数$n$，有

$$a_n=a+(n-1)d>\frac{G-a}{d}\cdot d+a=G.$$

因而，等差级数变为正的无穷大.

同样可证，当公差为负时，变为负的无穷大.

例题2. 公比为r的等比级数

$$\sum_{n=0}r^n=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots$$

(1)　若 $|r|<1$ 则收敛，且其和为 $\frac{1}{1-r}$；

(2)　若 $r\geqslant1$ 则发散；

(3)　若 $r\leqslant-1$ 则振动。

证明　前 n 项和

$$S_n=1+r+\cdots+r^{n-1}=\begin{cases}\frac{1-r^n}{1-r} & (r\neq1\text{ 时}),\\ n & (r=1\text{ 时}).\end{cases}$$

∴根据§6.【定理】9

(1)　若 $|r|<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-r}$.

(2)　若 $r>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=+\infty$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$；

若 $r=1$，则 $S_n=n$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$.

(3)　若 $r\leqslant-1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n$ 振动，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 也振动。

例题3. 泛调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$（$p$ 是正常数）在 $p>1$ 时收敛，而在 $0<p\leqslant1$ 时发散。

证明　令 $f(x)=\frac{1}{x^p}(x>0)$. $f(x)$在区间 $x\geqslant1$ 单调减少且连续，而且由于恒有$f(x)>0$，故由【定理】6，级数 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^p}$ 的收敛发散与积分 $\int_1^{\infty}f(x)dx$ 的收敛发散一致。

(1)　当 $p>1$ 时，$\int_1^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{k\to\infty}\left[x^{1-p}\right]_1^k$

$$=\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^{p-1}}-1\right\}=\frac{1}{p-1}.$$

(2)　当 $p=1$ 时，$\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{K\to\infty}\left[\ln x\right]_1^k=+\infty$.

(3)　当 $0<p<1$ 时，$\int_1^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{1-p}\lim\limits_{k\to\infty}\left[x^{1-p}\right]_1^k$

$$=\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{k\to\infty}k^{1-p}-1\right\}=\infty.$$

注意　泛调和级数又叫做 p-级数，当 $p=1$ 时叫做**调和级数**，调和级数是发散的级数。

例题4. 设 a，b 为正的常数．级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$$

$$=1+\frac{a+1}{b+1}+\frac{(a+1)(2a+1)}{(b+1)(2b+1)}+\frac{(a+1)(2a+1)(3a+1)}{(b+1)(2b+1)(3b+1)}+\cdots$$

在 $a\geqslant b$ 时发散，在 $a<b$ 时收敛，此级数称为超越几何级数．

证明　设 u_n 是这个级数的通项，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{na+1}{nb+1},\qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{b}.$$

从而，由【定理】9 的【系】知，当 $a>b$ 时发散，$a<b$ 时收敛．

当 $a=b$ 时，通项变为 $u_n=1$，因而发散(【定理】3，【系】2)．

注意　使用【定理】5、6、7 时，作为比较的级数，大多使用例题 2、3、4 的级数．

例题5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}$ 对于正整数 k 恒收敛．

证明　令 $u_n=\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}$，$v_n=\frac{1}{n^{1+k}}$．这时，对于一切 n，有 $u_n<v_n$．这是例题 3 在 $p>1$ 的情形．因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k}}$ 收敛．从而，由【定理】5，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛．

例题6. 试考查级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 是收敛还是发散．

解　把它和收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 相比较．由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/2^n)}{(\pi/2^n)}=1$，故此级数也收敛(【定理】7)．

§9. 小数·连分数

作为数列、级数的应用，我们讨论用小数，连分数表示实数的问题．

9·1 p 进　制

【定理】1. 对于任意两个正整数 q，$p(p>1)$，q 可唯一地表为下列形式

$$q=a_0+a_1p+a_2p^2+\cdots+a_np^n, \quad ①$$

其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 是整数，且 $0\leqslant a_i<p$.

证明　设 q 用 p 除的整商为 q_1，余数为 a_0；q_1 用 p 除后的整商为 q_2，余数为 a_1；…；继续除下去直到商变得比 p 小为止，便得到上述表达式，而且各 a_i 唯一地确定. □

【定理】2. 设 p 是大于 1 的整数. 若既约分数 $\frac{r}{q}$ 满足 $0<\frac{r}{q}<1$，则它可表为下列形式

$$\frac{r}{q}=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}+\cdots \quad ②$$

其中 $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是整数且 $0\leqslant b_i<p$.

当②式右端是有限级数 $\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}$ 时，$\frac{r}{q}$ 还可表示为无限级数的形式：

$$\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\frac{b_3}{p^3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{b_n-1}{p^n}+(p-1)\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^i} \quad ③$$

在其他情形下，仅可表示成一种.

证明　设用 q 除 pr 后的整商为 b_1，余数为 r_1，则由于 $r<q$，故 $b_1<p$，$0\leqslant r_1<q$. 其次，设用 q 除 pr_1 后的整商为 b_2，余数为 r_2，则 $b_2<p$，$0\leqslant r_2<q$. 如此继续下去，得

$$\begin{cases} pr=b_1q+r_1, \\ pr_1=b_2q+r_2, \\ pr_2=b_3q+r_3, \end{cases} \quad 其中\begin{cases} 0\leqslant r_1,r_2,\cdots<q, \\ 0\leqslant b_1,b_2,\cdots<p. \end{cases} \quad ④$$

由此便得整数数列 $\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$.

根据④式，

$$p\cdot\frac{r}{q}=b_1+\frac{r_1}{q},$$

$$p\cdot\frac{r_1}{q}=b_2+\frac{r_2}{q},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$p\cdot\frac{r_{n-1}}{q}=b_n+\frac{r_n}{q},$$

从而

$$\frac{r}{q}=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\frac{b_3}{p^3}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}+\frac{1}{p^n}\cdot\frac{r_n}{q}.$$

因此，令$a_n=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}$时，数列$\{a_n\}$收敛于$\frac{r}{q}$.这是因为

$\left|\frac{r}{q}-a_n\right|=\left|\frac{1}{p^n}\cdot\frac{r_n}{q}\right|<\frac{1}{p^n}$，且$p>1$，故可充分增大$n$而使$\frac{1}{p^n}$任意地减少.

也就是说，$\frac{r}{q}$可表示成

$$\frac{r}{q}=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}+\cdots$$

其次，假定$\frac{r}{q}$可表示成下列两种形式

$$\frac{r}{q}=\frac{b_1}{p}+\frac{b_2}{p^2}+\cdots+\frac{b_n}{p^n}+\cdots,\ 0\leqslant b_i<p, \qquad ⑤$$

$$\frac{r}{q}=\frac{C_1}{p}+\frac{C_2}{p^2}+\cdots+\frac{C_n}{p^n}+\cdots,\ 0\leqslant C_i<p, \qquad ⑥$$

由⑤式减去⑥式再乘以p得

$$b_1-c_1=\frac{c_2-b_2}{p}+\frac{c_3-b_3}{p^2}+\cdots \qquad ⑦$$

$$\therefore\ |b_1-c_1|\leqslant\frac{|b_2-c_2|}{p}+\frac{|b_3-c_3|}{p^2}+\cdots$$

$$\leqslant(p-1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)=1. \qquad ⑧$$

由⑦式和⑧式看来，当$c_i-b_i(i\geqslant2)$恒等于$p-1$或$1-p$时，⑧式中的等号成立。但因$0\leqslant b_i$，$c_i<p(i=1,2,\cdots)$，所以⑧式中的等号仅限于$b_i=p-1$，$c_i=0(i=2,3,\cdots)$或$c_i=p-1$，$b_i=0(i=2,3,\cdots)$的情形下成立。其他的情形是$|b_1-c_1|<1$，$\therefore b_1=c_1$.

若　$b_1=c_1$，则对于

$$b_2-c_2=\frac{c_3-b_3}{p}+\frac{c_4-b_4}{p^2}+\cdots$$

进行同样考察，由此继续下去即可断定仅当对于某一适当的正整数n，或者$b_1=c_1$，$b_2=c_2$，$\cdots$，$b_{n-1}=c_{n-1}$，$b_n=c_n+1$，$b_{n+k}=0$，$c_{n+k}=p-1(k=1,2,\cdots)$；或者$b_1=c_1$，$b_2=c_2$，$\cdots$，$b_{n-1}=c_{n-1}$，$c_n=b_n+1$，$c_{n+k}=0$，$b_{n+k}=p-1$ $(k=1,2,\cdots)$时，$\frac{r}{q}$才有两种表示方法。 □

【定义】1．p 进制．底 当整数表示成①的形式，分数表示成②的形式时，就说它们是用 p 进制表示的，记成

$$q=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n\},\ \frac{r}{q}=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\},$$ p叫做底．这时，也称$\frac{r}{q}$为以 p 作底的小数表示．

注意 日常使用的是十进制，但在大型计算机中使用二进制．

9·2　循环小数

本节考察以 p 为底的小数．

【定理】3． 既约分数$\frac{r}{q}$可用有限小数表示的充分必要条件是 q 的质因数都为 p 的约数．

证明 再一次运用在【定理】2 的证明中所用过的(4)式．

$$pr=b_1q+r_1,\quad pr_1=b_2q+r_2,\quad pr_2=b_3q+r_3,\quad\cdots$$
$$pr_{k-1}=b_kq+r_k.$$

式中　$0\leqslant r_1,\ r_2,\cdots r_k<q$,

$$\therefore pr_{k-1}\equiv r_k\pmod q,$$
$$\therefore r_m\equiv pr_{m-1}\equiv p^2r_{m-2}\equiv\cdots\cdots\equiv p^mr\pmod q.\qquad①$$

$\frac{r}{q}$可用有限小数表示的充分必要条件是，对于某个适当的正整数 m，有 $r_m=0$．

当 $r_m=0$ 时，由①式得 $p^mr\equiv0\pmod q$．

由于 r 和 q 互质，故 $p^m\equiv0\pmod q$．　②

从而，q 的所有质因数都必定是 p 的约数．

反之，若 q 的质因数都是 p 的约数，则当 m 是充分大的正整数时，②式被满足，从而 $r_m\equiv p^mr\equiv0\pmod q$，但是，由于 $0\leqslant r_m<q$，故仅当 $r_m=0$时，$r_m\equiv0\pmod q$成立．□

注意 $A-B$ 是 q 的倍数，可写成 $A\equiv B\pmod q$．

【系】 既约分数$\frac{r}{q}$可用底为 10 的有限小数表示的充分必要条件是：q的质因数只有 2 和 5．

证明 在【定理】3 中，$p=10=2.5$．□

【定理】4． 当 q 的质因数不是 p 的约数时，若用底为 p 的小数表示既约分数$\frac{r}{q}\left(0<\frac{r}{q}<1\right)$则满足

$$\frac{r}{q}=\left\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{m-h},\ \overline{b_{m-h+1},\cdots,b_m},\ \overline{b_{m-h+1}\cdots,\ b_m}\cdots\right\}$$

的 h 个数(带有横线的部分)，可循环地出现。

证明 当 q 的质因数不是 p 的约数时，若用底为 p 的小数表示 $\frac{r}{q}$，则由【定理】3. $\frac{r}{q}$ 为无限小数 当建立起与【定理】2 的证明中的④ 式相同的式子时，设所得商的数列为 $\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$，设余数的数列为 $\{r_1,\ r_2\cdots\}$。由于余数 $r_i(i=1,\ 2\cdots)$ 都是比 q 小的正整数，故其中必有相等的。例如，设 $r_m=r_{m-h}$，这时有

$$pr_m=b_{m+1}q+r_{m+1},\quad pr_{m-h}=b_{m-h+1}q+r_{m-h+1},$$

$$pr_{m+1}=b_{m+2}q+r_{m+2},\quad pr_{m-h+1}=b_{m-h+2}q+r_{m-h+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,\quad \cdots\cdots\cdots,$$

$$\therefore\quad b_{m+1}=b_{m-h+1},\quad b_{m+2}=b_{m-h+2},\quad \cdots,\quad b_{m+h}=b_m.$$

因而，在 $\frac{r}{q}=\{b_1,\ b_2,\ \cdots\}$ 中，$\{b_{m-h+1},\ b_{m-h+2},\ \cdots,\ b_m\}$ 形成的 h 个数可循环地出现。 □

【定义】2. 循环小数、循环节、纯循环小数、混循环小数 如一个小数具有【定理】4 那样的循环部分就叫做循环小数，它的最小循环部分叫做循环节。在循环节内的位数，叫做循环节的大小。从小数点右边第一位 b_1 就开始循环的小数，叫做纯循环小数，从小数点右边第二位或以后某一位才开始循环的小数，叫做混循环小数。

【定理】5. 当既约分数 $\frac{r}{q}$ 可用以 p 为底的循环小数表示时，$r_m=r_{m-h}$(见【定理】4 的证明)的充分必要条件是

$$p^{m-h}(p^h-1)\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ q).$$

证明 从【定理】3 的证明中的①式，有

$$r_m\equiv p^m r,\quad r_{m-h}\equiv p^{m-h}r\quad (\mathrm{mod}\ q). \tag{③}$$

但是，因为 $r_m=r_{m-h}$，r 和 q 互质，所以 $p^m\equiv p^{m-h}$ $(\mathrm{mod}\ q)$.

$$\therefore p^{m-h}(p^h-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q). \tag{④}$$

反之，当④式成立时，由③式得 $r_m\equiv r_{m-h}$ $(\mathrm{mod}\ q)$，但是，因为 $|r_m-r_{m-h}|<q$，所以 $r_m=r_{m-h}$，这时变为循环小数。

【定理】6. 假设既约分数 $\frac{r}{q}\left(0<\frac{r}{q}<1\right)$ 可用以 p 为底的循环小数表示，若 p 和 q 互质，则 $\frac{r}{q}$ 变为纯循环小数，若不互质，则 $\frac{r}{q}$ 变为混循环小数。

证明 假如 $\frac{r}{q}$ 变为循环小数，而循环节大小为 h，则由【定理】5 有

$$p^{m-h}(p^h-1)\equiv 0 \pmod q, \quad ⑤$$

从而，如果 p 和 q 互质，则

$$p^h\equiv 1 \pmod q. \quad ⑥$$

因此，可以取满足⑥式的最小正整数为 h，m 可以是任意的，但其最小值是 $m=h$，这时循环节从 b_1 开始，亦即变为纯循环小数.

如果 p 和 q 不互质，则不能有 $m=h$. 这是因为若 $m=h$，则由⑤式得 $p^h\equiv 1 \pmod q$. 从而，若令 p 和 q 的公约数为 k，则得 $0\equiv 1 \pmod k$，与上面相矛盾.

从而，这种情形下的循环节不从 b_1 开始. 也就是说，是混循环小数. □

【系】 当 $p=10$ 时，令 $q=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot t$（$t$ 是与 10互质的整数），

若 $t=1$，则 $\frac{r}{q}$ 是有限小数.

若 $\alpha=\beta=0$，则 $\frac{r}{q}$ 是纯循环小数，循环节大小 h 是满足 $10^h\equiv 1 \pmod t$ 的最小正整数.

若 $t>1$，α，β 中至少有一个不为0，且令 h 为满足

$$\max(\alpha,\beta)=r,\quad 10^h\equiv 1 \pmod t$$

的最小正整数，则循环节从 b_{r+1} 开始，其大小是 h.

证明 由【定理】3，5，6，可证. □

【定理】7. 有限小数是有理数，循环小数也是有理数.

证明 由于有限小数是有限个分数的和，故为有理数.

假设 $\alpha=\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ 表示循环小数（底为 p），设其循环节为 $(a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+h+1})$，则对于一切非负的整数 l，有

$$a_{m+l}=a_{m+h+l}, \quad ①$$

$$\alpha=\left(a_0+\frac{a_1}{p}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{p^{m-1}}\right)+\frac{a_m}{p^m}+\cdots+\frac{a_{m+h-1}}{p^{m+h-1}}+\frac{a_{m+h}}{p^{m+h}}+\cdots \quad ②$$

$$\therefore p^h\alpha=\left(a_0+\frac{a_1}{p}+\cdots+\frac{a_{m+h-1}}{p^{m+h-1}}\right)p^h+\frac{a_{m+h}}{p^m}+\frac{a_{m+h+1}}{p^{m+1}}+\cdots \quad ③$$

由①，②，③，得

$$p^h\alpha-\alpha=\left(a_0+\frac{a_1}{p}+\cdots+\frac{a_{m+h-1}}{p^{m+h-1}}\right)p^h$$
$$-\left(a_0+\frac{a_1}{p}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{p^{m-1}}\right).\qquad ④$$

④式右端是有理数，而左端是$(p^h-1)\alpha$，故α也是有理数. □

9·3 用小数作实数的分类

【定理】8. 实数可用小数(底是比1大的任意整数)表示，反之，用小数表示的数是实数.

证明 取正实数α和自然数$p(p>0)$依次进行下列计算，[ ]是高斯记号.

$$a_0=[\alpha],\ \alpha_1=\alpha-a_0;\ a_1=[p\,\alpha_1],\ \alpha_2=p\,\alpha_1-a_1;$$
$$a_2=[p\,\alpha_2],\ \alpha_3=p\,\alpha_2-a_2;\cdots.$$
$$a_n=[p\,\alpha_n],\ \alpha_{n+1}=p\,\alpha_n-a_n;\cdots.$$

由此，依次确定整数a_0，a_1，$a_2\cdots$. a_0是0或正整数，由于α_1，α_2，…都是比1小的正数，故a_i是满足$0\leqslant a_i<p(i=1,2\cdots)$的整数.

从而 $\alpha=a_0+\alpha_1$，$\alpha_1=\dfrac{a_1}{p}+\dfrac{\alpha_2}{p}$，$\dfrac{\alpha_2}{p}=\dfrac{a_2}{p^2}+\dfrac{\alpha_3}{p^2}$，…

$$\therefore\quad \alpha=a_0+\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_n}{p^n}+\frac{\alpha_{n+1}}{p^n}.$$

从而，α和分数$b_n=a_0+\dfrac{a_1}{p}+\dfrac{a_2}{p^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{p^n}$的差$\dfrac{\alpha_{n+1}}{p^n}$比$\dfrac{1}{p^n}$小.

由于$p\geqslant 2$，因此，如果使n充分大，则$\dfrac{1}{p^n}$可小于任意给定的正数ε，也就是说，数列$\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ \cdots\}$收敛于极限值$\alpha$，

$$\therefore \alpha=a_0+\frac{a_1}{p}+\cdots+\frac{a_n}{p^n}+\cdots$$

亦即正实数α可用以p作底的小数$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots a_n\cdots\}$表示.

反之，当给定以p作底的正小数$\{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$时，令$a_0+\dfrac{a_1}{p}+\dfrac{a_2}{p^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{p^n}=b_n$，则由于$b_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$恒为有理数，$0\leqslant a_i<p(i=n+1,\ n+2,\ \cdots)$且$p>1$，所以当$m$为大于$n$的整数时，

$$b_m-b_n=\frac{a_{m+1}}{p^{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{a_m}{p^m}<\sum_{i=n}^{m-1}\frac{p}{p^{i+1}}$$

$$=\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{p^i}=\frac{1}{p^n}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^{m-n}}{\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$<\frac{1}{p^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^{n-1}(p-1)}.$$

因而，使 n 充分大时，这个不等式的右端从而左端其绝对值可变为任意小．因此，根据§6.【定理】6，有理数列 $\{b_n\}$ 收敛于实数．亦即小数 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 表示实数．

当 α 是负实数时，对于它的绝对值可按上述办法同样证明． □

【定理】9．用小数表示实数时，此实数为有理数的充分必要条件是：那个小数是有限小数或循环小数

证明　必要性由【定理】1，2，3，4，可证；充分性由【定理】7 可证

【系】　用小数表示实数时，此实数为无理数的充分必要条件是：那个小数是无限不循环小数．

证明　因为不是有理数的实数叫做无理数，所以由【定理】8 和 9 得证． □

[用小数作实数的分类]

小数 { 有限小数、循环小数 } ⇄ 有理数；无限不循环小数 ⇄ 无理数；有理数、无理数 } 实数。

9·4　连分数

在 9·3 中介绍了用小数来表示实数．现介绍与此相似的用连分数来表示实数的理论．

设 α 为任意正实数，依次进行下列计算，此计算在 α_n 变为整数时停止，〔　〕是高斯记号．

$$a_0=[\alpha],\ \alpha_1=\frac{1}{\alpha-a_0};\quad a_1=[\alpha_1],\ \alpha_2=\frac{1}{\alpha_1-a_1},$$

$$a_2=[\alpha_2],\ \alpha_3=\frac{1}{\alpha_2-a_2};\ \cdots\cdots$$

$$a_n=[\alpha_n],\ \alpha_{n+1}=\frac{1}{\alpha_n-a_n},\ \cdots$$

由这一连串的计算唯一确定整数列 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$，$a_0$ 是零或正整数．

但因 $\alpha_i>1(i=1, 2, \cdots)$，故 $a_i(i=1, 2, \cdots)$是正整数. 由上面的计算得

$$\alpha=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots\, a_n+\cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}. \quad ①$$

上式可简写成下列形式：

$$\alpha=a_0+\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{\alpha_{n+1}}. \quad ②$$

或　$\alpha=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_{n+1}]$. ③

【定义】3. 连分数，有限连分数，无限连分数　用①式表示的分数叫做连分数，若对于某整数 n，α_n 变成了整数时，此分数叫做有限连分数. 否则叫做无限连分数.

例　把 $\alpha=\sqrt{2}$ 展开成连分数.

解　$a_0=[\alpha]=[\sqrt{2}]=1$，$\alpha_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$,

$\therefore a_1=[\alpha_1]=2, \alpha_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$,

$\therefore a_2=2$，$\alpha_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1, \cdots$，$a_i=2$,

$\alpha_{i+1}=\sqrt{2}+1(i\geqslant 1)$

$\therefore \sqrt{2}=1+\dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{2+}\cdots=[1, 2, 2, 2, \cdots]$.

【定理】10. 有理数可用有限连分数表示；反之，有限连分数表示的是有理数.

证明　设 $\dfrac{a}{b}$ 是正有理数，a、b 为互质的正整数，对分母、分子施行欧几里得辗转相除法，得

$a=bq_1+r_1$，　其中　$0<r_1<b$；

$b=r_1q_2+r_2$，　　　$0<r_2<r_1$；

$$r_1=r_2q_3+r_3,\qquad 0<r_3<r_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1},\qquad 0<r_{n+1}<r_n;$$
$$r_n=r_{n+1}q_{n+2},\qquad r_{n+1}=1.$$

a 和 b 的最大公约数是 1，必然是上列形式．把它改写成

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{r_1}{b}，其中 q_1=\left[\frac{a}{b}\right],$$

$$\frac{b}{r_1}=q_2+\frac{r_2}{r_1},\quad q_2=\left[\frac{b}{r_1}\right],$$

$$\frac{r_1}{r_2}=q_3+\frac{r_3}{r_2},\quad q_3=\left[\frac{r_1}{r_2}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_{n+1}+\frac{1}{r_n},\quad q_{n+1}=\left[\frac{r_{n-1}}{r_n}\right],$$

$$r_n=q_{n+2}.$$

则$\frac{a}{b}$可用下列有限连分数表示：

$$\frac{a}{b}=q_1+\frac{1}{q_2+}\ \frac{1}{q_3+}\cdots\frac{1}{q_{h+2}}.$$

至于负有理数，可以对它的绝对值作同样的处理．

反之，有限连分数显然是有理数。 □

【定义】4．第 k 近似分数　在把正实数 α 用连分数②表示时，分数

$$\frac{P_K}{Q_k}=a_0+\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_k}\ (Q_k>0)$$

叫做在 α 的连分数展开式中的第 k 近似分数，简称为 α 的第 k 近似分数，这里设 P_k，Q_k 互质．

【定理】11．对于近似分数的分母、分子，下列各式成立($n\geqslant2$)：

$$P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2};\qquad ④$$
$$Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2};\qquad ⑤$$
$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n-1}.\qquad ⑥$$

证明　由定义有

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{a_0}{1},\quad \frac{P_1}{Q_1}=a_0+\frac{1}{a_1}=\frac{a_0a_1+1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=a_0+\frac{1}{a_1+}\frac{1}{a^2}=\frac{a_0a_1a_2+a_0+a_2}{a_1a_2+1},$$

从而，$P_0=a_0$，$Q_0=1$；由于 a_1 和 a_0a_1+1 互质，故 $P_1=a_0a_1+1$，$Q_1=a_1$. 又因

$a_0a_1a_2+a_0+a_2=a_0(a_1a_2+1)+a_2$ 和 a_1a_2+1 也是互质的，故

$$P_2=a_0a_1a_2+a_2+a_0,\quad Q_2=a_1a_2+1,$$

$$\therefore P_2=a_2P_1P_0,\quad Q_2=a_2Q_1+Q_0.$$

亦即当 $n=2$ 时，④，⑤式成立

现在用数学归纳法来证明④、⑤式对于任意的自然数 $n(n\geqslant 2)$ 也成立。为此，假定④、⑤式对小于 m 的任意自然数 n 成立：

$$P_n=a_nP_{n-1}+P_{n-2},\quad Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2}(n\leqslant m), \tag{7}$$

根据定义，$\frac{P_{n+1}}{Q_{m+1}}$ 等于把 $\frac{P_m}{Q_m}$ 中的 a_m 换成 $a_m+\frac{1}{a_{m+1}}$ 后所得的表达式，但由⑦式，有

$$\frac{P_m}{Q_m}=\frac{a_mP_{m-1}+P_{m-2}}{a_mQ_{m-1}+Q_{m-2}},$$

再由于 P_{m-1}，P_{m-2}，Q_{m-1}，Q_{m-2} 与 a_m 无关，故

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}=\frac{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)P_{m-1}+P_{m+2}}{\left(a_m+\frac{1}{a_{m+1}}\right)Q_{m-1}+Q_{m-2}}$$

$$=\frac{(a_mP_{m-1}+P_{m-2})a_{m+1}+P_{m-1}}{(a_mQ_{m-1}+Q_{m-2})a_{m+1}+Q_{m-1}}=\frac{a_{m+1}P_m+P_{m-1}}{a_{m+1}Q_m+Q_{m-1}}. \tag{8}$$

但是，右端的分母、分子 $\bar{Q}=a_{m+1}Q_m+Q_{m-1}$，$\bar{P}=a_{m+1}P_m+P_{m-1}$ 是互质的，这是因为：对于 $n\leqslant m$，⑦式成立，因此把它代入时，有

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(a_nP_{n-1}+P_{n-2})Q_{n-1}$$
$$-P_{n-1}(a_nQ_{n-1}+Q_{n-2})=-(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1}).$$

上式对于满足 $2\leqslant n\leqslant m$ 的一切自然数 n 成立，因此把它重复使用 $n-1$ 次，降低 n 的值时，得

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n-1}(P_1Q_0-P_0Q_1)=(-1)^{n-1}. \tag{9}$$

但是 $\bar{P}Q_m-P_m\bar{Q}=-(P_mQ_{m-1}-P_{m-1}Q_m)=(-1)^m$(根据⑨)，因而，$\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 是互质的

因为 a_1，a_2，$\cdots\geqslant 1$，故 Q_1，Q_2，$\cdots$，$Q_m>0$，

$$\therefore \bar{Q}>0.$$

因而，由⑧式得

$$P_{m+1}=a_{m+1}+P_{m-1},\quad Q_{m+1}=a_{m+1}Q_m+Q_{m-1}.$$

在以上讨论中用数学归纳法证明了，④、⑤式对于 2 以上的任意自然数都成立，正如由⑦式推导⑨式那样，由④和⑤式可导出⑥式． □

【定理】12．无理数 α 可展开成无限连分数，其表示方法只有一种，若它的第 n 近似分数为 $\frac{P_n}{Q_n}$，则下列两式成立．

$$\frac{P_0}{Q_0}<\frac{P_2}{Q_2}<\frac{Q_4}{Q_4}<\cdots<\alpha<\cdots<\frac{P_5}{Q_5}<\frac{P_3}{Q_3}<\frac{P_1}{Q_1},$$

$$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|.$$

证明　用 9·4 中最初的方法把 α 展开成连分数时，由【定理】10 知，α 为无限连分数，其表示方法只有一种．根据【定义】4，在 $\frac{P_n}{Q_n}$ 中，用 $a_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}}$ 代替 a_n 后，所得的式子就等于 α．

另外，正如在前面的证明中看到的，④、⑤式即使在 a_n 不是整数时也成立，因此

$$\alpha=\frac{\left(a_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)P_{n-1}+P_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)Q_{n-1}+Q_{n-2}}=\frac{\alpha_{n+1}P_n+P_{n-1}}{\alpha_{n+1}Q_n+Q_{n-1}},\qquad ⑩$$

$$\therefore \alpha-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}}{Q_n(\alpha_{n+1}Q_n+Q_{n+1})}=\frac{(-1)^n}{Q_n(\alpha_{n+1}Q_n+Q_{n-1})}.\ (根据⑥)$$

$$\therefore\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\frac{1}{Q_n(a_{n+1}Q_n+Q_{n-1})}=\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}<\frac{1}{Q_n^2}.$$

（∵由⑤式，$Q_n<Q_{n+1}$）

由⑩式去分母，得

$$\alpha_{n+1}(Q_n\alpha-P_n)=-(Q_{n-1}\alpha-P_{n-1}).$$

但由于 $\alpha_{n+1}>1$，故 $Q_n\alpha-P_n$ 和 $Q_{n-1}\alpha-P_{n-1}$ 的符号相反，其绝对值

$$|Q_n\alpha-P_n|<|Q_{n-1}\alpha-P_{n-1}|.$$

因而　$\left|\alpha-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|.$

并且　$\alpha-\frac{P_n}{Q_n}$ 和 $\alpha-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ 的符号相反．

由于$\alpha-\frac{P_0}{Q_0}=\alpha-a_0>0$，所以数列$\left\{\frac{P_0}{Q_0},\frac{P_2}{Q_2}\cdots,\frac{P_{2n}}{Q_{2n}},\cdots\right\}$单调增加，数列$\left\{\frac{P_1}{Q_1},\frac{P_3}{Q_3},\cdots,\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}},\cdots\right\}$单调减少，$\alpha$夹在这两个数列之中，从而结论成立． □

【定理】13．无限连分数表示无理数。

证明　设$\frac{P_n}{Q_n}$是任意无限连分数。

$$a+\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+\cdots}$$

的第n近似分数．其中，$a_i\geqslant1$（i是任意自然数），这时④、⑤、⑥式成立．

由$a_i\geqslant1(i=1,2\cdots,n)$和⑤式得，$Q_i>0(i=1,2,\cdots)$．且

$$Q_n=a_nQ_{n-1}+Q_{n-2}>a_nQ_{n-1}\geqslant Q_{n-1}.$$

但是

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_nQ_{n-1}-Q_nP_{n-1}}{Q_nQ_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{Q_nQ_{n-1}}\ (\text{根据⑥}),\quad ⑪$$

$$\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}=\frac{P_nQ_{n-2}-Q_nP_{n-2}}{Q_nQ_{n-2}}$$

$$=\frac{(a_nP_{n-1}+P_{n-2})Q_{n-2}-(a_nQ_{n-1}+Q_{n-2})P_{n-2}}{Q_nQ_{n-2}}$$

$$=\frac{a_n(P_{n-1}Q_{n-2}-Q_{n-1}P_{n-2})}{Q_nQ_{n-2}}=\frac{(-1)^na_n}{Q_nQ_{n-2}}(\because ⑥).\quad ⑫$$

由⑫式得

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}<\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}},\quad \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}>\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}.$$

（n是任意的整数）

从而，数列$\left\{\frac{P_0}{Q_0},\frac{P_2}{Q_2},\frac{P_4}{Q_4},\cdots,\frac{P_{2n}}{Q_{2n}},\cdots\right\}$

单调增加，而$\left\{\frac{P_1}{Q_1},\frac{P_3}{Q_3},\cdots,\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\cdots\right\}$

单调减少，但是由⑪式，有

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}>0.$$

$\therefore \frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{p_1}{Q_1}$($n$是任意的自然数)．因而，数列 $\left\{\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \cdots\right\}$有上界，而数列$\left\{\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \cdots, \frac{P_{2n+1}}{Q_{4n+1}}, \cdots\right\}$有下界，故由§6.【定理】5知，它们都收敛．

又因　$Q_n = a_nQ_{n-1} + Q_{n-2} > 2Q_{n-2}$,

$\therefore Q_{2n} > 2Q_{2n-2} > 2^2Q_{2n-4} > \cdots > 2^2Q_0 = 2^n$,

$Q_{2n+1} > 2Q_{2n-3} > 2^2Q_{2n-5} > \cdots > 2^nQ_1 = 2^n$.

从而，根据⑪式得

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} < \frac{1}{2^{2n}}.$$

若n充分大，则上式右端从而左端可任意地小．因此，两个收敛数列

$$\left\{\frac{P_0}{Q^0}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \cdots\right\} 和 \left\{\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \cdots \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \cdots\right\}$$

收敛于同一实数，令此实数为2，根据§6．【定理】7，数列 $\left\{\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \cdots, \frac{P_n}{Q_n}, \cdots\right\}$收敛，其极限值是2．在无限连分数的情形下，根据【定理】10，2不是有理数而是无理数．　□

【用连分数表示的实数的分类】

连分数 { 有限连分数 ⇄ 有理数 ; 无限连分数 ⇄ 无理数 } 实数．

§10．复数数列·级数

10·1　复数数列

直至§9为止，我们在实数范围内进行了讨论，而在§10中，要处理复数数列，在这里，我们要考察在前述的定义、定理中间，哪一些还成立，哪一些不再成立．

为此，先列举两个必要的复数性质(参照第六章)．

[1]　全体复数的集合构成域，即对于四则运算是封闭的(这点与实数是相同的)．

[2]　复数不能比较大小(这点与实数不同)，但由于复数的模是实数，故复数的模可比较大小．

假如同样用§1的【定义】1定义复数数列和实数数列，从上面两个性质看到，前述的定理、定义，对于复数数列变为下面的形式.（无穷数列，无穷级数见10·2）.

（甲） 定义、定理原封不动成立的有

1·1中数列的定义，§2中等差数列，§3中等比数列，§4中各种数列及其和，§7中递推公式，这些都仅仅与四则运算有关，因此根据[1]成立.

（乙） 不再成立的有

1·2中单调数列，1·3有上(下)界的数列…，根据[2]不再成立.

§9中小数连分数…仅仅与实数有关，因此，根据【2】不再成立.

（丙） 经修改后成立的有

1·3中有界数列的定义……有必要改成下面的定义：

【定义】1. 有界数列 所有项的绝对值(模)不超过某正常数的数列，叫做有界数列.

（丁） 其他

§5中数学归纳法是以自然数的性质为基础的推理形式，它本身与实数或复数没有关系，不言而喻，所处理的数也可以是复数.

10·2 复数数列、级数的收敛性

复数数列极限的定义，与实数数列一样，采用§6的【定义】1.

由于不能比较大小，所以正负无穷大的定义，上下界、上下确界的定义以及与它们有关的§6【定理】3⑤,⑥;【定理】4,5,8,9，都不成立.

无穷大的定义修改成下面的形式：

【定义】2. 无穷大 如果对任意给定的正数G，存在自然数N，使得对于满足$n>N$的一切整数n，$|a_n|>G$成立，这时，称数列$\{a_n\}$变为无穷大，记成.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty.$$

这时下列定理成立.

【定理】1. (1) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(有限常数).

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$；

(3) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A\neq 0$（有限常数）或 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ 时；

若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\infty$.

证明　由数列收敛性的定义和无限大的【定义】2，显然成立．　□

关于复数数列与实数数列之间的关系、有下列定理：

【定理】2. 设有复数数列 $\{C_n\}$ 和一个复数 C，如果令 C_n 的实部为 a_n，虚部为 b_n，C 的实部为 a，虚部为 b，则

$C_n\to C$ 的充分必要条件是 $a_n\to a$，且 $b_n\to b$.

证明

因　$|C_n-C|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|\leqslant\sqrt{2}\,|C_n-C|$ $(n=1,2,\cdots)$，

故定理得证．　□

根据此定理，复数数列的收敛性由实数数列的收敛性来决定，所以可对复数数列运用§6的诸定理，因此与§6【定理】1，2，3，6，7同样的定理也成立，§6【定理】9可变成下列形式

【定理】3 数列 $\{r^n\}$ 在 $|r|>1$ 时变为无穷大，而当 $|r|<1$ 时，收敛于0．

证明　(1)　当 $|r|>1$ 时，令 $|r|=1+h$，$h>0$，

则　　$|r^n|=|r|^n=(1+h)^n>1+nh$，$\because n\to\infty$，$nh\to\infty$．

$\therefore |r^n|\to\infty$．

(2)　当 $0<|r|<1$ 时，令 $|r|=\dfrac{1}{s}$，

则 $s=\dfrac{1}{|r|}>1$．

据根(1)，当 $n\to\infty$ 时，$S^n\to\infty$，从而，根据【定理】1(1)

$$|r^n|=\left(\frac{1}{s}\right)^n\longrightarrow 0.$$　□

与实数级数同样，复数级数用§8【定义】1定义，这时得到下列定理：

【定理】4.　如果对于一切自然数 n，复数 c_n 的实部为 a_n，虚部为 b_n；则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

证明　由【定理】2和级数的定义可证．　□

因而，复数级数的收敛性由实数级数的收敛性来决定，可运用§8的诸定理，所以与§8【定理】1, 2, 3, 同样的定理对复数级数也成立.

设绝对值级数、级数的绝对收敛的定义与实数情形相同，这时有下列定理：

【定理】5. 如果对于一切自然数 n，复数 c_n 的实部为 a_n，虚部为 b_n，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都同时绝对收敛.

证明　这是因为 $|a_n| < |c_n|$，$|b_n| < |c_n|$，$|c_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$. □

由此定理可知，在复数级数中，§8的【定理】12, 14, 15 也成立.

幂级数的定义也与实数的定义相同，因此，8·6节的讨论，对复数也同样成立. 从而，【定理】18, 19, 20, 21, 22, 23 也成立.

注意　§1～§9中的函数是以实数作为变数的，但运用于复数数列的讨论时，必须是复变数函数，这时，上述讨论成立. 详细的讨论在此从略.


PDG

第十章 函数的极限和连续

§1. 函数的极限

1.1 定 义

【定义】1. 函数的极限(1) 函数 $f(x)$ 当 x 趋于 a 时以常数 l 为极限，是指：对于任意小的正数 ε，如果存在正数 δ，使得

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。这时，记作

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \quad 或 f(x)\to l \quad (x\to a).$$

注意 这个定义确切地表达了"当 x 无限趋近于 a 时，$f(x)$ 无限趋近于 l"的含义。由定义显见，$f(x)$ 在 a 的空心邻域(即 a 的邻域，但除去 a) 内有定义，至于在 $x=a$ 点是否有定义可以不考虑。一般地，当 ξ 为变数，a 为常数时，记号 $\xi\to a$ 表示 ξ 趋于 a，但当 ξ 是自变数时，规定 $\xi\neq a$，当 ξ 在求极限的过程中是因变数时，ξ 可变为 a。上述定义的几何意义如图 10—1 所示。图中把夹于二直线 $y=l-\varepsilon$，$y=l+\varepsilon$ 中的带状部分记为 R，则存在由正数 ε 所确定的正数 δ，使曲线 $y=f(x)$ 在开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ (但除去 a) 内的部分被包含在 R 内.

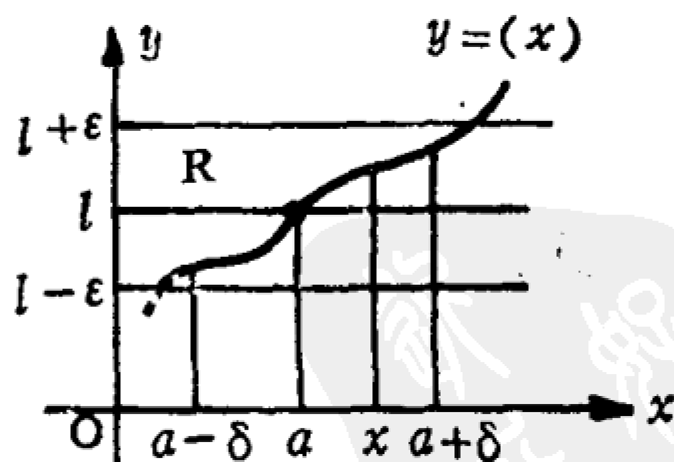


图10-1

例题1. $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

解 由于 $|(2x-1)-1|=2|x-1|$，故对于任意的 $\varepsilon>0$，若取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|(2x-1)-1|<\varepsilon$ 恒成立.

$$\therefore \lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例题2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

解　函数$\frac{x^2-4}{x-2}$在$x=2$处没有定义，但在$x\neq 2$处，$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$，因此对于任意的正数ε，若取$\delta=\varepsilon$，则当$0<|x-2|<\delta$时，

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|<\varepsilon \quad 恒成立,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

例题3. $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$.

解　先变形为 $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

$$=(x-2)[(x-2)^2+6(x-2)+12].$$

当$0<|x-2|<1$时，有

$$|x^2+2x+4|\leqslant|x-2|^2+6|x-2|+12<1+6+12=19.$$

从而，当$0<|x-2|<1$时，有$|x^3-8|<19|x-2|$.　于是对于任意的正数ε，若取 $\delta=\min\left(1,\ \frac{\varepsilon}{19}\right)$，则当$0<|x-2|<\delta$时，$|x^3-8|<\varepsilon$恒成立。

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2} x^3=8.$$

例题4. 若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，则$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|l|$.

解　根据假定，对于任意的正数ε,存在正数δ,使得当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)-l|<\varepsilon$恒成立。由于$\big||f(x)|-|l|\big|\leqslant|f(x)-l|$,故有$\big||f(x)|-|l|\big|<\varepsilon$.

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}|f(x)|=|l|.$$

注意　其逆命题不成立

【定义】2. 函数的极限(2)　如果对于任意的正数G，存在正数δ，使得当$0<|x-a|<\delta$时，$f(x)>G$　$[f(x)<-G]$恒成立，就说当x趋近于a时函数$f(x)$的极限是$+\infty[-\infty]$，并用下式表示

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty\ [-\infty] \quad 或 \quad f(x)\to+\infty\ [-\infty]\ (x\to a).$$

例题　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$.

解　对于任意的正数G，若取$\delta=\sqrt{\frac{1}{G}}$，则当　$0<|x-1|<\delta$　时，

$\frac{1}{(x-1)^2}>G$, $\frac{-1}{(x-1)^2}<-G$ 恒成立。

$$\therefore\quad \lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty,\quad \lim_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)}=-\infty.$$

【定义】3. 函数的极限(3) 如果对于任意的正数 ε，存在正数 G，使得当 $x>G$ $[x<-G]$时，$|f(x)-l|<\varepsilon$ 恒成立，就说当 x 无限增加(减少)时，函数 $f(x)$ 的极限值是 l，并用下式表示

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\ (x\to+\infty).$$
$$[\lim_{x\to-\infty}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\ (x\to-\infty)].$$

例题 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=3$。

解 由于 $\left|\frac{3x^2+1}{x^2+1}-3\right|=\left|\frac{-2}{x^2+1}\right|<\frac{2}{x^2}$ $(x\neq0)$，故对于任意的正数 ε，若取 $G=\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$，则当 $x>G$ 时 $\left|\frac{3x^2+1}{x^2+1}-3\right|<\varepsilon$ 恒成立。因而

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+1}=3.$$

【定义】4. 函数的左(右)极限

(1) 如果对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得 $0<a-x<\delta$时，$|f(x)-l|<\varepsilon$
恒成立，就说 x 趋近于 a 时函数 $f(x)$的左极限值是 l，并用下式表示

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\ (x\to a-0).$$

(2) 如果对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得 $0<x-a<\delta$时，$|f(x)-l|<\varepsilon$
恒成立，就说 x 趋向 a 时，函数 $f(x)$的右极限值是 l，并用下式表示

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=l \quad 或 \quad f(x)\to l\ (x\to a+0).$$

注意 当 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$存在时，分别用 $f(a-0)$，$f(a+0)$ 表示它们，另外，把 $x\to0^{-0}$，$x\to0^{+0}$ 分别简记作 $x\to-0$，$x\to+0$。

例题1. $\lim\limits_{x\to1-0}[x]=0$，$\lim\limits_{x\to1+0}[x]=1$。

解 高斯记号$[x]$表示不超过x的最大整数(第三章 § 3,3.3)．由于$0\leqslant x\leqslant1$

时，$[x]=0$，故对于任意的正数 ε，若取 $\delta=\frac{1}{2}$，则当 $0<1-x<\varepsilon$ 时，$|[x]|=0<\varepsilon$ 恒成立，因此 $\lim\limits_{x\to 1-0}[x]=0$. 又因为 $1\leqslant x<2$ 时，$[x]=1$，所以对于任意的正数 ε，若取 $\delta=\frac{1}{2}$，则当 $0<x-1<\delta$ 时，$|[x]-1|=0<\varepsilon$ 恒成立，因此 $\lim\limits_{x\to 1+0}[x]=1$.

例题2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=l.$$

解 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$，则由【定义】1 知，对于任意的正数 ε，如果适当地选择正数 δ，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$ 恒成立。
由于 $0<|x-a|<\delta$ 与 $a-\delta<x<a+\delta$，$x\neq a$ 是等价的，因此当 $0<x-a<\delta$ 或 $0<a-x<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$ 成立。

因而，由[定义]4、(1)，(2) 有 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=l$. 反之，假如 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$成立，则由[定义] 4 的(1)、(2)知，对于任意的正数 ε，若适当地选择正数 δ_1，δ_2，则当 $0<x-a<\delta_1$ 或 $0<a-x<\delta_2$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$ 恒成立。

从而，若取 $\delta=\min(\delta_1、\delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-l|<\varepsilon$ 恒成立。

因此，由【定义】1，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$.

注意 除了【定义】1～【定义】4 所定义的极限、左(右) 极限外，还有各种形式的极限和左(右)极限，现将它们全都列在下表中。

极　　限	定		义	
	对于任意小的正数…	若存在正数…	当…时	…恒成立
$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$	ε	δ	$0<\|x-a\|<\delta$	$\|f(x)-l\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=l$	ε	δ	$0<a-x<\delta$	$\|f(x)-l\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=l$	ε	δ	$0<x-\ \ <\delta$	$\|f(x)-l\|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$	ε	G	$x>G$	$\|f(x)-l\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$	ε	G	$x<-G$	$\|f(x)-l\|<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$	G	δ	$0<\|x-a\|<\delta$	$f(x)>G$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$	G	δ	$0<a-x<\delta$	$f(x)>G$
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$	G	δ	$0<x-a<\delta$	$f(x)>G$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	G	g	$x>g$	$f(x)>G$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	G	g	$x<-g$	$f(x)>G$
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	G	δ	$0<\|x-a\|<\delta$	$f(x)<-G$
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$	G	δ	$0<a-x<\delta$	$f(x)<-G$
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$	G	δ	$0<x-a<\delta$	$f(x)<-G$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	G	g	$x>g$	$f(x)<-G$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	G	g	$x<-g$	$f(x)<-G$

1·2 基本性质

【定理】1 当 x 趋于 a 时，函数 $f(x)$ 具有有限极限值的充分必要条件是，对于收敛于 a 的任意数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 都收敛，这里 x_n 必须属于 $f(x)$ 的定义域且 $x_n\neq a$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$.

证明 (必要性)设 $f(x)\to l$ $(x\to a)$，$\{x_n\}$ 是满足定理条件的任意数列，根据假定，对于任意的正数 ε，存在正数 δ，当

$$0<|x-a|<\delta \text{ 时，} |f(x)-l|<\varepsilon$$

恒成立。

又由于 $a\neq x_n\to a$ $(n\to\infty)$，所以对于上述 δ，存在自然数 n_0 使

$$n>n_0 \text{ 时，} 0<|x_n-a|<\delta$$

恒成立(第九章，§6，6.1)。

从而，对于任意的正数 ε，存在自然数 n_0，使得

当 $n>n_0$ 时，$|f(x_n)-l|<\varepsilon$

恒成立。

因而 $f(x_n)\to l(n\to\infty)$.

(充分性) 设对于满足定理条件的任意数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 恒收敛。今证明 $\{f(x_n)\}$ 的极限值与 $\{x_n\}$ 的选择方法无关。设 $\{x_n\}$，$\{x_n'\}$ 是满足定理条件的任意两个数列，$f(x_n)\to l$，$f(x_n')\to l'$。

由于数列 x_1，x_1'，x_2，x_2'，…，x_n、x_n'、…收敛于 a，故按假定，数列

$$f(x_1),\quad f(x_1'),\quad f(x_2),\quad f(x_2'),\cdots,\quad f(x_n),\quad f(x_n'),\cdots$$

也收敛，若令 L 为其极限值，则数列 $\{f(x_n)\}$，$\{f(x_n')\}$ 都是上述数列的子数列，故 $l=L$，$l'=L$ (第九章，§6，6.2)。

因而 $l=l'$，即数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限值与数列 $\{x_n\}$ 的选择方法无关。

其次，证明当 $f(x_n)\to l$ $(n\to\infty)$时，$f(x)\to l(x\to a)$．暂且假设 l 不是 $f(x)$的极限值，则对于某正数 ε，

不论正数 $\delta>0$ 如何，总有满足 $0<|x-a|<\delta$的点 x，使 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$。

假设 x_n 是对应于 $\delta=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的 x，则由于 $0<|x_n-a|<\frac{1}{n}$，所以 $x_n\to a(n\to\infty)$．

从而，根据假定必有 $f(x_n)\to l(n\to\infty)$．

但是，对于此数列 $\{x_n\}$，由于 $|f(x_n)-l|\geqslant\varepsilon$，所以和 $f(x_n)\to l$ $(n\to\infty)$矛盾

因而，$f(x)\to l(x\to a)$．

注意　在 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ 的场合，如果相应地改为，当 $a\neq x_n\to a(n\to\infty)$时，$f(x_n)\to+\infty(n\to\infty)$．在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 的场合，改为：当 $x_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ 时、$\{f(x_n)\}$ 收敛，则【定理】1 成立．如此等等，对于其他的极限及左(右)极限也是同样的．

例题　$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

解　若令 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$x_n'=\frac{2}{(4n+1)\pi}(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$时，$x_n\to 0$ $x_n'\to 0$，但是由于 $\sin\frac{1}{x_n}=\sin n\pi=0$，$\sin\frac{1}{x_n'}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ $(n=1,2,3,\cdots)$，故根据【定理】1，$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在。

定理2. 当 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$（$A$，$B$ 是有限值）时，下列各式成立

(1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=kA$　（k 是常数）；

(2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$；

(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=AB$；

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$　（$B\neq 0$）.

证明　由【定理】1和关于数列极限的定理(第9章§6.6.2)，这个定理显然成立．但在下面，仍然从定义出发直接证明．

(1) 由于 $f(x)\to A$ $(x\to a)$，故对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得当 $0<\left|x-a\right|<\delta$ 时，$\left|f(x)-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{|k|+1}$ 恒成立.

从而，对于任意的正数 ε，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，

$$\left|kf(x)-kA\right|=|k|\left|f(x)-A\right|\leqslant\frac{|k|\varepsilon}{|k|+1}<\varepsilon$$

恒成立.

$$\therefore\ \lim_{x\to a} kf(x)=kA.$$

(2) 根据假定，对于任意的正数 ε，存在正数 δ_1，δ_2，当

$$0<\left|x-a\right|<\delta_1 \text{ 时，} \left|f(x)-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad ①$$

$$0<\left|x-a\right|<\delta_2 \text{ 时，} \left|g(x)-B\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad ②$$

恒成立.

从而，若令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，①，②式同时成立，因此得

$$|[f(x)+g(x)]-(A+B)|=|[f(x)-A]+[g(x)-B]|$$

$$\leqslant\left|f(x)-A\right|+\left|g(x)-B\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B.$$

(3) 由于 $f(x)\to A(x\to a)$，所以存在正数 δ_1，使当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<1$，即 $A-1<f(x)<A+1$ 恒成立

现在，若令 $M=|A|+2$，则 $-M<A-1<A+1<M$，因此，当 $0<|x-a|<\delta_1$ 时，$|f(x)|<M$ ①

恒成立.

此外，对于任意的正数 ε，存在正数 δ_2，当

$$0<|x-a|<\delta_2\text{ 时，}|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \quad ②$$

恒成立.

由于 $g(x)\to B(x\to a)$，故对于任意的正数 ε，存在正数 δ_3，当

$$0<|x-a|<\delta_3\text{ 时，}|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2M} \quad ③$$

恒成立.

从而，若令 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，①, ②, ③式同时成立，因此得

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&=|f(x)[g(x)-B]+B[f(x)-A]|\\&\leqslant|f(x)|\,|g(x)-B|+|B|\,|f(x)-A|\\&\leqslant|f(x)|\,|g(x)-B|+(|B|+1)|f(x)-A|\\&<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+(|B|+1)\frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to a}f(x)\,g(x)=AB.$

(4) 如果能够证明，当 $g(x)\to B\ (\neq 0)(x\to a)$ 时，$\dfrac{1}{g(x)}\to\dfrac{1}{B}(x\to a)$ 成立，则根据(3)可证(4)成立.

由于 $g(x)\to B(x\to a)$，故对于任意的正数 ε，存在正数 δ_1，使

$$\text{当 }0<|x-a|<\delta_1\text{ 时，}|g(x)-B|<\frac{B^2\varepsilon}{2} \quad ①$$

恒成立，又，若 $g(x)\to B(x\to a)$，则 $|g(x)|\to|B|(x\to a)$（【定义】1 的例题4），因此，存在正数 δ_2，当

$$0<|x-a|<\delta_2\text{ 时，}\big||g(x)|-|B|\big|<\frac{|B|}{2}\text{ 恒成立，由此得}$$

$|g(x)|>\dfrac{|B|}{2}$，所以

当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时，$|g(x)|>\frac{|B|}{2}$ ②

恒成立。若令 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，①，②同时成立，因此得

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|g(x)-B|}{|B||g(x)|}<\frac{1}{2}B^2\varepsilon\frac{1}{|B|}\frac{2}{|B|}=\varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}.$$ □

注意 这个定理，当 A、B 有限时，不仅在 $x\to a$ 时成立，而且在 $x\to a+0$，$x\to a-0$，以及 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时也成立。当 A、B 是 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，设 α 为有限的实数，α^+ 为正数，α^- 为负数，这时，如约定

$(\alpha$ 或 $\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$，$(\alpha$ 或 $\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$，

$(\alpha^+$ 或 $+\infty)(\pm\infty)=\pm\infty$，$(\alpha^-$或$-\infty)(\pm\infty)=\mp\infty$，

$\alpha\div(\pm\infty)=0$ （同取上号或同取下号）

则该定理也成立，对于其他情形，可参看第十一章§8，8.7.

【定理】3. 设在 a 的空心邻域，有 $f(x)\leqslant g(x)$，这时

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，（$A$，$B$ 是有限值），则 $A\leqslant B$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$，

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

证明 (1) 暂且假定 $A>B$，则对于充分小的正数 ε，有 $A-\varepsilon>B+\varepsilon$，由于 $f(x)\to A$，$g(x)\to B(x\to a)$，故对于这个 ε，存在正数 δ_1，δ_2，当

$0<|x-a|<\delta_1$ 时，$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$， ①

$0<|x-a|<\delta_2$ 时，$B-\varepsilon<g(x)<B+\varepsilon$ ②

恒成立，若令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，①，②式同时成立，因此得 $f(x)>A-\varepsilon>B+\varepsilon>g(x)$。从而，当 $0<|x-a|<\delta$，变为 $f(x)>g(x)$，这与已设条件矛盾，因而 $A\leqslant B$.

(2) 由于 $f(x)\to+\infty(x\to a)$，故对于任意的正数 G，若适当地选择正数 δ，则当

$0<|x-a|<\delta$ 时，$f(x)>G$

恒成立。由于 $0<|x-a|<\delta$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，故得 $g(x)>G$，因而，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$.

(2) 由于 $g(x)\to-\infty(x\to a)$，故对于任意的正数 G，存在正数 δ，使当

$$0<|x-a|<\delta\text{ 时，}g(x)<-G$$

恒成立。由于 $0<|x-a|<\delta$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，故得 $f(x)<-G$.

因而，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

注意　如果对【定理】3 作适当修改，则此定理不仅在 $x\to a$ 时成立，而且在 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时也成立。另外，对于(1)，即使 $f(x)<g(x)$，也不一定有 $A<B$，例如对于 $f(x)=1-x^2$,$g(x)=1+x^2$，当 $x\neq0$ 时，$f(x)<g(x)$，但 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$. □

【定理】4. 设在 a 的空心邻域有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$.若

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=l\text{，则 }\lim_{x\to a}g(x)=l.$$

证明　由于 $f(x)\to l$，$h(x)\to l(x\to a)$,故对于任意的正数 ε，存在正数 δ_1、δ_2，使得当

$$0<|x-a|<\delta_1\text{ 时，}l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon,\quad ①$$

$$0<|x-a|<\delta_2\text{ 时，}l-\varepsilon<h(x)<l+\varepsilon\quad ②$$

恒成立。若令 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则当 $0<|x-a|<\delta$ 时，①，② 式同时成立，因此得 $l-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<l+\varepsilon$.

从而，在 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|g(x)-l|<\varepsilon$ 恒成立，因此有

$$\lim_{x\to a}g(x)=l.$$ □

注意　如果对定理 4 进行适当修改，则此定理不仅在 $x\to a$ 时成立，而且在 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时也成立。

例题　$\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

解　当 $x\neq0$ 时，$\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$,

$$\therefore\quad -|x|\leqslant\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|.$$

由于$\pm|x|\to0(x\to0)$，故由[定理]4，有

$$x\sin\frac{1}{x}\to0(x\to0).$$

【定义】5. 复合函数　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，函数 $g(y)$ 的定义域

为 D'，又设 $f(x)$ 的值域 $f(D)$（当 x 在 D 中取一切值时，$f(x)$ 的值的集合）包含在 D' 内．

这时，设 x 为 D 中任意的数，而 $y=f(x)$，$z=g(y)$，如果使 z 与 x 相对应，则可把 z 看作以 D 作定义域的函数，这个函数叫做 $z=g(y)$ 和 $y=f(x)$ 的复合函数，用 $z=g[f(x)]$ 或 $z=(g\circ f)(x)$ 表示．复合函数也可由三个或三个以上的函数复合而成。

例题1． 试求 $g(y)=2y+1$ 和 $f(x)=\sin x$ 的复合函数．

解 由于 D 为 $(-\infty,\ +\infty)$，$f(D)$ 为 $[-1,\ +1]$，D' 为 $(-\infty,\ +\infty)$，且 $f(D)\supset D'$，故以 D 作定义域的复合函数 $g[f(x)]$ 是 $2\sin x+1$．

例题2． 试求 $g(y)=\sqrt{y}$ 和 $f(x)=\sin x$ 的复合函数．

解 $D=(-\infty,\ +\infty)$，$f(D)=[-1,\ +1]$，$D'=[0,\ +\infty)$，$f(D)$ 不完全包含在 D' 内。现在，如果把 $f(x)$ 的定义域 D_n 限制在 $[2n\pi,(2n+1)\pi]$（n 是整数）内，则 $f(D_n)\subset D'$，因此，以 D_n 作定义域的复合函数 $g[f(x)]=\sqrt{\sin x}$．

【定理】5． 设函数 $f(x)$ 在 a 的空心邻域有定义，$f(x)$ 的值域包含在函数 $g(y)$ 的定义域内，且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$，$\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$ 这时，如果下列条件中任何一条成立。

(1) 除 a 外，在 a 的邻域 $f(x)\neq b$；

(2) $g(y)$ 在 $y=b$ 连续，

那么 $$\lim_{x\to a} g[f(x)]=l.$$

证明 (1)成立的情形，由于 $g(y)\to l(y\to b)$，故对于任意的正数 ε，存在正数 δ'，使

当 $0<|y-b|<\delta'$ 时，$|g(g)-l|<\varepsilon$

恒成立，再由假定 (1) 和 $f(x)\to b(x\to a)$，对于正数 δ'，存在正数 δ，当

$$0<|x-a|<\delta\ 时，0<|f(x)-b|<\delta'$$

恒成立。从而，对于任意的正数 ε，存在正数 δ，

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|g[f(x)]-l|<\varepsilon$

成立．

$$\therefore\ \lim_{x\to a} g[f(x)]=l.$$

(2) 成立的情形　由于 $g(y)$ 在 $y=b$ 连续，故根据连续的定义（§ 3，【定义】1）有 $l=g(b)$，而对于任意的正数 ε，存在正数 δ'，

当 $|y-b|<\delta'$ 时，$|g(y)-l|<\varepsilon$

恒成立，又由于 $f(x)\to b(x\to a)$，故对于正数 δ'，存在正数δ，当

$$0<|x-a|<\delta \text{ 时}，|f(x)-b|<\delta'$$

恒成立，从而对于任意的正数 ε，存在正数 δ，

$$\text{当 } 0<|x-a|<\delta \text{ 时}，|g[f(x)]-l|<\varepsilon$$

恒成立。

$$\therefore\ \lim_{x\to a} g[f(x)]=g(b)=g[\lim_{x\to a} f(x)].$$ □

注意 如果适当修改本定理前段行文，那么它不仅在 $x\to a$ 时成立，而且在 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$时也成立． 在 $b=\pm\infty$（也包括 $l=\pm\infty$）的情形，条件(1)，(2)不成立。这个定理不能简单地理解成："若 y 是x的函数，z 是 y 的函数，且 $y\to b(x\to a)$，$z\to l(y\to b)$，则把z视为 x 的函数时，$z\to l(x\to a)$"（参看例题3)。

例题1．当 $f(x)=x^2$，$g(y)=\begin{cases} y^2 & (y\neq 0) \\ 1 & (y=0)\end{cases}$时，

求 $\lim\limits_{x\to 0} g[f(x)]$.

解 $f(x)\to 0(x\to 0)$，$g(y)\to 0(y\to 0)$，

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)\neq 0$，因此【定理】5 中（1）成立，（这时（2)不成立)，从而$g[f(x)]\to 0(x\to 0)$.

例题2．当 $f(x)=\begin{cases} -(x+1) & (x<-1), \\ 0 & (|x|\leqslant 1), \\ x-1 & (x>1),\end{cases}$ $g(y)=y^2$ 时，求

$\lim\limits_{x\to 0} g[f(x)]$.

解 $f(x)\to 0(x\to 0)$，$g(y)\to 0(y\to 0)$，【定理】5 的(2)成立，(这时(1)不成立)，故 $g[f(x)]\to 0(x\to 0)$.

例题3．当 $f(x)=\begin{cases} -(x+1) & (x<-1), \\ 0 & (|x|\leqslant 1), \\ x-1 & (x>1),\end{cases}$ $g(y)=\begin{cases} y^2(y\neq 0) \\ 1(y=0)\end{cases}$ 时，

试求 $\lim\limits_{x\to 0} g[f(x)]$.

解 $f(x)\to 0(x\to 0)$，$g(y)\to 0(y\to 0)$． 但【定理】5 的(1)，(2)都不成立，因此不能得到 $g[f(x)]\to 0(x\to 0)$的结论，若把 $g[f(x)]$直接用 x 表示，则得

$$g[f(x)]=\begin{cases}(x+1)^2 & (x<-1),\\ 1 & (|x|\leqslant 1),\\ (x-1)^2 & (x>1),\end{cases}$$

因此 $g[f(x)]\to 1(x\to 0)$.

例题4. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(2x^2+5x-3)-2\ln x]$.

解 $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2}=\dfrac{(2x-1)(x+3)}{x^2}>0\ (x>\dfrac{1}{2})$

$f(x)\to 2(x\to+\infty)$([定理]13). 由于 $\ln y$ 是连续的(§2,【定理】14),故[定理]5 的(2)成立,于是

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln(2x^2+5x-3)-2\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x^2+5x-3}{x^2}$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2}\right)=\ln 2.$$

【定义】6. 有界函数 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若有常数 M 存在,使得在 D 的每一点 x 上 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 是有上界的; 若存在常数 m,使得在 D 的每一点 x 上 $f(x)\geqslant m$,则称 $f(x)$在 D 是有下界的,当 $f(x)$在 D 既有上界又有下界时,就统称为 $f(x)$在 D 有界。

【定理】6. 若函数 $f(x)$在(a,b)是单调的,则 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 存在(包括极限为∞的情形)

证明 现证明 $f(x)$是单增函数时,$\lim\limits_{x\to b+0}f(x)$存在.

(对于 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$也同样可证明.当 $f(x)$是单减函数时,$-f(x)$是单增函数,故归结为单增函数的情形).

(1) $f(x)$在(a,b)有上界的情形,由于 $f(x)$在(a,b)的值的集合是有上界的,故存在上确界 M. 根据上确界的性质(第九章§6, 6.2),对于任意的正数 ε,在(a,b)内存在 x_0,使得 $M-\varepsilon<f(x_0)\leqslant M$. 由于 $f(x)$是单增函数,故对使 $x_0<x<b$ 的任意的 x, $M-\varepsilon<f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant M<M+\varepsilon$ 成立,若令 $b-x_0=\delta$,则对于任意的正数 ε,存在正数 δ,当$0<b-x<\delta$ 时,$|f(x)-M|<\varepsilon$ 恒成立。因而

$$\lim_{x\to b-0}f(x)=M.$$

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 没有上界的情形, 这时对于任意的正数 G,在

(a, b)内存在 x_0，使 $f(x_0)>G$．由于 $f(x)$ 是单增函数，故对于使 $x_0<x<b$ 的任意 x，$f(x)\geqslant f(x_0)>G$ 成立．若令 $b-x_0=\delta$，则对于任意的正数 G，存在正数 δ，当 $0<b-x<\delta$ 时，$f(x)>G$ 恒成立，因而

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=+\infty, \qquad \square$$

【系】 若函数 $f(x)$在(a,b)是单调的，则对于(a,b)中的一点 c，$\lim\limits_{x\to c-0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)$都存在．

证明 由于 $f(x)$ 在(a, c)及(c, b)是单调的，所以，由【定理】6知

$$\lim_{x\to c-0} f(x) \text{ 及 } \lim_{x\to c+0} f(x)\text{存在}. \qquad \square$$

1·3　常用函数的极限

【定理】7. $\lim\limits_{x\to a} c=c$（c 是常数）．

证明 就常数值函数 $f(x)=c$ 而言，对于任意的正数 ε，若取任意的正数 δ，则

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-c|=|c-c|<\varepsilon$

恒成立。因而 $\lim\limits_{x\to a} c=c$． $\square$

【定理】8. $\lim\limits_{x\to a} x=a$．

证明 令 $f(x)=x$．对于任意的正数 ε，若取 $\delta=\varepsilon$，则

当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<|x-a|<\varepsilon$

恒成立，因而 $\lim\limits_{x\to a} x=a$．

【定理】9. 若函数 $f(x)$是整式，则 $\lim\limits_{x\to b} f(x)=f(a)$．

证明 令 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

根据【定理】7和【定理】8，有 $\lim\limits_{x\to a} a_n=a_n$，$\lim\limits_{x\to a} x=a$，因此，如果反复应用【定理】2则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)\\&=\lim_{x\to a} a_0x^n+\lim_{x\to a} a_1x^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to a} a_{n-1}x+\lim_{x\to a} a_n\\&=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}a+a_n\\&=f(a).\end{aligned} \qquad \square$$

【定理】10. 对于整式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

如果 $a_0>0$，则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$；

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty (n \text{ 是偶数}),\\ -\infty (n \text{ 是奇数}).\end{cases}$

证明 把整式变形为

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$$=a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right),$$

由于 $\frac{1}{x}\to0(x\to\pm\infty)$，故由【定理】2，有

$$1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\to1$$
$$(x\to\pm\infty).$$

(1) 对任意的正数 G，当 $x>G^{\frac{1}{n}}$ 时，有 $x^n>G$. 因此 $x^n\to+\infty$ $(x\to+\infty)$，因而，根据【定理】2 的注意事项，$f(x)\to+\infty(x\to+\infty)$.

(2) n 为偶数时，对于任意的正数 G，当 $x<-G^{\frac{1}{n}}$ 时，$x^n>G$. 因此 $x^n\to+\infty(x\to-\infty)$. 从而，$f(x)\to+\infty(x\to-\infty)$.

n 为奇数时，若令 $x=-y$，则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$. 因此，由(1)的结果得

$$\lim_{x\to-\infty}x^n=\lim_{y\to+\infty}(-y)^n=\lim_{y\to+\infty}(-y^n)=-\lim_{y\to+\infty}y^n=-\infty,$$

因而 $f(x)\to-\infty(x\to-\infty)$. □

【定理】11. 当 k 为实数时，有

(1) $\lim\limits_{x\to a}x^k=a^k\ (x>0,\ a>0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to+0}x^k=\begin{cases}0 & (k>0),\\ +\infty & (k<0);\end{cases}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & (k>0),\\ 0 & (k<0).\end{cases}$

证明 当 $x>0$ 时，有 $x^k=e^{k\ln x}$

(1) $\ln x\to\ln a(x\to a)$，(§ 2，【定理】14)，e^x 在$(-\infty,+\infty)$是连续的(§ 2，【定理】13)，因此由【定理】5的(2)，有

$$\lim_{x\to a}x^k=\lim_{x\to a}e^{k\ln x}=e^{k\lim\limits_{x\to a}\ln x}=e^{k\ln a}=a^k .$$

(2) 由于$\ln x\to-\infty(x\to+0)$(【定理】23)，故对应于 k 取正、负值，有 $k\ln x\to\mp\infty(x\to+0)$. 又由于 $e^x\to+\infty(x\to+\infty)$，$e^x\to0(x\to-\infty)$(【定理】21)，故由【定理】5 的(2)有

$$\lim_{x\to+0}x^k=\lim_{x\to+0}e^{k\ln x}=e^{k\lim\limits_{x\to+0}\ln x}=\begin{cases}0 & (k>0),\\ +\infty & (k<0).\end{cases}$$

(3) 若令 $x=\frac{1}{y}$，则当 $x\to+\infty$时，$y\to+0$，因此，由 (2) 的结果得

$$\lim_{x\to+\infty}x^k=\lim_{y\to+0}y^{-k}=\begin{cases}+\infty & (k>0),\\ 0 & (k<0).\end{cases}$$ □

1·4 分式函数的极限

【定理】12. 设函数 $f(x)$，$g(x)$都是整式，$g(a)\neq0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}.$$

证明 根据【定理】9知，当 $x\to a$ 时，$f(x)\to f(a)$，$g(x)\to g(a)\neq0$.因此，由【定理】2得 $\frac{f(x)}{g(x)}\to\frac{f(a)}{g(a)}(x\to a)$. □

【定理】13. 对于函数

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}\left(\begin{matrix}m、n\text{ 是自然数},\\ a_0>0,\ b_0>0\end{matrix}\right),$$

(1) 若 $m=n$，则 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\frac{a_0}{b_0}$;

(2) 若 $m>n$，则 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$;

(3) 若 $m<n$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\begin{cases}+\infty & (n-m\text{是偶数}),\\ -\infty & (n-m\text{是奇数})\end{cases}$$

证明 把原函数变形为

$$f(x)=\frac{a_0x^n}{b_0x^m}\cdot\frac{1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}}{1+\frac{b_0}{b_1}\frac{1}{x}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{b_0}\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{b_0}\frac{1}{x^m}},$$

由于 $x\to\pm\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，故由【定理】2，当 $x\to\pm\infty$ 时，上式右端第二个分式的分子、分母的极限值都是1，现在令 $g(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$，

(1) 若 $m=n$，则 $g(x)=\frac{a_0}{b_0}$，故由【定理】2，$f(x)\to\frac{a_0}{b_0}$ $(x\to\pm\infty)$。

(2) 若 $m>n$，则 $|x^{m-n}|\to+\infty\,(x\to\pm\infty)$（[定理]10），因此，$g(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$．从而，由【定理】2，$f(x)\to 0$ $(x\to\pm\infty)$．

(3) 若 $m<n$，则 $x^{n-m}\to+\infty\,(x\to+\infty)$，因此，由【定理】2 的注意事项，$f(x)\to+\infty\,(x\to+\infty)$． 当 $x\to-\infty$ 时，按 $n-m$ 是偶数还是奇数，有 $x^{n-m}\to+\infty$ 或 $x^{n-m}\to-\infty$ 因此，对 $f(x)$ 也有同样的结果。 □

例题 对于 $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$，试确定常数 a、b、c、d、使

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1 \text{ 和 } \lim_{x\to 1}f(x)=0$$

成立。

解 根据【定理】13，为使 $f(x)\to 1\,(x\to+\infty)$，必须 $a=0$，$b=1$． 这时，$f(x)=\frac{x^2+cx+d}{x^2+x-2}$． 由于 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，故 $f(x)$ 的分母在 $x=1$ 时变为 0． 从而，为使 $f(x)\to 0\,(x\to 1)$，必须 $x^2+cx+d\to 0\,(x\to 1)$，即 $1+c+d=0$． 这时

$$f(x)=\frac{x^2-(1+d)x+d}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(x-d)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x-d}{x+2}\ (x\neq 1).$$

因此，$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-d}{x+2}=\frac{1-d}{3}$．由于它等于 0，故 $d=1$．从而得 $c=-2$。 因此必有 $a=0$，$b=1$，$c=-2$，$d=1$． 反之，当 a,b,c,d 取这些值时，容易证明 $f(x)\to 1\,(x\to+\infty)$，$f(x)\to 0\,(x\to 1)$。

【定理】14．若 n 是有理数，$x>0$，$a>0$ 则

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

证明 (1) 若 $n=0$，则左端、右端都等于 0。

(2) n 是自然数的情形

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}(x\neq a),$$

因此，由[定理]9，得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}.$$

(3) n 是正分数的情形令 $n=\frac{p}{q}$（p、q 是自然数），$x^{\frac{1}{q}}=y$，$a^{\frac{1}{q}}=\alpha$，

则

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{y^p-\alpha^p}{y^q-\alpha^q}=\frac{y^p-\alpha^p}{y-\alpha}\cdot\frac{y-\alpha}{y^q-\alpha^q}.$$

由于 $y\to\alpha(x\to a)$(【定理】15)，且当 $x\neq a$ 时，$y\neq\alpha$. 故由 (2) 的结果和【定理】5的(1)得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{y\to\alpha}\left(\frac{y^p-\alpha^p}{y-\alpha}\cdot\frac{y-\alpha}{y^q-\alpha^q}\right)$$

$$=\lim_{y\to\alpha}\frac{y^p-\alpha^p}{y-\alpha}\cdot\lim_{y\to\alpha}\frac{y-\alpha}{y^q-\alpha^q}=\frac{p\alpha^{p-1}}{q\alpha^{q-1}}$$

$$=\frac{p}{q}\alpha^{p-q}=\frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}=na^{n-1}.$$

(4) n 是负整数或负分数的情形 若令 $y=\frac{1}{x}$，$\alpha=\frac{1}{a}$，则

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=(-\alpha y)\frac{y^{-n}-\alpha^{-n}}{y-\alpha},\quad y\to\alpha(x\to a),\ 且 x\neq a 时,$$

$y\neq\alpha$. 由于 $-n$ 是自然数或正分数，故由(2)或(3)的结果及【定理】5的(1)得

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{y\to a}(-ay)\frac{y^{-n}-a^{-n}}{y-a}$$

$$=-a\lim_{y\to a}y\cdot\lim_{y\to a}\frac{y^{-n}-a^{-n}}{y-a}$$

$$=-a^2(-n)a^{-n-1}=na^{-n+1}=na^{n-1}.$$ □

注意 即使在 n 是无理数的情形下，这个定理也成立. (参看第十一章§2,2.7)

1·5 无理函数的极限

【定理】15. 若 n 是自然数时，$\lim_{x\to a}f(x)=l>0$，则 $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\frac{1}{n}}=l^{\frac{1}{n}}$.

证明 由于 $f(x)\to l(x\to a)$，$g(y)=y^{\frac{1}{n}}$ 在$[0,+\infty)$ 连续(§2,[定理]8)，故由[定理]5的(2)，$[f(x)]^{\frac{1}{n}}\to l^{\frac{1}{n}}(x\to a)$. □

注意 这个定理不仅在 $x\to a$ 时成立，而且在 $x\to a+0$，$x\to a-0$，$x\to+\infty$)，$x\to-\infty$时也成立.

例题1. 试求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}(a>0)$

解 把原式变形为

$$\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=\frac{a+x-(a-x)}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$$

$$=\frac{2x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}.$$

由于 $a\pm x\to a>0(x\to 0)$，故由【定理】15，$\sqrt{a\pm x}\to\sqrt{a}(x\to 0)$，

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

例题2. 试求 $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

解 把原式变形为

$$\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\sqrt{x}\,\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}$$

由于 $1+\frac{a}{x}\to 1(x\to+\infty)$，故由【定理】15，$\sqrt{1+\frac{a}{x}}\to 1(x\to+\infty)$，

$$\therefore\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}.$$

注意　为了求无理式的极限值，把分母或分子有理化常常是一种有效的方法。

1·6　三角函数的极限

【定理】16.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x=+\infty$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x=-\infty$.

证明　当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时，在以点 O 为圆心，1为半径的圆周上取两点 A、B（图10-2），令$\angle AOB=x$(弧度)，由 A 向 OB 作垂线，垂足为 C. 这时，

$AC=\sin x$，$\overset{\frown}{AB}=x$，$AC<AB<\overset{\frown}{AB}$，

因此　$\sin x<x$　　①

成立。当$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时，若令 $x=-y$，则 $0<y<\frac{\pi}{2}$，因此　由①得　$\sin y<y$，

即　　$\sin(-x)<-x$　　②

成立。因而，由①、②式有

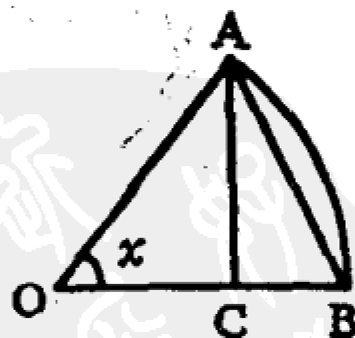


图10-2

$$|x|<\frac{\pi}{2}\text{时}，|\sin x|\leqslant|x|.\qquad ③$$

由于 $x\to0$ 时，$|x|\to0$，故由③式和【定理】4，有 $\sin x\to0(x\to0)$.

(2) 由(1)有，$\sin\frac{x}{2}\to0(x\to0)$，因此根据【定理】2，得

$$\lim_{x\to0}\cos x=\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\left(\lim_{x\to0}\sin\frac{x}{2}\right)^2=1.$$

(3) 由(1)、(2)有 $\sin x\to0$，$\cos x\to1(x\to0)$ 故由【定理】2得

$$\lim_{x\to0}\operatorname{tg}x=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

(4) 若令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则当 $x\to\frac{\pi}{2}-0$ 时，$y\to+0$，$\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}y$.

当 $0<y<\frac{\pi}{3}$ 时，由(1)中①式有 $\sin y<y$，$\cos y>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，因此 $\operatorname{ctg}y>\frac{1}{2y}$. 对于任意的正数 G，若取 $\delta=\min\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2G}\right)$，则当 $0<y<\delta$ 时，$\operatorname{ctg}y>G$ 恒成立.

$$\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=\lim_{y\to+0}\operatorname{ctg}y=+\infty.$$

(5) 若令 $x=\frac{\pi}{2}+y$，则当 $x\to\frac{\pi}{2}+0$ 时，$y\to+0$. 因此，由(4)的证明有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=\lim_{y\to+0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=-\lim_{y\to+0}\operatorname{ctg}y=-\infty.$$ □

【定理】17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$

证明　当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，在以 O 点为圆心，以1为半径的圆周上取两点 A、B(图10-3)，令 $\angle AOB=x$(弧度)，由 B 向 OA 引垂线，垂足为 C；由 A 作 $\overset{\frown}{AB}$ 的切线，与 OB 延长线的交点为 D，就面积而论，有

$$\triangle OAB<\text{扇形}OAB<\triangle OAD,\ \text{即}$$

$$\frac{1}{2}OA\cdot BC<\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot x<\frac{1}{2}OA\cdot DA.$$

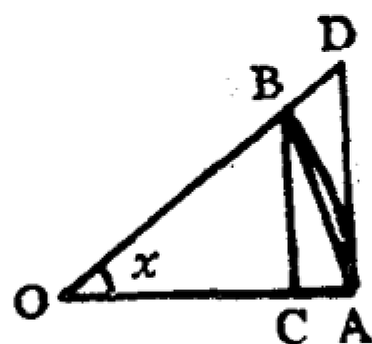


图10-3

由于 $OA=OB=1$，$BC=\sin x$，$DA=\operatorname{tg} x$，故上列不等式变为

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

若把上式变形，则得

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

由于 $\frac{\sin x}{x}$，$\cos x$是偶函数，故此不等式在 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$时成立。

根据【定理】16，$\cos x\to 1(x\to 0)$，所以，由此不等式和【定理】4有

$$\frac{\sin x}{x}\to 1(x\to 0).$$

□

例题1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}(a\neq 0,\ b\neq 0).$

解　由【定理】17和【定理】2，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{b}\ \frac{\sin ax}{ax}\Big/\frac{\sin bx}{bx}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$$

例题2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$

解　由【定理】17 和【定理】2，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

例题3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$

解 由【定理】17、【定理】16和【定理】2，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例题4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\mathrm{tg}x=2.$

解 若令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则当$x\to\frac{\pi}{2}$时，$y\to0$，因此，由【定理】17、【定理】16和【定理】2，得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\mathrm{tg}\,x=\lim_{y\to0}2y\,\mathrm{ctg}\,y=2\lim_{y\to0}\left(\frac{\cos y}{\sin y}\cdot y\right)$$

$$=2\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to0}\cos y=2.$$

例题5. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0.$

解 由【定理】17、【定理】2，得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0.$$

1·7 反三角函数的极限

【定理】18.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\sin^{-1}x=0$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{tg}^{-1}x=0$； (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{tg}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{tg}^{-1}x=-\frac{\pi}{2}$.

这里反三角函数取其主值。

证明 (1) 对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，若$|x|<\sin\varepsilon$，则$-\sin\varepsilon<x<\sin\varepsilon$. 由于 $\sin^{-1}x$ 是单增函数(§2，【定理】12)，故有

$\sin^{-1}(-\sin\varepsilon)<\sin^{-1}x<\sin^{-1}(\sin\varepsilon)$，即

$-\varepsilon<\sin^{-1}x<\varepsilon$.

从而，对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，若令 $\delta=\sin\varepsilon$，则当$|x|<\delta$时，

$|\sin^{-1}x|<\varepsilon$ 恒成立，因此

$\sin^{-1}x\to 0(x\to 0)$.

(2) 对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $|x|<\sin\varepsilon$，则 $-\sin\varepsilon<x<\sin\varepsilon$，即 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)<x<\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，由于 $\cos^{-1}x$ 是单减函数，(§2，【定理】12)，因此

$$\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)\right]>\cos^{-1}x>\cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right].$$

从而有 $\frac{\pi}{2}+\varepsilon>\cos^{-1}x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$.

因此，当 $|x|<\sin\varepsilon$ 时，恒有 $\left|\cos^{-1}x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$. 即得

$$\cos^{-1}x\to\frac{\pi}{2}(x\to 0).$$

(3) 对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $|x|<\operatorname{tg}\varepsilon$，则 $-\operatorname{tg}\varepsilon<x<\operatorname{tg}\varepsilon$，由于 $\operatorname{tg}^{-1}x$ 是单增函数(§2，【定理】12)，故 $\operatorname{tg}^{-1}(-\operatorname{tg}\varepsilon)<\operatorname{tg}^{-1}x<\operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg}\varepsilon)$，即 $-\varepsilon<\operatorname{tg}^{-1}x<\varepsilon$. 从而，对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，当 $|x|<\operatorname{tg}\varepsilon$ 时、恒有 $|\operatorname{tg}^{-1}x|<\varepsilon$，所以 $\operatorname{tg}^{-1}x\to 0(x\to 0)$.

(4) 对于任意的正数 $\varepsilon\left(<\frac{\pi}{2}\right)$，若取 $G=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$，则由于 $\operatorname{tg}^{-1}x$ 是单增函数，故当 $x>G$ 时，有

$$\frac{\pi}{2}>\operatorname{tg}^{-1}x>\operatorname{tg}^{-1}G=\frac{\pi}{2}-\varepsilon.$$

因而　$\operatorname{tg}^{-1}x\to\frac{\pi}{2}(x\to+\infty)$.

(5) 若令 $x=-y$，则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，因此由(4)得

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{tg}^{-1}x=\lim_{y\to+\infty}(-\operatorname{tg}^{-1}y)=-\lim_{y\to+\infty}\operatorname{tg}^{-1}y=-\frac{\pi}{2}.$$ □

例题1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$.

解 若令 $y=\sin^{-1}x$，则 $x=\sin y\left(|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，根据【定理】18 有 $y\to 0$ $(x\to 0)$，因此由【定理】17得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

例题2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x}=1$.

解 若令 $y=\operatorname{tg}^{-1}x$，则 $x=\operatorname{tg}y\left(|y|<\frac{\pi}{2}\right)$，根据【定理】18，$y\to 0$ $(x\to 0)$，因此，由【定理】17 的例题3，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}y}=1.$$

例题3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\operatorname{tg}^{-1}x)=2$.

解 若令 $y=\operatorname{tg}^{-1}x$，则 $x=\operatorname{tg}y\left(|y|<\frac{\pi}{2}\right)$，根据【定理】18，$y\to\frac{\pi}{2}$ $(x\to+\infty)$，故由[定理]17 的例题 4，得

$$\lim_{x\to+\infty}x(\pi-2\operatorname{tg}^{-1}x)=\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}y(\pi-2y)=2.$$

1·8 指数函数的极限

【定理】19. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

证明 当 n 是自然数时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$(其中 e 是自然对数的底，见第九章§6，6.4)．当 $x>1$ 时，若取自然数 n 使满足 $n\leqslant x\leqslant n+1$，则

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

根据指数函数的单调性(见§2，【定理】13)，有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}$$

$$\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\therefore\quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

当 $x\to+\infty$ 时，$n\to\infty$，并且有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

因此，由【定理】2、【定理】4，得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

其次，若令 $x=-y$，则

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right).$$

当 $x\to-\infty$时，$y\to+\infty$，因此由上述结果，有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=e.$$

□

【系】1 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

证明 若令 $y=\frac{1}{x}$，则 $y\to\pm\infty\,(x\to0)$，根据【定理】19，有 $\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\to e$ $(y\to\pm\infty)$，故由【定理】5 的注意事项，有

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

【系】2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}(a\neq0)$.

证明 对于$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}$，由【定理】19 有$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\longrightarrow e$ $(x\to\pm\infty)$。且x^{a}在$(0,+\infty)$连续(§ 2,【定理】9) 故由【定理】5 的 (2)

有
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}$$
$$\left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a}=e^{a}.$$

例题1. 试求$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 若令$x=-\frac{1}{2y}$，则$y\to\pm\infty(x\to0)$，故由【定理】19，有
$$\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y}$$
$$=\lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2}=\left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2}=\frac{1}{e^{2}}.$$

例题2. 试求$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}$.

解 若令$x=-\frac{y}{3}$，则$y=\mp\infty(x\to\pm\infty)$，故由【定理】19，得
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{2x}=\lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}y}$$
$$=\lim_{y\to\mp\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-\frac{2}{3}}=\left[\lim_{y\to\mp\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-\frac{2}{3}}=e^{-\frac{2}{3}}.$$

【定理】20. $\lim\limits_{x\to0}a^{x}=1\quad(a>0)$.

证明 当$a=1$时，定理显然成立。当n是自然数时，有$a^{\frac{1}{n}}\to1\ (n\to\infty)$(见第九章§ 6,6.4)。

(1) $a>1$ 的情形　若 $0<x<1$，则存在自然数 n 使 $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$ 成立。从而，根据指数函数的单调性(§2，[定理]1)有 $a^{\frac{1}{n+1}}<a^x\leqslant a^{\frac{1}{n}}$。由于 $x\to+0$ 时，$n\to\infty$，而当 $n\to\infty$ 时，$a^{\frac{1}{n}}\to1$，$a^{\frac{1}{n+1}}\to1$，故由【定理】4，有 $a^x\to1(x\to+0)$。若令 $x=-y$，则当 $x\to-0$ 时，$y\to+0$。由上述结果，$a^y\to1$ $(y\to+0)$。故有 $\lim\limits_{x\to-0}a^x=\lim\limits_{y\to+0}(a^y)^{-1}=1$。因而当 $a>1$ 时，$\lim a^x=1$。

(2) $0<a<1$ 的情形　若令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$，故由(1)的结果有

$$\lim_{x\to0}a^x=\lim_{x\to0}(b^x)^{-1}=1.$$ □

【定理】21．当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$，

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$。

证明　(1)　当 $a>1$ 时　令 $a=1+k$ $(k>0)$，则由二项式定理（见第八章§3），有(式中 n 为自然数)．

$$a^n=(1+k)^n=1+nk+\frac{n(n-1)k^2}{2!}+\cdots+k^n\geq1+nk\ (n\geq1).$$

由于 $1+nk\to+\infty(n\to\infty)$，故 $a^n\to+\infty(n\to\infty)$。

当 $x>1$ 时，若取自然数 n 使 $n\leqslant x\leqslant n+1$，则根据指数函数的单调性(§2,【定理】13)，有 $a^n\leqslant a^x$，由于 $x\to+\infty$ 时，$n\to\infty$，故由上述结果和【定理】3，$a^x\to+\infty(x\to+\infty)$。

若令 $x=-y$，则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，因此 $a^y\to+\infty(y\to+\infty)$，从而，由【定理】2 的注意事项有 $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\lim\limits_{y\to+\infty}(a^y)^{-1}=0$。

(2) 当 $0<a<1$ 时，令 $a=\frac{1}{b}$，则 $b>1$。因此，由 (1) 的结果和【定理】2 的注意事项，有

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\lim_{x\to+\infty}(b^x)^{-1}=0.$$

若令 $x=-y$，则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，因此，由 (1)得 $b^y\to+\infty$

$(y\to+\infty)$.

从而，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\lim\limits_{y\to+\infty} b^y=+\infty$. □

【定理】22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

证明 若令 $e^x=1+y$，则 $x=\ln(1+y)$. 当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$(【定理】20)，因而，由【定理】24，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1. \quad □$$

【系】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (1\neq a>0)$.

证明 $a^x=e^{x\ln a}$，故由【定理】22，有

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a$$

$$=\ln a. \quad □$$

例题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=a-b$.

解 根据[定理]22，当 $ab\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}-\frac{e^{bx}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(a\cdot\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\,\frac{e^{bx}-1}{bx}\right)$$

$$=a\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}=a-b$$

当 $ab=0$ 时也同样可证。

1.9 对数函数的极限

【定理】23. 当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+0}\log_a x=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$.



证明　(1) 当 $a>1$ 时，由于 $\log_a x$ 是单增函数（§2，【定理】14）故对于任意的正数 G，当 $0<x<a^{-G}$ 时，恒有 $\log_a x<-G$. 因而

$\log_a x\to-\infty(x\to+0)$. 若令 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y\to+0(x\to+\infty)$, $\log_a x=-\log_a y$. 因而，由上述结果及【定理】2的注意事项有

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\lim_{y\to+0}\log_a y=+\infty.$$

(2) 当 $0<a<1$ 时，若令 $a=\dfrac{1}{b}$ 则 $b>1$，且

$$\log_a x=-\log_b x.$$

因而，由(1)的结果和【定理】2的注意事项，有

$$\lim\log_a x=-\lim_{x\to+0}\log_b x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\lim_{x\to+\infty}\log_b x=-\infty.$$ □

【定理】24. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

证明　$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e(x\to0)$【定理】19【系】1)，$\ln x$ 在$(0,+\infty)$连续(§2，【定理】14). 故由【定理】5的(2)得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]\ln e=1.$$ □

【系】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}(1\neq a>0)$.

证明　由【定理】24，得

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}.$$ □

例题1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$.

解　令 $x=1+y$，则当 $x\to1$ 时 $y\to0$. 故由【定理】24得

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1.$$

例题2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}=-3.$

解 令 $x=-\dfrac{y}{3}$ 则 $x\to 0$ 时 $y\to 0$，故由【定理】24得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}=-3\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$
$$=-3.$$

例题3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x=\ln a(1\neq a>0).$

解 令 $a^{\frac{1}{x}}=1+y$，则 $x\to\pm\infty$时 $y\to 0$【定理】20)，而$\dfrac{\ln a}{x}=\ln(1+y)$，

故由【定理】24得

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}$$
$$=\ln a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}$$
$$=\ln a.$$

§ 2. 函数的连续

2.1 定 义

【定义】1. 函数的连续·左(右)连续 如果函数 $f(x)$在 $x=a$ 的邻域(包括a在内)有定义，且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$，即对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得

当$|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

恒成立，这时称 $f(x)$在 $x=a$ 连续.

函数 $f(x)$在 $x=a$ 及其左(右)侧邻域有定义，且

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a)[\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)],$$

即对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使得

当 $0\leqslant a-x<\delta[0\leqslant x-a<\delta]$时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

恒成立，这时 称 $f(x)$在 $x=a$ 是左(右)连续的.

如果函数 $f(x)$在其区域 D 的一切点都是连续的，则称$f(x)$在区域 D

连续．

在闭区间$[a, b]$上定义的函数$f(x)$，当其在开区间(a, b)连续，又在$x=a$右连续，在$x=b$左连续时，则称$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，

注意　关于连续的【定义】1与关于极限的定义比较可看出，在【定义】1中没有$0<|x-a|$，$0<a-x$，$0<x-a$这样的不等式，这是因为连续函数$f(x)$在$x=a$有定义，故$x=a$处恒有

$$|f(x)-f(a)|=0<\varepsilon$$

的缘故．

另外，由§1.【定义】4的例题2可知，函数$f(x)$在$x=a$连续，与$f(x)$在$x=a$同时为左连续、右连续是等价的。

【定义】2．函数的间断　如果函数$f(x)$在$x=a$不连续，即$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在，或者它虽然存在但不等于$f(a)$，则称$f(x)$在$x=a$间断，且$a$叫做$f(x)$的间断点．

注意　当函数$f(x)$在$x=a$没有定义时，说$f(x)$在$x=a$连续或不连续是根本没有意义的，这时，若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，则随着定义$f(a)=l$，$f(x)$在$x=a$就变为连续的了。

例题　试考察下列函数的连续性

(1)　$f(x)=x^n$（n是自然数）；

(2)　$f(x)=[x]$；

(3)　$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，

(4)　$f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots$

解　(1)对于任意的实数a，有$f(x)=x^n\to f(a)=a^n$　$(x\to a)$　（§1.【定理】9），故x^n在$(-\infty, +\infty)$连续．

(2) (i) a为整数时，由于

$$f(x)=[x]=\begin{cases}a-1 & (a-1\leqslant x<a),\\ a & (a\leqslant x<a+1).\end{cases}$$

故有$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=a-1$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=a=f(a)$.

因此，$[x]$在$x=a$不连续，但是右连续。

(ii) a不为整数时，若令$[a]=n$，则$f(x)=n$ $(n\leqslant x<n+1)$．故有$\lim\limits_{x\to a} f(x)=n=f(a)$。因而$[x]$在$x=a$连续．

(3) $f(x)$在 $x=2$ 是没有定义的，但由于$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$，(§1.【定义】1 的例题 2)，所以，如果定义 $f(2)=4$，则 $f(x)=x+2$ 且 $f(x)$在 $x=2$连续.

(4) $x\neq 0$ 时，由于 $0<\dfrac{1}{1+x^2}<1$，故原式右端的无穷等比级数收敛，其和为 $f(x)=1+x^2$ (第九章 §8, 8.7)，因而 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 连续(§1.【定理】9)．另外，由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\neq 0=f(0)$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 不连续.

2.2 基本性质

【定理】1. 函数 $f(x)$当 $x=a$ 连续的充分必要条件是，对收敛于 a 的任意数列 $\{x_n\}$，相应的数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

证明 所谓 $f(x)$在 $x=a$ 连续，即是 $f(x)\to f(a)(x\to a)$ 成立，因而，由 §1.【定理】1，此定理成立. □

【定理】2. 若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=a$ 连续，则 $kf(x)$ (k 是常数)，$f(x)+g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(a)\neq 0)$在 $x=a$ 也连续.

证明 由于 $f(x)$，$g(x)$在 $x=a$ 连续，故当 $x\to a$ 时有 $f(x)\to f(a)$，$g(x)\to g(a)$，在 §1.【定理】2 中，若令 $A=f(a)$，$B=g(a)$，则此定理成立. □

例题 (1) 若函数 $f(x)$在 $x=a$ 连续，则 $|f(x)|$ 也在 $x=a$ 连续.

(2) 若函数 $f(x)$，$g(x)$在 $x=a$ 连续，则 $\max[f(x), g(x)]$，$\min[f(x), g(x)]$在 $x=a$ 也连续.

解 (1) 由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，故有 $f(x)\to f(a)(x\to a)$. 从而，由 §1.【定义】1 的例题 4，有 $|f(x)|\to|f(a)|$，故 $|f(x)|$ 也在 $x=a$ 连续

(2) $$\max[f(x), g(x)]=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2},$$

$$\min[f(x), g(x)]=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}.$$

由于 $f(x)$，$g(x)$在 $x=a$ 连续，故由【定理】2和(1)知，$f(x)\pm g(x)$，$|f(x)-g(x)|$ 在 $x=a$ 也连续，因而，$\max[f(x), g(x)]$，$\min[f(x), g(x)]$在 $x=a$ 也连续.

【定理】3. 当函数 $f(x)$ 的值域包含在函数 $g(y)$ 的定义域内时，若 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $g(y)$ 在 $y=f(a)$ 连续，则复合函数 $g[f(x)]$ 在 $x=a$ 也连续。

证明 这个定理是在§1.【定理】5 中，$f(x)$ 在 $x=a$ 连续且(2)成立的特别情形，在此将用另一方法来证明。

设 $\{x_n\}$ 是包含在 $f(x)$ 的定义域内且收敛于 a 的任意数列。由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，故由【定理】1 有 $f(x_n)\to f(a)(n\to\infty)$。由于 $g(y)$ 在 $y=f(a)$ 连续，故有 $g[f(x_n)]\to g[f(a)](n\to\infty)$。因此由【定理】1 $g[f(x)]$ 在 $x=a$ 也连续。 □

例题 (1) $\cos x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续；

(2) $\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1, +1]$ 连续。

解 (1) x^2 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续(【定理】6)，其值域是 $(0, +\infty)$。由于 $\cos y$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续(【定理】10)，且 $(0, +\infty)\subset(-\infty, +\infty)$ 故由[定理]3，$\cos x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续。

(2) $1-x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续(【定理】6)，其值域是 $(-\infty, 1]$，$\sqrt{y}$，在 $[0, +\infty)$ 连续(【定理】8)。由于 $1-x^2$ 的值域未完全包含在 $\sqrt{y}$ 的定义域内，所以把 $1-x^2$ 的定义域限制在 $[-1,+1]$，以使复合函数 $\sqrt{1-x^2}$ 有定义。从而由【定理】3，$\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1, +1]$ 连续。

【定理】4. 若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，且 $f(a)>k$ $(f(a)<k)$，则可取 a 的适当的邻域，使 $f(x)>k$ $(f(x)<k)$ 在该邻域内成立。

证明 现就 $f(a)>k$ 的情形来证明($f(a)<k$ 的情形也同样可证)。由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 是连续的，故对于正数 $\varepsilon=f(a)-k$，存在正数 δ，使得

当 $|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon=f(a)-k$ 恒成立。因而，当 $|x-a|<\delta$ 时，$f(x)>f(a)-\varepsilon=k$ 恒成立。

【定义】3. 反函数 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，其值域为 $f(D)$。若对于 $f(D)$ 中的任意值 y，有 D 中的 x 值（不必是唯一的值）与之对应，则可得到以 $f(D)$ 作定义域，以 D 作值域的函数。这个函数叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**。用 $x=f^{-1}(y)$ 表示。

注意 即使 $f(x)$ 是单值函数，反函数 $f^{-1}(y)$ 也不一定是单值函数。按照惯例，一般用 x 表示自变量，所以常常把 $f^{-1}(x)$ 叫做 $f(x)$ 的反函数。$f(x)$ 的图形和 $f^{-1}(y)$ 的图形是同一个。但 $f^{-1}(x)$ 的图形和 $f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的两个图形。

【定理】5. 若函数 $f(x)$ 是在闭区间 $[a, b]$ 上连续的、严格单增（单减）的函数，且令 $\alpha=f(a)$，$\beta=f(b)$. 则必存在定义于闭区间 $[\alpha, \beta]$（$[\beta, \alpha]$）上的单值连续且严格单增（单减）的反函数 $f^{-1}(y)$.

证明 现就 $f(x)$ 是单增函数的情形来证明（$f(x)$ 是单减函数的情形同样可证）. 对于 $[\alpha, \beta]$ 中的任意的数 r，由【定理】15 知，在 $[a, b]$ 内存在 c 使 $f(c)=r$. 由于 $f(x)$ 是单增函数，故这样的 c 值仅有一个.

因而，$f^{-1}(y)$ 是在 $[\alpha,\beta]$ 定义的单值函数. 设 y_1，y_2 是 $[\alpha, \beta]$ 中的两个点，且令 $y_1<y_2$. 这时若令 $x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$，则 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$ 暂且假设 $x_1\geq x_2$，则由于 $f(x)$ 是单增函数，故，$f(x_1)\geq f(x_2)$，即 $y_1\geq y_2$. 这与 $y_1<y_2$ 矛盾. 因而，$f^{-1}(y)$ 是严格单增函数. 对于 (α, β) 中的任意的数 r，令 $c=f^{-1}(r)$. 对小于 $\min(c-a, b-c)$ 的任意正数 ε，若令 $\lambda=f(c-\varepsilon)$，$\mu=f(c+\varepsilon)$，则 $\lambda<r<\mu$（见图 10-4）. 设 $\delta=\min(r-\lambda, \mu-r)$，则当 $|y-r|<\delta$ 时，$\lambda\leqslant r-\delta<y<r+\delta\leqslant\mu$，且由于 $f^{-1}(y)$ 是单增函数，故

$$f^{-1}(r)-\varepsilon=c-\varepsilon=f^{-1}(\lambda)<f^{-1}(y)<f^{-1}(\mu)=c+\varepsilon=f^{-1}(r)+\varepsilon.$$

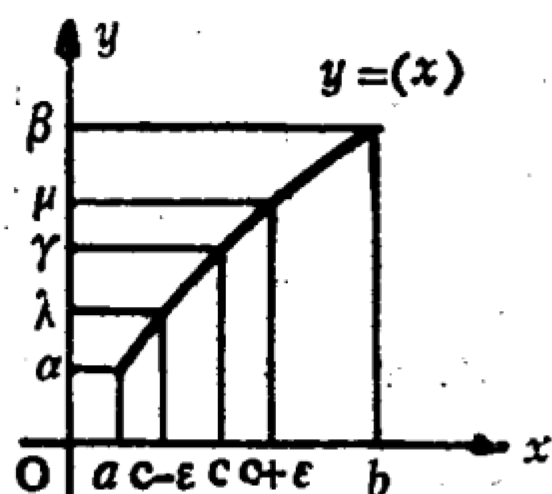


图 10-4

也就是说，当 $|y-r|<\delta$ 时，$|f^{-1}(y)-f^{-1}(r)|<\varepsilon$ 恒成立. 因而，$f^{-1}(y)$ 在 $y=r$ 是连续的. 同样可以证明，当 $r=\alpha$ 或 $r=\beta$ 时，对于充分小的正数 ε，若分别取 $\delta=f(a+\varepsilon)-\alpha$，$\delta=\beta-f(b-\varepsilon)$，则 $f^{-1}(y)$ 在 $y=\alpha$ 右连续，在 $y=\beta$ 左连续. 因而 $f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 是连续的. □

注意 当 $f(x)$ 是开区间 (a, b) 上的严格单增（单减）函数时，$f^{-1}(x)$ 的定义域是 $(f(a+0), f(b-0))$ $[f(b-0), f(a+0)]$. 对于 $a=-\infty$，$b=+\infty$ 的情形也有类似的考虑.

例题 试求函数 $f(x)=x^2-2x+3$ 的反函数.

解 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 连续（【定理】6），它的值域为 $[2, +\infty)$. 由于 $f(x)$ 在 $[1, +\infty]$ 是严格单增函数，而在 $(-\infty, 1)$ 是严格单减函数，故由【定理】5 知，存在一个以 $(2,+\infty)$ 为定义域的反函数. 从 $y=x^2-2x+3$ 解出 x，得 $f_1^{-1}(y)=1+\sqrt{y-2}$，$f_2^{-1}(y)=1-\sqrt{y-2}$，它们是反函数的两个分支，其定义域都是 $(2,+\infty)$，而值域分别是 $[1, +\infty)$，$(-\infty, 1]$.

2·3　基本的连续函数

【定理】6．整式是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数．

证明　设整式为 $f(x)$，a 为任意的实数，则由§1.【定理】9，有

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$．因而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续．

【定理】7．分式函数对于使分母不为0的一切 x 值都是连续的．

证明　设 $f(x)$，$g(x)$ 为整式，且令 $g(a)\neq 0$，则由§1.【定理】12，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}，因而\ \frac{f(x)}{g(x)}\ 在\ x=a\ 是连续的。$$

【定理】8　$x^{\frac{1}{n}}$ 当 n 为偶数时在 $[0, +\infty)$，n 为奇数时在 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的、严格单增函数．

证明　当 n 是自然数时，x^n 在 $(-\infty, +\infty)$ 是连续的(【定理】6)．由于

$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$，故当 $x>y\geqslant 0$ 时，$x^n>y^n$．又因为

$$x^{2n-1}-y^{2n-1}=(x-y)(x^{2n-2}+x^{2n-3}y+\cdots+xy^{2n-3}+y^{2n-2}),$$

故当 $x>y$ 时，$x^{2n-1}>y^{2n-1}$．

从而，当 n 为偶数时，x^n 是在 $[0, +\infty)$ 连续的严格单增函数，且由于 $x^n\to 0(x\to +0)$，$x^n\to +\infty(x\to +\infty)$（§1.【定理】10），故由【定理】5，$x^{\frac{1}{n}}$ 是在 $[0, +\infty)$ 连续的严格单增函数。当 n 为奇数时，x^n 是在 $(-\infty, +\infty)$ 连续的严格单增函数，且由于 $x^n\to -\infty(x\to -\infty)$，$x^n\to +\infty(x\to +\infty)$（§1.【定理】10），故 $x^{\frac{1}{n}}$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 连续的严格单增函数。 □

【定理】9．当 k 为实数时，x^k 在 $(0, +\infty)$ 连续

证明　当 $x>0$，$a>0$ 时，由§1.【定理】11知，$\lim\limits_{x\to a} x^k=a^k$，因此 x^k 在 $(0, +\infty)$ 连续． □

【定理】10．$\sin x$，$\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续

证明　设 x 为任意实数，$h\neq 0$，则

$$\left|\sin(x+h)-\sin x\right|=2\left|\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|,$$

$$\left|\cos(x+h)-\cos x\right|=2\left|\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{h}{2}\right|.$$

当$|h|<\pi$时，由于$\left|\sin\frac{h}{2}\right|<\frac{h}{2}$(参看§1.【定理】16的证明)，故有

$$|\sin(x+h)-\sin x|<|h|,$$
$$|\cos(x+h)-\cos x|<|h|.$$

从而，由§1.【定理】4，有

$$\lim_{h\to 0}\sin(x+h)=\sin x,\quad \lim_{h\to 0}\cos(x+h)=\cos x.$$

即 $\sin x$，$\cos x$ 在$(-\infty，+\infty)$连续. □

【定理】11. $\operatorname{tg}x$，$\sec x$ 当 $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$(n 是整数) 时连续，$\operatorname{ctg}x$，$\csc x$ 当 $x\neq n\pi$(n 是整数)时连续.

证明 由【定理】10，$\sin x$，$\cos x$ 在$(-\infty，+\infty)$连续，故由【定理】2知，

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x}$$

在 x 满足 $\cos x\neq 0$，即 $x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}$(n 是整数)时连续，同样，$\operatorname{ctg}x$，$\csc x$ 在 x 满足 $\sin x\neq 0$，即 $x\neq n\pi$(n 是整数)时连续. □

【定理】12. $\sin^{-1}x$，$\cos^{-1}x$ 在$[-1，+1]$连续，$\operatorname{tg}^{-1}x$，$\operatorname{ctg}^{-1}x$ 在$(-\infty，+\infty)$连续，$\sec^{-1}x$，$\csc^{-1}x$ 在$|x|\geq 1$时连续。这里，反三角函数表示其主值。

证明 $\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}，+\frac{\pi}{2}\right]$是连续的严格单增函数。

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad \sin\frac{\pi}{2}=1.$$

因而，由【定理】5知，$\sin^{-1}x$ 在$[-1、+1]$是连续的严格单增函数。$\cos x$ 在$[0，\pi]$是连续的严格单减函数，$\cos\pi=-1$，$\cos 0=1$，因而 $\cos^{-1}x$ 在$[-1，+1]$是连续的、严格单减函数.

$$\operatorname{tg}x\text{在}\left(-\frac{\pi}{2}，+\frac{\pi}{2}\right)\text{是连续的严格单增函数，}$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=-\infty,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty.$$

因而，$\operatorname{tg}^{-1}x$在$(-\infty，+\infty)$是连续的严格单增函数。

$\operatorname{ctg}x$ 在$(0,\pi)$是连续的严格单减函数。

$$\lim_{x\to+0}\operatorname{ctg}x=+\infty,\quad \lim_{x\to\pi-0}\operatorname{ctg}x=-\infty.$$

因而，$\operatorname{ctg}^{-1}x$ 在$(-\infty,+\infty)$是连续的严格单减函数。

$\sec x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$是连续的严格单增函数，

$$\sec 0=1,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sec x=+\infty,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\sec x=-\infty,$$

$$\sec\pi=-1.$$

从而，$\sec^{-1}x$ 在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$是连续的严格单增函数。

$\csc x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$是连续的严格单减函数，

$$\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1,\quad \lim_{x\to-0}\csc x=-\infty,\quad \lim_{x\to+0}\csc x=+\infty,$$

$$\csc\frac{\pi}{2}=1.$$

从而，$\csc^{-1}x$ 在$(-\infty,-1]$，$[1,+\infty)$是连续的严格单减函数.

【定理】13. $a^x(1\neq a>0)$是在$(-\infty,+\infty)$连续的严格单调函数，当 $a>1$ 时，单调增加，当 $0<a<1$ 时，单调减少。

证明　根据§1.【定理】20，$a^x\to1(x\to0)$，因此对于任意的实数 x_0，

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{x\to x_0}a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

从而，a^x 在$(-\infty,+\infty)$连续

当 $a>1$ 时，若 $x>y$，则 $a^{x-y}>1$，故得 $a^x=a^{x-y}\cdot a^y>a^y$。因而，当 $a>1$ 时，a^x 是严格单增函数.

当 $0<a<1$ 时，令 $b=\frac{1}{a}$，则 $b>1$. 由于 b^x 是严格单增函数，故 $a^x=\frac{1}{b^x}$是严格单减函数.　□

【定理】14. $\log_a x(1\neq a>0)$是在$(0,+\infty)$连续的严格单调函数，当 $a>1$ 时单调增加，当 $0<a<1$ 时单调减少.

证明　当$a>1$时，a^x 是在$(-\infty,+\infty)$连续的严格单增函数(【定理】13)，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$(§1，【定理】21). 因而，由【定理】5 知，

a^x 的反函数 $\log_a x$ 是在$(0, +\infty)$连续的严格单增函数。

当 $0<a<1$ 时，a^x 是在$(-\infty, +\infty)$连续的严格单减函数，且

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty, \lim_{x\to+\infty} a^x=0.$$

因而，$\log_a x$ 是在$(0, +\infty)$连续的严格单减函数. □

说明 我们把前面已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数通称为基本初等函数，凡是由常数及基本初等函数经过有限次的加减乘除运算及有限次的复合构成的并能用一个数学式子表示的函数称为初等函数，由 2.2【定理】2、【定理】3，2.3，【定理】9—【定理】14立刻得到一个相当广泛而有用的结论：一切初等函数在其定义域内每一点都是连续的。【定理】6及【定理】7是这一结论的直接推论。

2.4 关于连续函数的著名定理

【定理】15. 介值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于 $f(a)$和 $f(b)$之间的任意值 k，在开区间 (a, b) 内至少有一个点 c 存在，使 $f(c)=k$.

证明 现证明 $f(a)<k<f(b)$的情形。由于满足不等式 $f(x)<k$ 的 x 值的集合 E 是有上界的，所以必有 E 的上确界 C 存在(第九章§6，6.2)。因为 $f(a)<k$，故由【定理】4，a 的邻域内的点属于 E. 又因为 $f(b)>k$，故 b 的邻域内的点不属于 E. 因而有 $a<c<b$. 现用反证法来证明。对于这个 C，$f(c)=k$ 成立。

暂且设 $f(c)>k$. 则由上确界的性质知，无论对怎样小的正数 ε，在 E 中也有 x_0 存在，使 $C-\varepsilon<x_0<C$，$f(x_0)<k$. 由于 $f(c)>k$，故由【定理】4，若适当地取正数 δ，则在开区间$(C-\delta, C)$内，$f(x)>k$恒成立，这与 $f(x_0)<k$ 相矛盾。另一方面，暂且又设 $f(c)<k$. 若适当地取正数δ，则在开区间$(C, C+\delta)$内，$f(x)<k$ 恒成立，这与 C 是 E 的上确界相矛盾。因而必须有 $f(c)=k$.

在 $f(a)>k>f(b)$的情形也同样可证。 □

【系】 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$，则在开区间(a, b)至少存在一个 C 使 $f(c)=0$.

证明 由于 $f(a)f(b)<0$，故有 $f(a)<0<f(b)$ 或 $f(a)>0>f(b)$，因而在【定理】15中令 $k=0$ 即可得证. □

例题1. 当 $a<b<c$ 时，方程式

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

具有相异的二实根。

解　将原式去分母，所得的同解二次方程是

$$f(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0.$$

$f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$连续，并且根据假设条件有

$$f(a)=(a-b)(a-c)>0,$$
$$f(b)=(b-c)(b-a)<0,$$
$$f(c)=(c-a)(c-b)>0.$$

从而，由【定理】15的【系】知，在开区间$(a,\ b)$，$(b,\ c)$内，$f(x)=0$ 都至少有一个实根．由于 $f(x)=0$ 是二次方程式，故给定的方程式也恰有相异的二实根。

例题2．奇数次的实系数代数方程式至少具有一个实根。

解　设该方程为 $f(x)=0$ 且最高次项的系数为 1．函数 $f(x)$ 在$(-\infty,\ +\infty)$连续（【定理】6），且 $f(x)\to+\infty(x\to+\infty)$，$f(x)\to-\infty\ (x\to-\infty)$（§1.【定理】10）。

从而，若适当选取 a、b，则 $f(x)$在$[a,\ b]$连续，且 $f(a)<0$，$f(b)>0$。因而由【定理】15的【系】，$f(x)=0$ 在$(a,\ b)$内至少具有一个实根。

例题3．当 $a>0$，$1>b>0$ 时，方程式 $x-b\sin x=a$ 恰有一个实根。

解　令 $f(x)=x-b\sin x-a$，则 $f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$ 连续（【定理】6，【定理】10，【定理】2），若把它变形成

$$f(x)=x\left(1-\frac{b\sin x}{x}-\frac{a}{x}\right)$$

则因$\left|\frac{b\sin x}{x}\right|\leqslant\left|\frac{b}{x}\right|$，$\frac{b}{x}\to0(x\to+\infty)$，$\frac{a}{x}\to0(x\to+\infty)$所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。从而，若适当选择正数 k，则 $f(k)>0$．另一方面，由于 $f(0)=-a<0$，故由【定理】15的【系】，方程式 $f(x)=0$ 在$(0,\ k)$至少有一个实根。又因为 $f'(x)=1-b\cos x>0$，所以 $f(x)$是严格单增函数（第11章§5），因而 $f(x)$恰有一个实根。

【定理】16．若函数 $f(x)$在闭区间$[a、b]$连续，则 $f(x)$在$[a、b]$有界

证明　暂且假定 $f(x)$ 没有上界，则对于自然数 n 在$[a,\ b]$上存在 x_n，使 $f(x_n)>n$．由于数列 $\{x_n\}$ 是有界的，故可取出一个收敛于 $[a,\ b]$ 上一点x_0的子数列 $\{x_{nk}\}$（第十五章，§3，3.6）。由于 $f(x)$在 $x=x_0$ 连续，故

由【定理】1，$f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$成立，另一方面，从数列$\{x_n\}$的选择方法，有$f(x_{n_k})>n_k$．从而，$f(x_{n_k})\to\infty(k\to\infty)$．这与$\{f(x_{n_k})\}$收敛相矛盾。因而，$f(x)$有上界。同样可证$f(x)$有下界。 □

注意 若$f(x)$在开区间连续，则$f(x)$不一定有界．例如$\frac{1}{x}$在(0，1)是连续的，但$\frac{1}{x}\to+\infty(x\to+0)$，故$\frac{1}{x}$在(0，1)没有界．

【定理】17．若函数$f(x)$在闭区间[a，b]连续，则$f(x)$在[a，b]取到最大值及最小值．

证明 现证明$f(x)$在[a，b]取到最大值．根据【定理】16，由于$f(x)$在[a，b]有界，故$f(x)$的值域有上确界M存在（第九章§6，6.2）。根据上确界的性质，对于[a，b]中的任何x值，都有$f(x)\leqslant M$．假定在[a，b]上不存在x使$f(x)=M$．则在[a，b]上恒有$f(x)<M$．因此函数$F(x)=\frac{1}{M-f(x)}$在[a，b]连续．由于$F(x)$在[a，b]是有界的，所以如果令$F(x)$的值域的上确界为G，则有$0<\frac{1}{M-f(x)}\leqslant G$．由此得$f(x)\leqslant M-\frac{1}{G}$．这与$M$是$f(x)$的值域的上确界相矛盾．因而在[a，b]上存在$x$使$f(x)=M$．若令$m$为$f(x)$的值域的下确界，则同样可证明在[a，b]也存在$x$使$f(x)=m$．

注意 若$f(x)$在开区间连续，则$f(x)$在此区间不一定取到最大值及最小值．例如$f(x)=x$在开区间(0，1)连续，则其值域的上确界是1，下确界是0。但在(0，1)内能达到上、下确界的x是不存在的．

2.5 一致连续、连续延拓

【定义】4．函数的一致连续 函数$f(x)$在其定义域D一致连续是指，对于任意的正数ε，存在仅与ε有关的正数δ，使得

当$|x_1-x_2|<\delta$，$x_1\in D$，$x_2\in D$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$恒成立。

注意 若函数$f(x)$在其定义域D内连续，则$f(x)$在D内任意一点a连续．从而对于任意的正数ε，存在正数δ，使得

当$|x-a|<\delta$，$x\in D$时，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$恒成立．这个δ不仅依赖于ε，而且，一般地说也与a在D中的位置有关（图10-5）．若能确定出只依赖于ε而与D中各个a的位置无关的共通的δ，则这样的情形就是

一致连续.

例题　函数$\frac{1}{x}$在 (0, 1) 不一致连续，但在 (1, +∞) 一致连续.

解　若设$f(x)=\frac{1}{x}$在 (0, 1) 是一致连续的，则对于$\varepsilon=1$，存在正数δ，当$|x_1-x_2|<\delta$，且x_1、$x_2\in(0,1)$时，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现设n为自然数，若令

$$x_1=\frac{1}{n+1},\quad x_2=\frac{1}{n+2},\quad 则|x_1-x_2|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

且　$$|f(x_1)-f(x_2)|=|(n+1)-(n+2)|=1=\varepsilon.$$

当$n\to\infty$时，$|x_1-x_2|=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\to0$.

因此，无论把$|x_1-x_2|$取得多么小，$|f(x_1)-f(x_2)|$也不比1小.因而$f(x)=\frac{1}{x}$在 (0, 1) 不一致连续.

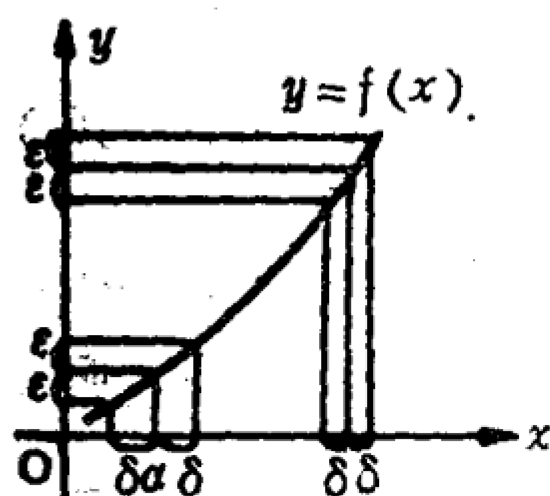


图10-5

其次，若令x_1、$x_2\in(1,+\infty)$，则

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}<|x_1-x_2|.$$

因此，对于任意的正数ε，若取$\delta=\varepsilon$，则与x_1、x_2在 (1 +∞)中的位置无关地，当$|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$恒成立．因而$f(x)=\frac{1}{x}$在 (1, +∞)一致连续.

【定理】18.　若函数$f(x)$在闭区间 [a, b] 连续，则$f(x)$在 [a, b] 一致连续.

证明　暂且假定$f(x)$在[a, b]不一致连续，则对于某正数ε，无论怎样取正数δ，总存在x'、x''，虽然有

$$|x'-x''|<\delta,\ x',\ x''\in[a,b],\ 但|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon.$$

现在，特别地取$\delta=\frac{1}{n}$(n是自然数)，则存在两个数列$\{x_n'\}$，$\{x''_n\}$，它们满足下列关系.

$$|x_n'-x_n''|<\delta=\frac{1}{n},\ x'_n、x_n''\in[a,b],\ |f(x'_n)-f(x_n'')|\geq\varepsilon.$$

由于 $\{x'_n\}$ 是有界的，故存在子数列 $\{x'_{n_k}\}$. 它收敛于 [a, b] 上的一点 x_0（第十五章，§3, 2.6）.

由于 $x''_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$, $|x'_{n_k}-x''_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}$, $x''_{n_k}=(x''_{n_k}-x'_{n_k})+x'_{n_k}$，故有 $x'_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$. 从而，由【定理】1

$$\lim_{k\to\infty}f(x'_{n_k})=\lim_{k\to\infty}f(x''_{n_k})=f(x_0),$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}[f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})]=0.$$

这与 $|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|\geqslant\varepsilon$ 矛盾. 因而，$f(x)$ 在 [a, b] 是一致连续的. □

【定义】5. 连续延拓 设函数 $f(x)$ 在闭区间 [a, b] 内的全部有理数 R 上有定义且连续. 如果存在以 [a, b] 为定义域的连续函数 $F(x)$ 使在 R 上，$f(x)=F(x)$，则把 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 向 [a, b] 的连续延拓.

【定理】19. 以闭区间 [a, b] 上全部有理数 R 为定义域的函数 $f(x)$，具有向 [a, b] 的连续延拓的充分必要条件是，$f(x)$ 在 R 一致连续.

证明 〈充分性〉 对于 [a, b] 中的任意的数 ξ，有数列 $\{x_n\}$ 存在，使 $x_n\in R$, $x_n\to\xi(n\to\infty)$（第九章，§9, 9.3）. 由于 $f(x)$ 在 R 一致连续，故对于任意的正数 ε，存在正数 δ，使

当 $|x-x'|<\delta$, x、$x'\in R$ 时，$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ 恒成立. 另一方面，由于 $x_n\to\xi(n\to\infty)$，故对于上述 δ，存在自然数 n，使得

当 $m>n>n_0$ 时，$|x_m-x_n|<\delta$

恒成立（第九章，§6, 6.2），从而，

当 $m>n>n_0$ 时，$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$

恒成立，故数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限值与在 R 内收敛于 ξ 的数列 $\{x_n\}$ 的选择方法无关（参看 §1，【定理】1 的证明）. 因而，特别地当 $\xi\in R$ 时，若取 $x_n=\xi(n=1, 2, \cdots)$，则 $f(x_n)\to f(\xi)(n\to\infty)$.

现在对于 [a, b] 中任意的 ξ，取数列 $\{x_n\}$ 使之满足 $x_n\in R$, $x_n\to\xi$ $(n\to\infty)$. 若令

$$F(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(x_n),$$

则可得到定义域为 [a, b] 的函数 $F(x)$，当 $x\in R$ 时，$F(x)=f(x)$ 其次，对于满足 x、$x'\in[a, b]$, $|x-x'|<\delta$ 的 x、x'，选取数列 $\{x_n\}$、$\{x'_n\}$，使满足 $x_n\to x$、$x'_n\to x'(n\to\infty)$, x_n、$x'_n\in R$. 若适当选择自然数 n_0，则

当 $n>n_0$ 时，$|x_n-x_n'|<\delta$

恒成立．因此

当 $n>n_0$ 时，$|f(x_n)-f(x_n')|<\varepsilon$

恒成立．在上式中，若令 $n\to\infty$，则 $f(x_n)\to F(x)$，$f(x_n')\to F(x')$，因此由上述不等式得 $|F(x)-F(x')|\leqslant\varepsilon$．从而，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且是 $f(x)$ 向 $[a,b]$ 的连续延拓．

〈必要性〉 设在 R 定义的函数 $f(x)$ 具有向 $[a,b]$ 的连续延拓，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，从而在 $[a,b]$ 一致连续（【定理】18）．对于包含在 $[a,b]$ 内的 R 来说，由于 $F(x)=f(x)$，故 $f(x)$ 在 R 一致连续． □

例题 在闭区间 $[a,b]$ 内的全部有理数 R 上定义的函数 $a^x(1\neq a>0)$ 具有向 $[a,b]$ 的连续延拓．

解 首先证明下列不等式：

若 $a\geqslant 1$，则 $|a^x-1|\leqslant a^{|x|}-1$．

证明 当 $x\geqslant 0$ 时，这是很显然的，当 $x<0$ 时，$|x|=-x$．

$$a^x+a^{|x|}=a^x+a^{-x}>2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2,$$

$$\therefore\ |a^x-1|=1-a^x<a^{|x|}-1.$$

(1) 当 $a>1$ 时，设 x_1、$x_2\in R$，则由上述不等式得

$$|a^{x_1}-a^{x_2}|=a^{x_2}|a^{x_1-x_2}-1|$$

$$\leqslant a^{x_2}(a^{|x_1-x_2|}-1). \quad ①$$

现在取一个固定的有理数 M，使 $\max(|a|,|b|)<M$． 由 § 1.【定理】20，$a^{\frac{1}{n}}\to 1(n\to\infty)$，因此对于任意的正数 ε，存在自然数 n_0，使

$$a^{\frac{1}{n_0}}<1+a^{-M}\varepsilon$$

成立，对于 ε，若取 $\delta=\frac{1}{n_0}$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，由①、②式得

$$|a^{x_1}-a^{x_2}|\leqslant a^{x_2}(a^{|x_1-x_2|}-1)$$

$$<a^M(a^{\frac{1}{n_0}}-1)<a^M\cdot a^{-M}\varepsilon=\varepsilon.$$

也就是说，由于对任意的正数 ε，存在正数 δ 当

$|x_1-x_2|<\delta$，x_1、$x_2\in R$ 时，$|a^{x_1}-a^{x_2}|<\varepsilon$ 恒成立，故 a^x 在 R 一致连续．

(2) 当 $0<a<1$ 时，由于 $\frac{1}{a}>1$，$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}>a^{2M}$，故有

$$|\alpha^{x_1}-\alpha^{x_2}|=\left|\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_1}}-\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_2}}\right|=\frac{\left|\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_2}\right|}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_2}}$$

$$<\left|\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_1}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{x_2}\right|\alpha^{-2M}$$

由(1)知，$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^x$在 R 一致连续，且上述不等式成立，因此 α^x 在R也仍然是一致连续的.

根据(1)，(2)，α^x 在 R 一致连续，故由【定理】19知，α^x 具有向$[a，b]$的连续延拓.

注意　当 $a>0$，$b>0$ 时，对于有理数 m、n，下列指数法则成立。

(1) $a^m a^n=a^{m+n}$；　　(2) $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$；

(3) $(a^m)^n=a^{mn}$；　　(4) $(ab)^n=a^n b^n$；

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$；　　(6) $1^n=1$；

(7) 当 $0<a<b$ 时，若 $n>0$ 则 $a^n<b^n$.

由于对有理数 x 定义的函数 a^x 具有**连续延拓**，可以证明，对于实指数x，a^x 也具有与上面形式相同的指数法则。例如，对法则(1)与(7)证明如下

(1) 设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，各是收敛于实数 x，y 的有理数列，则

$$a^{x_n}a^{y_n}=a^{x_n+y_n}.$$

若令 $n\to\infty$，则由 a^x 的连续性，有 $a^{x_n}\to a^x$，$a^{y_n}\to a^y$，$a^{x_n+y_n}\to a^{x+y}$，因此

$$a^x a^y=a^{x+y}$$

成立。

(7) 设 $0<a<b$，$x>0$，选取收敛于 x 的有理数列 $\{x_n\}$．对于正数$\frac{x}{2}$，存在自然数 n_0，使

当 $n>n_0$ 时，$|x_n-x|<\frac{x}{2}$

恒成立，从而，当 $n>n_0$ 时，$x_n>\frac{x}{2}$ 恒成立。

第十一章　微分学

§1. 导　数

1·1　平均变化率和导数

【定义】1. 平均变化率　在函数$y=f(x)$所定义的区间 I 上取相异二点x_0，x_1，其对应的函数值分别为 y_0，y_1.　令$\Delta x=x_1-x_0$，$\Delta y=y_1-y_0$，称比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$为函数 y 在区间$[x_0, x_1]$(如果 $x_0<x_1$)或$[x_1, x_0]$(如果 $x_1<x_0$)上的平均变化率.

注意　Δx 通常叫做自变量 x(在点 x_0) 的增量 (或改变量)，Δy 叫做函数 y(在 y_0 由自变量增量 Δx 引起)的增量，从其定义看，自变量增量可以为正数，也可以为负数，但一般不能为零。但 Δy 是可以为零的。

【公式】1. 函数 $y=f(x)$在区间$[x_0, x_1]$上的平均变化率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

例题1. 求 $f(x)=x^2$ 在$[x_0, x_1]$上的平均变化率。

解
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{x_1^2-x_0^2}{x_1-x_0}=x_1+x_0$$
$$=(x_0+\Delta x)+x_0=2x_0+\Delta x.$$

【定义】2. 导数 已知 $y=f(x)$定义在区间 I 上。设x_0，$x_1\in I$ 且x_0 是 I 的内点. 如果当 $x_1\to x_0$ 即 $\Delta x=x_1-x_0\to 0$ 时极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在且有限，则称此极限值为函数 $y=f(x)$在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$，换言之，$f(x)$ 在点 x_0 的导数就是它在$[x_0, x_1]$上的平均变化率的极限，也就是 $f(x)$在x_0的瞬时变化率。

注意　导数的上述定义可详叙如下：

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 为定数 a 是指：若对于任给的正数 ε，相应地存在正数 δ，使得

$$\text{当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时，} \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$$

成立。

【公式】2. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x_1\to x_0}\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

例题2. 求函数 $f(x)=x^2$ 在点 x_0 的导数.

解 由例题1，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$，故

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0.$$

1·2 导数的几何意义

设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点。过 P 引一直线 l，使其斜率等于 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$（l 称为曲线在点 P 的切线），若在该曲线上另取一个异于 P 的点 Q 并让 Q 无限趋近于 P，则这时直线 PQ 必无限趋近直线 l。因此，导数 $f'(x_0)$ 的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处切线的斜率。

1·3 可导与连续

【定义】3. 可导 已知 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上.设 x_0 是 I 的一个内点。如果 $f'(x_0)$ 存在（必然是有限值），则称函数 $y=f(x)$ 在（内）点 x_0 可导。

【例题】1. 证明 $y=x^2$ 在任意点 x_0 可导。

解 令 $f(x)=x^2$，由前段例题 2，$f'(x_0)=2x_0$，即 $f'(x_0)$ 存在，故 $y=x^2$ 在任意点 x_0 可导.

【定理】1. 如果 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则它在 $x=x_0$ 连续.

证明 因 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在且有限，由于 $\Delta x\neq 0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$，根据第十章【定理】2，

(3)得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

即当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to f(x_0)$。故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续． □

注意1. 如果按函数极限的严格定义（第十章1.1，【定义】1）来证明定理，有如下详细的证法：

因 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$，故对任给的正数 ε，相应存在正数 δ_1，使

当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$ 成立．取 $\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+|f'(x_0)|}$，$\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot|x-x_0|\\&\leqslant\left(\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|+|f'(x_0)|\right)\cdot|x-x_0|\\&<(\varepsilon+|f'(x_0)|)\cdot\delta\\&\leqslant(\varepsilon+|f'(x_0)|)\delta_2\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

此外，当 $x=x_0$ 时，显然有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，故由第十章2.1【定义】1知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续．

注意2. 【定理】1 的逆定理不成立，如下例所示．

例题2. 说明函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

在 $x=0$ 连续，但不可导．

解 因 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ 及 $|f(x)-f(0)|=\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|1|$，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续．但由

于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}\text{不存在.}$$

故 $f(x)$在 $x=0$ 不可导.

【定义】4. 在区间上可导 已知 $y=f(x)$, $x\in I$, $f(x)$在某区间 $J(J\subseteq I)$ 的各点都可导，那么称 $f(x)$在区间 J 上可导.

例 由例题 1，函数 $y=x^2$ 在任意区间上可导.

1·4 左导数和右导数

【定义】5. 在一点右可导及在该点的右导数 已知 $y=f(x)$, $x\in I$. 取定$x_0\in I$ 且 x_0 不是I 的右端点. 如果当 I 内点 x 从 x_0 右侧无限趋近于 x_0，即当 $\Delta x=x-x_0$ 大于零而趋近于零时极限 $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在有限，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 右可导并称此极限值为它在点 x_0 的右导数.

【定义】6. 在一点左可导及在该点的左导数 已知 $y=f(x)$, $x\in I$. 取定 $x_0\in I$ 且 x_0 不是 I 的左端点. 如果当 I 内点 x 从 x_0 左邻无限趋近于 x_0，即当 $\Delta x=x-x_0$ 小于零而趋近于零时极限 $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在有限，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 左可导并称此极限值为它在点 x_0 的左导数.

记号 $y=f(x)$在 x_0 的左导数用 $f_-'(x_0)$ 或 $D^-f(x_0)$ 表示，右导数用 $f_+'(x_0)$或 $D^+f(x_0)$表示.

【公式】3. $f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

$$f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

例题 求 $y=\sqrt{x^2}$ 在 $x=0$ 的左导数与右导数.

解 $f_\pm'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2-0}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\pm 1$. (同取"+"号或同取"−"号).

【定理】2. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 既左可导、又右可导，且在 x_0 的左、右导数有相等的值，则 $f(x)$在 $x=x_0$ 可导，其导数 $f'(x_0)$就是这个相等的值.

证明 设 $f_+'(x_0)=f_-'(x_0)=a$. 于是，对任给的正数 ε，同时存在正数

δ_1, δ_2, 使得

当 $0<x-x_0<\delta_1$ 或 $0<x_0-x<\delta_2$ 时同时有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$$

成立. 取 $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$, 故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$ 存在.

即 $f(x)$ 在 x_0 可导且 $f'(x_0)=a$. □

【定理】3. 如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 右(左)可导, 则

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)\right).$$

即右可导必右连续, 左可导必左连续.

证明 可仿【定理】1 "注意"中的证法进行, 设 $f(x)$ 在 x_0 右可导, 并令 $f'_+(x_0)=a$. 则对任给 $\varepsilon>0$, 存在正数 δ_1, 当 $0<x-x_0<\delta_1$ 时, $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|<\varepsilon$. 今取 $\delta_2=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+|a|}$, $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$,则当 $0<x-x_0<\delta$ 时.

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot|x-x_0|\leqslant$$

$$\left(\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-a\right|+|a|\right)\cdot|x-x_0|<(\varepsilon+|a|)\cdot\delta\leqslant\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

对左连续的证明, 只须以 $0<x_0-x<\delta_1$, $0<x_0-x<\delta$ 代替 $0<x-x_0<\delta_1$, $0<x-x_0<\delta$ 即可. □

§ 2. 微分法的定理

2.1 基本初等函数*的导(函)数

【定义】1. 导(函)数 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内可导. 对 I 的每一内点 x,

---

* 通常, 人们称常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数这六类函数为基本初等函数, 由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合步骤构成的用一个数学式子表示的函数称为初等函数. ——译注

有唯一确定的值 $f'(x)$ 与之对应。这样得到的函数 $f'(x)$，是由函数 $f(x)$ 导引出来，故称为 $f(x)$ 的导函数·有时也直接称导数。求已知函数的导数的过程称为函数的微分或求导，求导函数的运算方法称为微分法或求导法。

记号 通常用下列各记号在不同的场合表示 $y=f(x)$ 的导函数：

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ Df(x),\ \dot{y},\ D_x y.$$

【公式】1. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

注意 导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 的值 $f'(a)$，是函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的导数.

【公式】2. 基本初等函数的导函数(一)

函数 $f(x)$	导函数 $f'(x)$
(1) $y=c$(定数)，	$y'=0$.
(2) $y=x$，	$y'=1$.
(3) $y=\dfrac{1}{x}$，	$y'=-\dfrac{1}{x^2}$.
(4) $y=\sin x$	$y'=\cos x$.
(5) $y=\cos x$，	$y'=-\sin x$.

证明 由【公式】1，

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

针对(1)—(5)中各函数，有

(1) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$.

(2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1$.

(3) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\dfrac{1}{x^2}$.

(4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\cos x\cdot 1$$

$$=\cos x.$$

(5) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=-\sin x\cdot 1$$

$$=-\sin x.$$ □

2·2 函数的和、差、数积的微分法

设 $f(x)$和 $g(x)$可导，则

【定理】1. (1) $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x)$;

(2) $\frac{d}{dx}[c\cdot f(x)]=cf'(x)$ (c 是常数)

(3) $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=f'(x)-g'(x)$.

证明 (1) 令 $h(x)=f(x)+g(x)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right].$$

因 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ 及 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x)$

存在，故

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=f'(x)+g'(x).$$

(2) 令 $h(x)=C\cdot f(x)$，则

$$\frac{d}{dx}[C\cdot f(x)]=h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C\cdot f(x+\Delta x)-C\cdot f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}C\cdot\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

因 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$存在，故

$$\frac{d}{dx}[C\cdot f(x)]=C\cdot f'(x).$$

(3) 由已证的(1)和(2)得

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]=\frac{d}{dx}[f(x)+(-1)\cdot g(x)]$$

$$=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}[(-1)\cdot g(x)]$$

$$=f'(x)+(-1)g'(x)$$

$$=f'(x)-g'(x).$$ □

【系】 如果各 $f_i'(x)$都存在，则

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{n}f_i'(x).$$

【证明】 当 $n=1$ 时，此公式显然成立．假设它当 $n=m$ 时成立，即

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m}f_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{m}f_i'(x).\qquad(*)$$

则当 $n=m+1$ 时，

$$\sum_{i=1}^{m+1} f_i(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i(x)+f_{m+1}(x).$$

因此由定理 1，(1)有

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m+1} f_i(x)\right]=\left[\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{m} f_i(x)\right]+f'_{m+1}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{m} f_i'(x)+f'_{m+1}(x) \quad (\text{由}(\cdot)\text{式})$$

$$=\sum_{i=1}^{m+1} f'_i(x)$$

成立．故对一切自然数 n，公式都成立． □

2·3 复合函数的微分法

【定理】2．设函数 $u=g(x)$ 在 x 的某区间 I 内可导，又函数 $y=f(u)$ 在 $g(I)(g(I)=\{g(x):x\in I\})$ 内可导，则复合函数 $F(x)=f(g(x))$ 在 I 内可导而且 $F'(x)=f'(u)\cdot g'(x)\left(\text{或写作}\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right)$.

证明 给 x 以增量 Δx，相应地，$u=g(x)$ 得到增量 Δu，$y=f(u)$ 得到增量 Δy.

因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$，故 $\Delta u=g'(x)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x$，其中 $\varepsilon_1\to 0$（当 $\Delta x\to 0$）．又因 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$，故 $\Delta y=f'(u)\Delta u+\varepsilon_2\cdot\Delta u$，其中 $\varepsilon_2\to 0$（当 $\Delta u\to 0$）．所以

$$\begin{aligned}\Delta y&=[f'(u)+\varepsilon_2][g'(x)+\varepsilon_1]\Delta x\\&=\{f'(u)\cdot g'(x)+[\varepsilon_2\cdot g'(x)+\varepsilon_1\cdot f'(u)+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2]\}\Delta x\\&=[f'(u)\cdot g'(x)+\varepsilon]\Delta x,\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=\varepsilon_2\cdot g'(x)+\varepsilon_1\cdot f'(u)+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$．由此，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot g'(x)+\varepsilon.$$

因当 $\Delta x\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0$，$\Delta u\to 0$，故 $\varepsilon_2\to 0$．从而当 $\Delta x\to 0$ 时 $\varepsilon\to 0$．由上式取极限得

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x).$$ □

【系】 如果 $y=f(z)$，$z=g(u)$，$u=h(x)$；则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

一般地，如果有 $n+2$ 个变数 x，x_1，x_2，$\cdots$，x_n，y 从其中第二个变数起，每一个变数是前一个变数的可导函数而且 y 能构成 x 的复合函数，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_n}\cdot\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\cdot\cdots\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}.$$

证明 由【定理】2，当 $n=1$ 时此公式成立．假设公式在 $n=m$ 时成立，即有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_m}\cdot\frac{dx_m}{dx_{m-1}}\cdot\cdots\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}\qquad(*)$$

于是，当 $n=m+1$ 时，y 是 x_{m+1} 的可导函数，x_{m+1} 是 x 的可导函数，而且 y 是 x 的复合函数，故由($*$)(它对于 $y=x_{m+1}$ 成立)及【定理】2，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx_{m+1}}\cdot\frac{dx_{m+1}}{dx}$$

$$=\frac{dy}{dx_{m+1}}\cdot\frac{dx_{m+1}}{dx_m}\cdot\frac{dx_m}{dx_{m-1}}\cdot\cdots\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}$$

公式成立．于是，对一切自然数 n 公式都成立． □

2·4　函数乘积的微分法

【定理】3．若 $f(x)$，$g(x)$都可导，则 $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$．

证明 令 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$，则

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]$$

$$=h'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$$



$$=\lim_{\Delta x\to}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\right.$$

$$\left.\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]$$

因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x)$

存在，又由 $g(x)$ 的连续性有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$

故

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$ □

【系】 如果 $y=f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$ 是三个可导函数的乘积，则 y 可导且

$$\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}+\frac{h'(x)}{h(x)}.$$

一般地，如果 y 是 $n(n\geqslant 2)$ 个可导函数，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots fn(x)$ 的积，则 y 可导且

$$\frac{y'}{y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}.$$

证明 当 $n=1$ 时，公式显然成立.

假设当 $n=m$ 时它成立，即对于 $Z=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots f_n(x)$ 有

$$\frac{Z'}{Z}=\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}.\qquad(*)$$

于是，当 $n=m+1$ 时，因 $y=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots f_m(x)\cdot f_{m+1}(x)=Z\cdot f_{m+1}(x)$，所以，利用【定理】3，$y'=Z'\cdot f_{m+1}(x)+Zf'_{m+1}(x)$，因此

$$\frac{y'}{y}=\frac{Z'}{Z}+\frac{f'_{m+1}(x)}{f'_{m+1}(x)}.$$

再由(※)得

$$\frac{y'}{y}=\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}+\frac{f'_{m+1}(x)}{f_{m+1}(x)}=\sum_{i=1}^{m+1}\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}.$$

从而公式成立，故对一切自然数 n 公式都成立。 □

【公式】3．基本初等函数的导函数(二)

(6) $y=x^n$ （n是正整数）　　$y'=nx^{n-1}$；

(7) $y=x^m$ （m是负整数）　　$y'=mx^{m-1}$.

证明 (6) 在【定理】3【推论】的一般公式中令 $f_i(x)=x$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，再由【公式】2，(2)得

$$\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}=\frac{1}{x},\quad \frac{y'}{y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x}=\frac{n}{x},$$

故　$y'=\frac{n}{x}\cdot y=n\cdot x^{n-1}$.

（7）令 $m=-n$（n为正整数），在【定理】3【推论】的一般公式中令$f_i(x)=\frac{1}{x}$（$i=1, 2, \cdots, n$），再由公式2，（3）得

$$\frac{f_i'(x)}{f_i(x)}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x},\quad \frac{y'}{y}=-\frac{n}{x},$$

故　$y'=-\frac{n}{x}\cdot y=-n\cdot x^{m-1}=mx^{m-1}$. □

2·5　函数商的微分法

【定理】4. 若 $g(x)$可导，且 $g(x)\neq 0$，则$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

$(g(x)\neq 0)$.

证明　令 $u=g(x)$，$y=\frac{1}{u}$. 由[公式](7)　$\frac{dy}{du}=-\frac{1}{u^2}$，再由【定理】2，得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{u^2}\cdot g'(x)$$

$$=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$ □

【系】　如果 $f(x)$，$g(x)$都可导且 $g(x)\neq 0$，则

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

证明　因 $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ 故由【定理】3和【定理】4得

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(y)}$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$ □

【公式】4. 基本初等函数的导函数(三)

(8) $y=\operatorname{tg}x$,　$y'=\sec^2 x$.

(9) $y=\operatorname{ctg}x$,　$y'=-\csc^2 x$.

(10) $y=\sec x$,　$y'=\sec x\cdot\operatorname{tg}x$.

(11) $y=\csc x$,　$y'=-\csc x\cdot\operatorname{ctg}x$.

证明　(8) $\because\ y=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$由【定理】2【系】有

$$\therefore\ y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x.$$

(9) 因 $y=\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$，故

$$y'=-\frac{(\operatorname{tg}x)'}{\operatorname{tg}^2 x}\qquad(【定理】4)$$

$$=-\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}\qquad(公式(8))$$

$$=-\csc^2 x.$$

(10) 因　$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$，故

$$y'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}\qquad(【定理】4)$$

$$=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\qquad(【公式】2,(5))$$

$$=\sec x\cdot\operatorname{tg}x.$$

(11) 因 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$，故

$$y'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}\qquad(【定理】4)$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\ (【公式】2,\ (4))$$

$$=-\csc x\cdot \operatorname{ctg} x.$$ □

2·6 反函数的微分法

【定理】5. 设 $y=f(x)$在$[a,b]$连续且严格单调增加（即对任意的 $x_1, x_2\in[a, b]$, 若 $x_1<x_2$, 则有 $f(x_1)<f(x_2)$）. 如果 $f(x)$ 在 (a, b) 可导且 $f'(x)\neq 0$, 则它的反函数 $x=\varphi(y)$可导，其导数为 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$, 即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

若 $f(x)$在 $[a,b]$ 严格单减（即对任意的 x_1, $x_2\in[a, b]$, 若 $x_1<x_2$, 则有 $f(x_1)>f(x_2)$），且 $f(x)$在(a, b)可导，则反函数 $\varphi(y)$也严格单调减少、可导且上述关系式成立.

证明 设 $f(x)$在$[a, b]$连续、严格单调增加，故由中间值定理，对于满足 $f(a)<y_0<f(b)$的任一点 y_0, 在(a, b)中存在一点 x_0 使 $f(x_0)=y_0$, 而且 x_0 是唯一的，否则，假设还有 $x_1\neq x_0$ 使 $f(x_1)=y_0$, 则当 $x_1>x_0$ 时有 $f(x_1)>f(x_0)$, 当 $x_1<x_0$ 时有 $f(x_1)<f(x_0)$, 这与 $f(x_0)=f(x_1)=y_0$ 相矛盾. 从而，在$[f(a), f(b)]$上定义了一个单值函数 $x=\varphi(y)$, 它就是$y=f(x)$的反函数.

其次，设 y, y' 为 $[f(a), f(b)]$上任意两点，且 $y<y'$, $x=\varphi(y)$, $x'=\varphi(y')$. 由反函数 $\varphi(y)$的定义必相应地存在 x, $x'\in[a, b]$使得$y=f(x)$, $y'=f(x')$且这样的 x, x' 都是唯一的. 因 $f(x)$严格单调增加，故 $x<x'$, 即$\varphi(y)<\varphi(y')$ 于是 $\varphi(y)$也是严格单调增加的.

又，设在 $[f(a), f(b)]$内任取一点 y^*, 则 (a, b)内有 x^*使 $\varphi(y^*)=x^*$. 对任意 $\varepsilon>0$, 选取 $\varepsilon_1>0$ 使 $a<x^*-\varepsilon_1<x^*+\varepsilon_1<b$, $\varepsilon_1<\varepsilon$. 令 $y_1=f(x^*-\varepsilon_1)$, $y_2=f(x^*+\varepsilon_1)$. 则 $y_1<y^*<y_2$. 取 $\delta=\min(y^*-y_1, y_2-y^*)(>0)$, 则对于 $y^*-\delta<y<y^*+\delta$ 的 y 有

$$x^*-\varepsilon<x^*-\varepsilon_1<\varphi(y)<x^*+\varepsilon_1<x^*+\varepsilon,$$ 即

$|\varphi(y)-\varphi(y^*)|<\varepsilon$. 故 $\varphi(y)$在 y^* 连续.（当 $y^*=f(a)$或 $y^*=f(b)$时，也易证 $\varphi(y)$是单调连续的）.

最后，任取 $y_0\in(f(a), f(b))$. 给 y_0 以增量 $\Delta y\neq 0$, 反函数 $x=\varphi(y)$

从 $x_0=\varphi(y_0)$ 得到增量 $\Delta x\neq 0$. 显然, $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$. 因 $x=\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 连续, 故

$$\lim_{\Delta y\to 0}\Delta x=\lim_{\Delta y\to 0}[\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)]=0.$$

取极限得 $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, 即

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

因此, 如果 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调增加, 并在 (a, b) 内可导, 则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $(f(a), f(b))$ 内可导且 $\dfrac{dx}{dy}=1/\dfrac{dy}{dx}$.

当 $f(x)$ 为严格单调减少的情形, 定理的证明完全类似. □

【公式】5. 基本初等函数的导函数(四)

(12) $y=x^{\frac{1}{n}}$ ($n\neq 0$ 是整数), $y'=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

(13) $y=x^r$ (r 是有理数), $y'=rx^{r-1}$.

(14) $y=\sin^{-1}x$, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $y=\cos^{-1}x$, $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(16) $y=\mathrm{tg}^{-1}x$, $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(17) $y=\mathrm{ctg}^{-1}x$, $y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

(18) $y=\sec^{-1}x$, $y'=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

(19) $y=\csc^{-1}x$, $y'=-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

证明 (12) 由 $y=x^{\frac{1}{n}}$, 得 $x=y^n$. 从而由[公式]3 及[定理]5, 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}y^{1-n}=\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

(13) 设 $r=\frac{m}{n}$(n 是正整数，m 是整数)，$z=x^{\frac{1}{n}}$，则 $y=x^r=x^{\frac{m}{n}}=z^m$、从而利用§2，【定理】2 及[公式]3 与(12)，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=mz^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}.$$

(14) 由 $y=\sin^{-1}x$，得 $x=\sin y$，因 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos y\geqslant 0$，即 $\cos y=\sqrt{1-x^2}$，

从而 $$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(|x|<1).$$

(15) 由 $y=\cos^{-1}x$，有 $x=\cos y$，因 $0<y<\pi$，故 $\sin y\geqslant 0$，故 $\sin y=\sqrt{1-x^2}$，

从而 $$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.(|x|<1)$$

(16) 由 $y=\mathrm{tg}^{-1}x$，$x=\mathrm{tg}y$，故

$$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sec^2y}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

(17) 由 $y=\mathrm{ctg}^{-1}x$，$x=\mathrm{ctg}y$，故

$$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{-\csc^2y}=-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(18) 由 $y=\sec^{-1}x$，$x=\sec y$，在 $0<y<\pi$，$\sec y\cdot\mathrm{tg}y>0$，故

$$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sec y\mathrm{tg}y}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2y\mathrm{tg}^2y}}=\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}$$

$$=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

(19) 由 $y=\csc^{-1}x$，$x=\csc y$，因 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$，$\csc y\cdot\mathrm{ctg}y>0$，故

$$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\csc y\cdot\mathrm{ctg}y}=-\frac{1}{\sqrt{\csc^2y\mathrm{ctg}^2y}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}}=-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$ □

2·7 指数函数和对数函数的导函数

【公式】6. (1) $y=e^x$, $y'=e^x$.

(2) $y=a^x$, $y'=a^x\ln a(1\neq a>0)$.

(3) $y=\ln|x|$, $y'=\frac{1}{x}(x\neq0)$.

(4) $y=\log_a|x|$, $y'=\frac{1}{x\ln a}$ $(1\neq a>0,\ x\neq0)$.

证明 (1) 令 $y=f(x)=e^x$, 则

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$=e^x\cdot1$ (第十章§1【定理】22)

$=e^x$.

(2) $y=a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a}$. 令 $z=x\ln a$,则 $y=e^z$, $y'=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=e^z\ln a=a^x\ln a$.

(3) $y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & 当 x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$

∴ 当 $x>0$ 时, $x=e^y$, $\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$,

当 $x<0$ 时, $-x=e^y, x=-e^y$, $\frac{dy}{d_x}=1/\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$.

因此, $\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$ $(x\neq0)$.

(4) 由对数换底公式, $y=\log_a|x|=\frac{\ln|x|}{\ln a}$, 故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}.$$ □

【公式】7. 基本初等函数的导函数(五)

(20) $y=x^a$ (a 是实数) $y'=ax^{a-1}$ $(x>0)$

证明 令 $z=\alpha\ln x$，则 $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}=e^{z}$，故

$$y'=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=e^{z}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$ □

2.8 对数微分法

【定义】2. 求某些函数的导数，先取函数（的绝对值）的对数，然后再微分，由此求出导数．有时这比直接对函数求导更方便．这种方法称为**对数微分法**．

这时，要用到对数求导的公式：若 $y=\ln|f(x)|$，则 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$．其证明如下：令 $Z=f(x)$，则 $y=\ln|Z|$，故 $y'=\frac{dy}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dx}=\frac{1}{Z}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $(f(x)\neq 0)$．

例题1． $y=x^{x}$ $(x>0)$．

解 取对数得 $\ln y=x\ln x$，两边对 x 求导得

$$y'/y=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1.$$

因此 $y'=y(\ln x+1)=x^{x}(\ln x+1)$．

例题2． $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$．

解
$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}[\ln|x-1|+\ln|x-2|-\ln|x-3|-\ln|x-4|].$$

对 x 求导得

$$y'/y=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right]$$

$$=-\frac{2x^2-10x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$$

所以
$$y'=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[-\frac{2x^2-10x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}\right]$$

$$=-\frac{2x^2-10x+11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

2·9　参数表示的函数的微分法

【定理】6. 设 $x=f(t)$，$y=g(t)$是以 x 为自变数的函数 y 的参数表达式.如果 $f(t)$，$g(t)$可导且 $f'(t)\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

证明　由【定理】5. 及 $f'(t)\neq 0$ 知，$x=f(t)$有反函数 $t=\varphi(x)$存在且 $\frac{dt}{dx}=1/\frac{dx}{dt}=1/f'(t)$. 利用复合函数微分法，由 $y=g(t)=g[\varphi(x)]$对 x 求导得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$.　□

例1. 设 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，则$\frac{dx}{dt}=-a\sin t$，$\frac{dy}{dt}=b\cos t$，故 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t$.

例2　设 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 则，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

2·10　隐函数的微分法

【定义】3. 把函数 $y=f(x)$代入两个变数 x，y 之间的关系式 $F(x,y)=0$，如果所得到的函数 $F[x,\ f(x)]$ 在某区间上恒为零，则称 $y=f(x)$ 是由 $F(x,\ y)=0$ 所确定的隐函数.(这样的函数 $f(x)$ 有时不只一个.)

注意1. 相对于隐函数，由 $y=f(x)$ 的形式给出的函数 y，称为 x 的显函数。

2. 当由 $F(x, y)=0$ 可确定 x 的隐函数 y 时，为了求 $\frac{dy}{dx}$，只须由 $F(x, y)=0$ 两边对 x 求导（这时，要把 y 看作 x 的函数），再由此求出 $\frac{dy}{dx}$ 就行了。（这一内容的严密的叙述将在本章 8.12 偏导函数那里进行。）

例1. 试求由 $Ax^2+By^2=1$ 所确定的函数 y 的导函数：

将两边对 x 求导，得 $2Ax+2By\cdot\frac{dy}{dx}=0$。

解得 $\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax}{By}$.

例2. 由 $y^2=4px$ 求 $\frac{dy}{dx}$

两边对 x 求导，得 $2y\frac{dy}{dx}=4p$，由此 $\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y}$.

§3. 导函数的应用

3·1 切线方程

【定义】1. 切线 设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点. 如果 $f'(x_0)$ 存在，则称过点 P 以 $f'(x_0)$ 为斜率的直线为曲线在点 P 的切线.

【公式】1. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

注意 设曲线 $y=f(x)$ 在点 P 有切线，则当曲线上另一点 Q 沿此曲线向点 P 无限靠近时，割线 PQ 无限靠近切线. 此外，如果比值 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时趋于正无穷大或负无穷大（这时也说 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有无穷导数），则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有平行于 y 轴的切线.

例题1. 求曲线 $Ax^2+By^2=1$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程.

解 由 2.10 例 1，在点 $P(x_0, y_0)$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax_0}{By_0}$ $(By_0\neq 0)$ 故切线方

程为 $y-y_0=-\frac{Ax_0}{By_0}(x-x_0)$，即 $Ax_0x+By_0y(=Ax_0^2+By_0^2)=1$.当 $B\neq0$，$y_0=0$ 或 $B=0$ 时易见曲线有平行于 y 轴的切线 $x=x_0$，它包含在 $Ax_0x+By_0y=1$ 之中. 故所求切线方程是 $Ax_0x+By_0y=1$.

例题2. 求曲线 $y^2=4px$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程.

解 由 $y^2=4px$ 两边对 x 求导，得 $2y\frac{dy}{dx}=4p$. 在 $P(x_0, y_0)$ 点有 $2y_0\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=4p$. 当 $y_0\neq0$ 时，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\frac{2p}{y_0}$，故切线方程为 $y-y_0=\frac{2p}{y_0}(x-x_0)$，即 $y_0y=2p(x+x_0)$. 当 $y_0=0$ 时，切线显然是 y 轴，它包含在方程 $y_0y=2p(x+x_0)$中，故这方程是曲线上任意一点处的切线方程.

【公式】2. (1) 曲线 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 在其上点 $P[f(t_0), g(t_0)]$ 处的切线方程为

$$f'(t_0)[y-g(t_0)]=g'(t_0)[x-f(t_0)]\ \ (f'^2(t_0)+g'^2(t_0)\neq0).$$

(2) 曲线 $f(x, y)=0$ 在其上点 $P(x_0, y_0)$处的切线方程为※

$$f_y(x_0, y_0)(y-y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0)=0$$
$$(f_x^2(x_0, y_0)+f_y^2(x_0, y_0)\neq0).$$

(3) 如果曲线由极坐标方程 $r=g(\theta)$给定，则在其上一点$P[g(\theta_0),\theta_0]$处的切线方程是

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{g(\theta_0)}\cos(\theta-\theta_0)-\frac{g'(\theta_0)}{g^2(\theta_0)}\sin(\theta-\theta_0)\quad(g(\theta_0)\neq0).$$

证明 (1) 因 $f'^2(t_0)+g'^2(t_0)\neq0$，可先设 $f'(t^0)\neq0$，这时 $f'(x_0)=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$. 由[公式]1，在 $P[f(t_0), g(t_0)]$的切线方程为

$$y-g(t_0)=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}[x-g(t_0)].$$

即 $$f'(t_0)[y-g(t_0)]=g'(t_0)[x-f(t_0)].$$

如果 $f'(t_0)=0$，则必有 $g'(t_0)\neq0$. 这时在 P 点的切线显然是铅直的，其方程为 $x=f(t_0)$，此方程包含于上述方程中. 因此，在所有情形下，在 P 点的切线方程都是

$$f'(t_0)[y-g(t_0)]=g'(t_0)[x-f(t_0)].$$

(但 $f'(t_0)$，$g'(t_0)$不同时为零.)

※ 关于 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$，参见本章8.12

(2) 根据前节 2.10 注意 2，由 $f(x,y)=0$ 得 $f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\frac{dy}{dx}=0$. 因此，由[公式]1，在点 $P(x_0, y_0)$的切线方程是

$$f_y(x_0, y_0)(y-y_0)+f_x(x_0, y_0)(x-x_0)=0.$$

(但 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$不同时为零。)

(3) 先证一个

引理 已知曲线的极坐标方程是 $r=r(\theta)$. 如果其上一点 $P(r, \theta)$处的切线与向径op的夹角为 φ，则 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$.

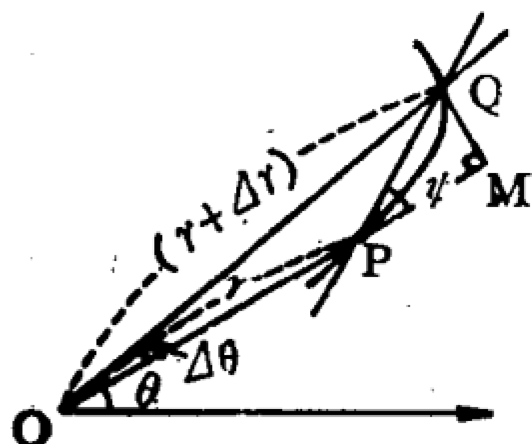


图 11-1

证明如下：(图11-1)

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{MQ}{PM}=\frac{(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{(r+\Delta r)\cos\Delta\theta-r}$$

$$=\frac{(r+\Delta r)\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{(\cos\Delta\theta)\frac{\Delta r}{\Delta\theta}-r\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}}.$$

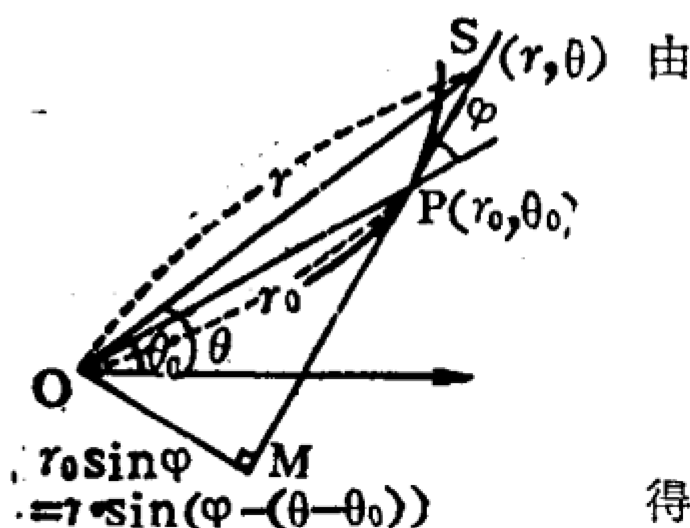


图 11-2

由 $\lim\limits_{\Delta\theta\to0}\Psi=\varphi$，$\lim\limits_{\Delta\theta\to0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1$，

$$\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}$$

$$=0.$$

得 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}=\frac{\bar{r}(\theta)}{r'(\theta)}$.

转而讨论曲线 $\bar{r}=g(\theta)$ 在 $P[g(\theta_0), \theta_0]$ 的切线方程 (图 11-2). 设 $S(r, \theta)$为切线上任一点。在直角三角形 OMP 及 OMS 中，$OM=\bar{r}_0\sin\varphi=\bar{r}\sin[\varphi-(\theta-\theta_0)]=\bar{r}\sin\varphi\cos(\theta-\theta_0)-\bar{r}\cos\varphi\sin(\theta-\theta_0)$，由引理.

$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\bar{r}_0}{g'(\theta_0)}$， 故 $\sin\varphi=\frac{\bar{r}_0}{g'(\theta_0)}\cos\varphi$. 代入 OM 的表达式得 $\bar{r}_0\cdot\frac{\bar{r}_0}{g'(\theta_0)}\cdot$

$\cos\varphi=\bar{r}\frac{\bar{r}_0}{g'(\theta_0)}\cos\varphi\cos(\theta-\theta_0)-\bar{r}\cos\varphi\sin(\theta-\theta_0)$. 化简得 $\bar{r}_0{}^2=$

$[\bar{r}_0\cos(\theta-\theta_0)-g'(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)]\bar{r}$. 由此得切线方程：$\frac{1}{r}=\frac{1}{g(\theta_0)}\cdot\cos(\theta-\theta_0)-\frac{g'(\theta_0)}{g^2(\theta_0)}\sin(\theta-\theta_0)$. □

3·2 法线方程

【定义】2．法线 通过曲线上的一点且与该点处切线垂直的直线称为曲线在该点的法线。

【定理】1． 如果 $P(x_0, y_0)$是曲线 $y=f(x)$上的一点，且 $f'(x_0)\neq 0$，则该曲线在点 P 的法线方程是

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

证明 因 P 点处切线的斜率是 $f'(x_0)$，故 P 点处法线斜率是 $-\frac{1}{f'(x_0)}$. 因而，过 P 点的法线方程是 $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. □

例题1． 已知曲线 $Ax^2+By^2=1$，求其上点 $P(x_0, y_0)$处的法线方程．

解 由 3.1 例题 1，此曲线在点 $P(x_0, y_0)$的切线方程是 $Ax_0x+By_0y=1$. 由法线与切线垂直，可设法线方程为 $By_0x-Ax_0y=C$. 由它过点 $P(x_0, y_0)$，得 $C=By_0x_0-Ax_0y_0$，因此法线方程为

$$By_0x-Ax_0y=(B-A)x_0y_0.$$

例题2． 求曲线 $y^2=4px$ 在其点 $P(x_0, y_0)$处的法线的方程．

解 由 3.1 例题 2，在 P 点的切线方程是 $y_0y=2p(x+x_0)$. 即 $-2px+y_0y=2px_0$. 由法线与切线垂直，可设法线方程为 $y_0x+2py=C$. 利用点 $P(x_0, y_0)$在此法线上定出 $C=y_0x_0+2py_0$. 故所求法线方程为$y_0x+2py=(x_0+2py)y_0$.

【公式】3． (1) 曲线 $x=f(t)$，$y=g(t)$在其点 $P[f(t_0), g(t_0)]$处的法线方程为

$$f'(t_0)[x-f(t_0)]+g'(t_0)[y-g(t_0)]=0.$$

(但 $f'(t_0)$，$g'(t_0)$不同时为零。)

(2) 曲线 $f(x, y)=0$ 在其点 $P(x_0, y_0)$ 处的法线方程为

$$f_y(x_0, y_0)(x-x_0)-f_x(x_0, y_0)(y-y_0)=0.$$

($f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$不同时为零.)

(3) 曲线 $\bar{r}=g(\theta)$在其点 $P(r_0, \theta_0)$的法线方程为

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0'}\sin(\theta-\theta_0).$$

(但 $r_0'=g'(\theta_0)\neq 0$.)

证明　(1) 由在点 $P[f(t_0),\ g(t_0)]$ 的切线方程是 $f'(t_0)[y-g(t_0)]-g'(t_0)[x-f(t_0)]=0$，因法线与切线垂直，可设法线方程为 $f'(t_0)x+g'(t_0)y=C$，由它过点 $P[f(t_0),\ g(t_0)]$，得 $f'(t_0)f(t_0)+g'(t_0)g(t_0)=C$，因此，法线方程为

$$f'(t_0)[x-f(t_0)]+g'(t_0)[y-g(t_0)]=0.$$

(2) 由点 $P(x_0,\ y_0)$处的切线方程是 $f_x(x_0,\ y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)=0$，且法线与切线垂直，可设法线方程为 $f_y(x_0,\ y_0)\cdot x-f_x(x_0,\ y_0)y=C$。又由它过点 $P(x_0,\ y_0)$得 $f_y(x_0,\ y_0)x_0-f_x(x_0,\ y_0)y_0=C$，因此，法线方程为 $f_y(x_0,\ y_0)(x-x_0)-f_x(x_0,\ y_0)(y-y_0)=0$

(3) 如图11-3，设 l 表示曲线 $r=g(\theta)$过点 $P(r_0,\ \theta_0)$的法线，则 l上任一点 $Q(r,\ \theta)$满足方程：

$$r\cos(\theta_0+\varphi-\theta)=r_0\cos\varphi.$$

由此，

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0\cos\varphi}[\cos(\theta-\theta_0)\cos\varphi+\sin(\theta-\theta_0)\sin\varphi]$$

$$=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0}\sin(\theta-\theta_0)\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

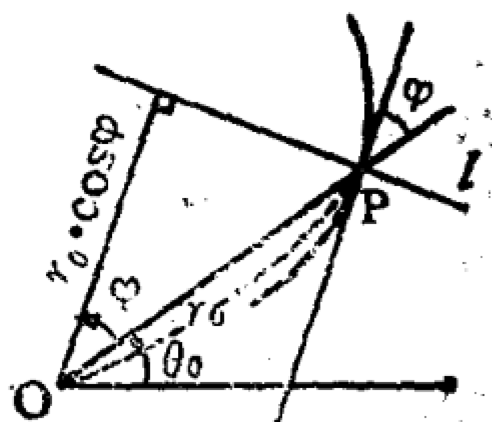


图 11-3

由3.1引理，$\operatorname{tg}\varphi=\frac{r_0}{g'(\theta_0)}=\frac{r_0}{r_0'}$，所以，所求法线方程为$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\cos(\theta-\theta_0)+\frac{1}{r_0'}\sin(\theta-\theta_0)$.

3·3　速度与加速度·平面上点的运动

【定义】3. 直线运动的速度·加速度　设直线上动点P在时刻 t 的位置坐标为 x，则其运动方程可用 $x=f(t)$表示。如果在某时刻 t_0，$f'(t_0)$存在，则 $f'(t_0)$是运动在时刻 t_0 的速度。

设该运动在任意时刻 t 的速度 $f'(t)$是已知函数 $v(t)$，即 $f'(t)=v(t)$ 如果 $v'(t_0)$存在，则 $v'(t_0)$是运动在时刻 t_0 的加速度。

例题1. 已知一质点的直线运动方程为 $x=\frac{1}{2}gt^2$. 求其速度和加速度。

解 因$\frac{dx}{dt}=gt$, 故在时刻t_0的速度是gt_0。又因$\frac{d}{dt}(gt)=g$,故在任何时刻的加速度都是常数g.

【定义】4. 平面运动的速度,加速度 当点$P(x, y)$在平面上运动时, 坐标x, y都是时刻t的函数: $x=f(t)$, $y=g(t)$. 动点P的轨迹是此方程的图象.

$V_x=\frac{dx}{dt}$, $V_y=\frac{dy}{dt}$分别称为动点P沿x轴方向, y轴方向上的分速度. 又, $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$称为速度的大小. $a_x=\frac{dv_x}{dt}$, $a_y=\frac{dv_y}{dt}$分别称为动点P沿x轴方向、y轴方向上的分加速度. 又$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$称为加速度的大小.

例题2. 已知平面上一点的运动方程为$x=v_0t\cos\theta_0$, $y=v_0t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2$,求其分速度,速度的大小、分加速度及加速度的大小.

解 $v_x=v_0\cos\theta_0$, $v_y=v_0\sin\theta_0-gt$.

$$v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\theta_0+g^2t^2}.$$

$$a_x=0,\ a_y=-g,\ a=\sqrt{(-g)^2}=|g|.$$

3·4 其他应用

1. 切线长, 切线影长 设曲线$y=f(x)$在点P处的切线交x轴于点T(图11-4), $PM\perp OX$.则称PT为切线长, TM为切线影长.

2. 法线长, 法线影长 如图11-4设在P处点的法线交x轴于点N, 则PN称为法线长, MN称为法线影长.*

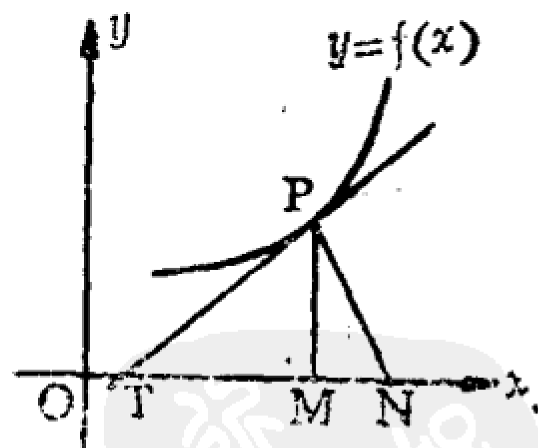


图 11-4

【定理】2. 切线长$=|y/y'|\sqrt{1+y'^2}$, 法线长$=|y|\sqrt{1+y'^2}$.

切线影长$=|y/y'|$, 法线影长$=|yy'|$.

---

* 切线影长、法线影长又分别称为次切线、次法线。——译注

证明 由 PT 方程 $Y-y=y'(X-x)$，得 $T(x-\frac{y}{y'},0)$。由 PN 方程 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$ 得 $N(x+yy',0)$。由 $M(x,0)$，得 $TM=|x-(x-\frac{y}{y'})|=|y/y'|$，$MN=|x+yy'-x|=|yy'|$。

又 $PT^2=PM^2+TM^2=y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2=\left(\frac{y}{y'}\right)^2(1+y'^2)$，

$PN^2=MN^2+PM^2=(yy')^2+y^2=y^2(1+y'^2)$，

故 $PT=|y/y'|\sqrt{1+y'^2}$，$PN=|y|\sqrt{1+y'^2}$。 □

3. 物理学上的应用举例

(1) **冷却率** 物体温度 y 随时间 t 变化，这时，称 $-\frac{dy}{dt}$ 为时刻 t 的冷却率。

(2) **溶解率** 设某物质在水中溶解，未溶解的该物质的质量 u 是时间 t 的函数。这时，称 $-\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dt}$ 为该物质在时刻 t 的(相对)溶解率。

(3) **弹性率** 设一定质量的气体有容积 V、压力 P。称 $-\lim\limits_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}$ 为此气体在容积为 V 时的弹性率。

例题 求适合关系式 $P\cdot V^r=c$ 的气体的弹性率。

解 $-\lim\limits_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta P}{\frac{\Delta V}{V}}=-V\lim\limits_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta V}$

$=-V\cdot\frac{dP}{dV}$ ·由 $P\cdot V^r=c$ 两边对 V 求导得

$\frac{dp}{dV}\cdot V^r+Pr\cdot V^{r-1}=0$.

所以弹性率 $-V\cdot\frac{dP}{dV}=pr$.

4. 重根的条件

【**定理**】3. 实系数整式方程 $f(x)=0$ 以 α 为重根的必要充分条件为 $f(\alpha)=$

0，$f'(\alpha)=0$.

证明　如果 α 是 $f(x)$ 的重根，则可设 $f(x)=(x-\alpha)^m\cdot g(x)$，其中 $m\geqslant 2$，$g(x)$ 为整式（包括常数）. 由此，$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}g(x)+(x-\alpha)^m\cdot g'(x)$，从而 $f'(\alpha)=0$.

反之，若 $f(\alpha)=0$，可设 $f(x)=(x-\alpha)h(x)$，其中 $h(x)$为整式. 于是 $f'(x)=h(x)+(x-\alpha)h'(x)$. 若 $f'(\alpha)=0$，则 $h(\alpha)=0$. 故可设 $h(x)=(x-\alpha)g(x)$其中 $g(x)$为整式，从而 $f(x)=(x-\alpha)^2g(x)$，α 是 $f(x)=0$ 的重根. □

§ 4　关于导函数的定理

4·1　罗尔定理

【定理】1. 如果 $f(x)$在闭区间$[a, b]$连续，在开区间(a, b)可导且 $f(a)=f(b)=0$，则在(a, b)内至少有一点 c 存在使 $f'(c)=0$.

注意　[几何意义]　连续曲线 $y=f(x)$与 x 轴交于两点 A、B. 如果在 AB 弧上各点都有切线，则这些切线中至少有一条平行于 x 轴.

证明　如果 $f(x)\equiv 0$，则定理显然成立. 今设 $f(x)\not\equiv 0$:

Ⅰ. 设(a, b)内有 x 使 $f(x)>0$. 因 $f(x)$在$[a, b]$连续，必在$[a, b]$上取最大值，设 $f(c)$ 为最大值. 显然 $f(c)>0$ 且 $a<c<b$. 取 Δx 充分小，使 $a<c+\Delta x<b$. 这时有 $\Delta y=f(c+\Delta x)-f(c)\leqslant 0$. 当 $\Delta x>0$ 时$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0$. 当 $\Delta x<0$ 时$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$. 由于 $f'(c)=f_+'(c)=f_-'(c)$存在，令 $\Delta x\to +0$，$\Delta x\to -0$，分别得 $f_+'(c)\leqslant 0$，$f_-'(c)\geqslant 0$. 因此，只有 $f'(c)=0$.

Ⅱ. 设 $f(x)$ 能取到负值，若令 $g(x)=-f(x)$. 则对于 $g(x)$，由Ⅰ知，定理成立. 即(a, b) 内有一点 c 存在，使 $g'(c)=0$，因 $f'(x)=-g'(c)$，故 $f'(c)=0$. □

说明　定理的条件，缺一不可，否则导致结论不成立. 这如下例所示.

(1)　$f(x)=1-|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，定理的结论不成立. 这是因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.

(2)　$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时} \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{时} \end{cases}$，定理的结论不成立. 原来，

$f(x)$在$[0,1]$上不是处处连续的.

【系】1. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导且$f(a)=f(b)$，则在(a,b)内至少有一点c，使$f'(c)=0$.

注意 ［几何意义］ 若连续曲线$y=f(x)$与平行于x轴的某直线交于两点A、B，且在弧AB上各点都有切线存在，则其中至少有一条平行于x轴.

证明 令$f(a)=f(b)=K$，$g(x)=f(x)-K$，则$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$g(a)=g(b)=0$. 故由【定理】1，在(a,b)内存在一点c，使$g'(c)=0$. 因$g'(x)=f'(x)$，所以$f'(c)=0$. □

【系】2. 如果$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=f(b)=0$，则存在一点$c\in(a,b)$使$f'(c)g(c)+f(c)g'(c)=0$.

证明 令$h(x)=f(x)g(x)$，则$h(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$h(a)=h(b)=0$.故由【定理】1，至少存在一点$c\in(a,b)$使$h'(c)=0$，即

$$f'(c)g(c)+f(c)g'(c)=0.$$ □

【系】3 如果$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，则对于任意实数λ，至少存在一点$c\in(a,b)$，使$f'(c)=\lambda f(c)$.

证明 令$g(x)=e^{-\lambda x}$，则它在$[a,b]$连续，在(a,b)内可导，由［系］2，并注意到$g'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}$，可知在$(a,b)$内至少有一点$c$，使$f'(c)e^{-\lambda c}+f(c)(-\lambda e^{-\lambda c})=0$.因$e^{-\lambda c}\neq 0$，所以$f'(c)=\lambda f(c)$. □

4·2 微分学中值定理

【定理】2. 设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)内可导，则在(a,b)内至少存在一点c，使$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$.

注意 ［几何意义］ 在连续曲线$y=f(x)$上取两点$A[a,f(a)]$，$B[b,f(b)]$ $(a<b)$，如果曲线在弧AB上各点都有切线，则其中至少有一条平行于弦AB.

证明 令$A=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$g(x)=f(x)-Ax$，则$g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)内可导，$g(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=g(b)$因此由［系］1知，在$(a,b)$内至少存在一点$c$，使$g'(c)=0$，即$f'(c)=A$.从而$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$. □

说明 为了保证【定理】2结论的成立，其假设条件缺一不可.

例如(1) 对于$f(x)=|x-1|+|2-x|$，$0\leqslant x\leqslant 2$，【定理】2结论不成

立，这是因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 不可导.(2)设 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$ 则【定理】2 的结论不成立，这是因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

【系】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导，则至少存在一个 $\theta\in(0, 1)$，使 $f(b)=f(a)+(b-a)f'[a+\theta(b-a)]$.

证明 由【定理】2，至少有一点 $c(a<c<b)$，使 $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$. 令 $\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$，则 $c=a+\theta(b-a)$，$0<\theta<1$. 由此，$f(b)=f(a)+(b-a)\cdot f'[a+\theta(b-a)]$ 成立. □

【定理】3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 恒为常数.

证明 对任意 $x\in(a, b]$，由【定理】2，存在 $c\in(a,x)$ 使 $f(x)=f(a)+(x-a)f'(c)$. 因 $a<c<b$，故由假设，$f'(c)=0$. 从而对于 $a\leqslant x\leqslant b$ 有 $f(x)=f(a)$，即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是常数. □

【系】1 若 $f(x)$，$g(x)$ 都在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x)=g(x)+c$（c 常数）成立.

证明 设 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内 $h'(x)=f'(x)-g'(x)\equiv 0$ 成立. 由【定理】3，$h(x)$ 在 $[a, b]$ 上为常数 c，即 $f(x)=g(x)+c$ 在 $[a, b]$ 上成立. □

【系】2. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内 $f'(x)\equiv p$（$p\neq 0$ 为常数），则在 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 是 x 的一次函数.

证明 令 $g(x)=px$，并利用【系】1即可. □

【系】3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内 $f'(x)\equiv px+q$（$p\neq 0$，p，q 均为常数），则在 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 是 x 的二次函数。

证明 令 $g(x)=\dfrac{1}{2}px^2+qx$，并利用【系】1即可. □

【系】4. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 上，$f'(x)=e^x$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x)=e^x+c$（c 为常数）成立.

证明 令 $g(x)=e^x$，并利用【系】1即可. □

4·3 柯西中值定理

【定理】4. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内可导，$g(a)\neq g(b)$ 且 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在 (a, b) 内不同时为零， 则至少有一点 $c\in(a, b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \neq \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a<c<b).$$

证明　令 $h(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]\cdot g(x)$，则 $h(x)$ 在 $[a, b]$连续，在(a, b)内可导，$h(a)=f(a)g(b)-f(b)g(a)=h(b)$。由【定理】1【系】1，存在 $c\in(a, b)$，使 $h'(c)=0$，因 $h'(x)=[g(b)-g(a)]\cdot f'(x)-[f(b)-f(a)]g'(x)$，故 $[g(b)-g(a)]f'(c)=[f(b)-f(a)]g'(c)$。因 $g(b)-g(a)\neq 0$，所以如果 $g'(c)=0$ 必有 $f'(c)=0$，这与 $f'(x)$，$g'(x)$在(a, b)内不同时为零的假设相矛盾。因此，由上面的等式得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$ □

【系】　设 $f(x)$，$g(x)$在$[a, b]$连续，在(a, b)内可导，若在(a, b)内 $g'(x)\neq 0$，则至少有一点 $c\in(a, b)$，满足$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ $(a<c<b)$。

证明　由【定理】2，存在 $\xi\in(a, b)$使 $g(b)=g(a)+(b-a)g'(\xi)$。如果 $g(b)=g(a)$，则存在 $\xi\in(a, b)$使 $g'(\xi)=0$，这与 $g'(x)\neq 0$ 的假设相矛盾，从而 $g(b)\neq g(a)$，这就化为【定理】4。 □

【定理】5. 设 $f(x)$，$g(x)$及 $f'(x)$，$g'(x)$都在$[a, b]$连续，且 $f(a)=g(a)=0$，$g'(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

注意　这是洛比达定理(8.7)的特例.

证明　因 $g'(a)\neq 0$，$g'(x)$在$[a, b]$连续，故存在正数 ε 使在 $[a, a+\varepsilon]$上，$g'(x)\neq 0$。利用【定理】4的【系】可得，存在 $c\in(a, a+\varepsilon)$使

$$\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{g(a+\varepsilon)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

因 $f(a)=g(a)=0$，故 $\dfrac{f(a+\varepsilon)}{g(a+\varepsilon)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. 又，由 $g'(x)$，$f'(x)$ 的连续性，$\lim\limits_{c\to a}g'(c)=g'(a)$，$\lim\limits_{c\to a}f'(c)=f'(a)$。故

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)}{g(a+\varepsilon)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

§5. 函数的增减

5·1　增函数·减函数

【定义】1. 函数在一点的增加状态、减少状态　设10是函数 $f(x)$ 定义域的一个内点，如有正数 δ 存在，使对于 $h\in(0,\ \delta)$，恒有 $f(c-h)\geqslant f(c)\leqslant f(c+h)f(c-h)\geqslant f(c)\geqslant f(c+h)$)成立，则称 $f(x)$在点 $x=c$ 是增加状态(减少状态)

例　设 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$在 $x=c(c>0)$是增加状态．在 $x=c(c<0)$是减少状态。

【定理】1．如果 $f(x)$在 $x=c$ 是增加状态且 $f'(c)$ 存在，则 $f'(c)\geqslant 0$． 反之，如果 $f'(c)>0$，则 $f(x)$在 $x=c$ 是增加状态．

证明　若 $f(x)$在 $x=c$ 是增加状态，则存在正数 δ，使得$f(c-h)\leqslant f(c)\leqslant f(c+h)$，对于 $0<h<\delta$ 恒成立，因此，当 $0<|h|<\delta$ 时，$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0$ 成立。又 $f'(c)$存在，所以 $f'(c)-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\geqslant 0$.

反之，设 $f'(c)>0$，则由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c)$，必存在$\delta>0$，使得$\left|\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}--f'(c)\right|<f'(c)$，对于 $0<|h|<\delta$ 恒成立。由此$\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$ $(0<|h|<\delta)$,所以当 $0<h<\delta$ 时，恒有 $f(c-h)<f(c)<f(c+h)$，即 $f(x)$在 $x=c$ 是增加状态。　□

【系】　如果 $f(x)$ 在 $x=c$ 是减少状态且 $f'(c)$存在，则 $f'(c)\leqslant 0$，反之，如果 $f'(c)<0$，则 $f(x)$在 $x=c$ 是减少状态。

证明　若令 $g(x)=-f(x)$，则$g(x)$在 $x=c$ 是增加状态。又因 $f'(c)$ 存在，从而，$g'(c)$存在且 $g'(c)=-f'(c)$，由【定理】1，$g'(c)\geqslant 0$，所以 $f'(c)\leqslant 0$.

反之，若 $f'(c)<0$，则 $g'(c)>0$，由【定理】1，$g(x)$在 $x=c$ 是增加状态，即 $f(x)$在 $x=c$ 是减少状态。　□

注意　当 $f'(c)=0$ 时，$f(x)$在 $x=c$ 可能是增加状态也可能是减少状态。例如，$f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 是增加状态，而 $f(x)=-x^3$ 在 $x=0$ 是减少状

态，又 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 既不是增加也不是减少状态。

【定义】2. 单调增(减)函数、严格单调增(减)函数(参看第三章1.3【定义】14和【定义】15)。

例 $f(x)=x^2$ 在 $[0, a]$ 严格单调增加，在 $[b, 0]$ 严格单调减少。

【定理】2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导。

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加。

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调增加。

(3) 若在 (a, b) 内 $f'(x)\geqslant 0$，$f'(x)$ 连续且有 $x_0\in(a, b)$ 使 $f'(x_0)>0$，则 $f(a)<f(b)$。

证明 (1) 由§4【定理】2，对于 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，有 $c\in(x_1, x_2)$ 存在，使 $f(x_2)=f(x_1)+(x_2-x_1)f'(c)$。因 $a<c<b$，故 $f'(c)\geqslant 0$。再由 $x_2-x_1>0$，得 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加。

(2) 由§4【定理】2，对于 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$，有 $C\in(x_1, x_2)$ 存在，使 $f(x_2)=f(x_1)+(x_2-x_1)f'(C)$。因 $a<c<b$，故 $f'(c)>0$，再由 $x_2-x_1>0$，得 $f(x_2)>f(x_1)$，因此，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调增加。

(3) 因 $f'(x)$ 在 (a, b) 连续且 $f'(x_0)>0$，故存在 $\varepsilon>0$，使在 $(x_0-q, x_0+\varepsilon)$ $[\subset(a, b)]$ 内 $f'(x)>0$。利用(2)则 $f(x_0-\varepsilon)<f(x_0+\varepsilon)$，因在 $(a, x_0-\varepsilon)$ 及 $(x_0+\varepsilon, b)$ 内 $f'(x)\geqslant 0$，故由(1)，知 $f(a)\leqslant f(x_0-\varepsilon)$，$f(x_0+\varepsilon)\leqslant f(b)$，从而 $f(a)<f(b)$。 □

【系】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导。

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x)\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 单调减少。

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调减少。

(3) 若在 (a, b) 内 $f'(x)\leqslant 0$，$f'(x)$ 连续且有 $x_0\in(a, b)$，使 $f'(x_0)<0$，则 $f(a)>f(b)$。

证明 设 $g(x)=-f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导。

(1) 若在 (a, b) 内 $f'(x)\leqslant 0$，则 $g'(x)=-f'(x)\geqslant 0$。由【定理】2，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 单调增加，从而，$f(x)$ 单调减少。

(2) 若在 (a, b) 内 $f'(x)<0$，则 $g'(x)=-f'(x)>0$，由【定理】2，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调增加，从而，$f(x)$ 严格单调减少。

(3) 因在 (a, b) 内 $g'(x)$ 连续，$g'(x)\geqslant 0$，$g'(x_0)=-f'(x_0)>0$，故由【定理】2，$g(a)<g(b)$，从而 $f(a)>f(b)$。 □

例题 证明下列不等式：

(1) $(1+x)^a>1+ax$ $(a>1,\ x>0)$；

(2) $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x(x>0)$;

(3) $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x$, $x-\frac{1}{6}x^3<\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$

$(x>0)$;

(4) $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x\leqslant 1$, $1-\frac{1}{2}x^2<\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$

$(x>0)$;

(5) $x+\frac{1}{3}x^3<\operatorname{tg}x\ \left(\frac{\pi}{2}>x>0\right)$;

(6) $1+x<e^x$, $1+x+\frac{1}{2}x^2<e^x$,

$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{K!}x^k<e^x\ (x>0)$;

(7) $1-x<e^{-x}<1-x+\frac{1}{2}x^2\quad(x>0)$;

(8) $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$.

证明 (1) 设$f(x)=(1+x)^{\alpha}-(1+\alpha x)$，则$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$．又设$g(x)=(1+x)^{\alpha-1}-1$，因$\alpha>1$，$x>0$，故$g'(x)=(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}>0$．由$g(0)=0$有$g(x)>0$，即$f'(x)>0$．又由$f(0)=0$，有$f(x)>0$，即$(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$．

(2) ①设$f(x)=\sqrt{1+x}-(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{2}\left[(1+x)^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2}x\right].$$

设$g(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2}x$，则$g'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\left[(1+x)^{-\frac{3}{2}}-1\right]$．设$h(x)=(1+x)^{-\frac{3}{2}}-1$，则$h'(x)=-\frac{3}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}}$．因$x>0$，故$h'(x)<0$．且由$h(0)=0$有$h(x)<0$．因而$g'(x)=-\frac{1}{2}h(x)>0$．且由$g(0)=0$，有$g(x)>0$，从而$f'(x)=$

$\frac{1}{2}g(x)>0$，且由 $f(0)=0$，有 $f(x)>0$，即 $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2<\sqrt{1+x}$.

②设 $\varphi(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[1-(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right]$. 设 $\Psi(x)=1-(1+x)^{-\frac{1}{2}}$，则 $\Psi'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. 因 $x>0$，故 $\Psi'(x)>0$，因此，由 $\Psi(0)=0$，有 $\Psi(x)>0$. 从而 $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\Psi(x)>0$. 由此及 $\varphi(0)=0$，有 $\varphi(x)>0$，即 $\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x$.

(3)、(4) ①设 $f(x)=x-\sin x$，则 $f'(x)=1-\cos x>0$ $(x>0)$. 因 $f(0)=0$，故 $f(x)>0$，从而，当 $x>0$ 时 $x>\sin x$.

② 设 $g(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$，则 $g'(x)=-\sin x+x=f(x)>0$，$g(0)=0$，因此 $g(x)>0$. 从而，当 $x>0$ 时，$1-\frac{1}{2}x^2<\cos x\leqslant 1$.

③ 设 $h(x)=\sin x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)$，则 $h'(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)=g(x)>0$，由 $h(0)=0$，有 $h(x)>0$. 因而，当 $x>0$ 时，$x-\frac{1}{6}x^3<\sin x$.

④ 设 $\varphi(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cos x$，则 $\varphi'(x)=-x+\frac{1}{6}x^3+\sin x=\sin x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)=h(x)>0$. 由 $\varphi(0)=0$，有 $\varphi(x)>0$. 因而，当 $x>0$ 时，$\cos x<1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$.

⑤ 设 $\Psi(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\sin x$，则 $\Psi'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\cos x=\varphi(x)>0$. 由 $\Psi(0)=0$，有 $\Psi(x)>0$. 因而当 $x>0$ 时，$\sin x<x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$.

(5) 设 $f(x)=\operatorname{tg} x-\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)$，则 $f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\operatorname{tg}^2 x-x^2=(\operatorname{tg} x+x)(\operatorname{tg} x-x)$. 设 $g(x)=\operatorname{tg} x-x$，则 $g'(x)=\sec^2 x-1=\operatorname{tg}^2 x>0$. 因 $g(0)=0$，故 $g(x)>0$. 另一方面，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg} x+x$

>0，所以导数 $f'(x)>0$．又因 $f(0)=0$，由此推知 $f(x)>0$。因而当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\operatorname{tg}x>x+\frac{1}{3}x^3$.

(6) 设 $f(x)=e^x-(1+x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$．又因 $f(0)=0$，故 $f(x)>0$，即 $e^x>1+x$．由此可知 $n=1$ 时定理成立。假定它在 $n-1$ 时仍然成立，则须证明它在 n 时也成立。为此，设

$$g(x)=e^x-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right),$$

则
$$g'(x)=e^x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}=e^x-\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)$$

由归纳法假设可知，$g'(x)>0$，又因 $g(0)=0$，故 $g(x)>0$．因而当 $x>0$ 时，对所有自然数 n，$1+\sum_{R=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k<e^x$ 成立.

(7) 设 $f(x)=e^{-x}-(1-x)$，则 $f'(x)=-e^{-x}+1$．当 $x>0$ 时，$e^x>1$，亦即 $e^{-x}<1$，因而 $f'(x)>0$．又因 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0$，也就是说，当 $x>0$ 时，$1-x<e^{-x}$．若设

$$g(x)=(1-x+\frac{1}{2}x^2)-e^{-x}.$$

则当 $x>0$ 时，$g'(x)=-1+x+e^{-x}=e^{-x}-(1-x)=f(x)>0$．由此结果和 $g(0)=0$ 得 $g(x)>0$．即当 $x>0$ 时 $e^{-x}<1-x+\frac{1}{2}x^2$

(8) 若 $f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)$.

则 $$f'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}.$$

由此可知，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$．由此结果和 $f(0)=0$ 得 $f(x)>0$．因此，$x>0$ 时 $x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)$．又设

$$g(x)=x-\ln(1+x),$$

则 $$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}.$$

由此可知，当 $x>0$ 时 $g'(x)>0$，又因 $g(0)=0$，故 $g(x)>0$ 从而，当 $x>0$ 时 $\ln(1+x)<x$. □

5·2 极大和极小

【定义】3. 极大和极小 设函数 $f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 是该区间的内点。取一适当的正数 δ，若当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极大值 $f(x_0)$，x_0 叫做极大点。如果对于适当的正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $f(x_0)<f(x)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极小值 $f(x_0)$。x_0 叫做极小点。极大值和极小值统称极值。

【定理】3. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极大值。此时，若右导数 $f'_+(x_0)$ 存在，则 $f'_+(x_0)\leqslant 0$。若左导数 $f'_-(x_0)$ 存在，则 $f'_-(x_0)\geqslant 0$。

证明 由于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有极大值，故存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)<f(x_0)$。 而在极大点 x_0 右边， 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$ 成立。所以，若 $f'_+(x_0)$ 存在，则有

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

又因在极大点 x_0 左边，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$ 成立，所以若 $f'_-(x_0)$ 存在，则有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$ □

【系】1. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极小值。若右导数 $f'_+(x_0)$ 存在，则 $f'_+(x_0)\geqslant 0$。若左导数 $f'_-(x_0)$ 存在，则 $f'_-(x_0)\leqslant 0$。

证明 设函数 $g(x)=-f(x)$，于是 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 有极大值。若 $f'_+(x_0)$ 存在，则 $g'_+(x_0)$ 也存在，且 $g'_+(x_0)=-f'_+(x_0)$，故由【定理】3 知 $-f'_+(x_0)\leqslant 0$。即 $f'_+(x_0)\geqslant 0$。另外，若 $f'_-(x_0)$ 存在，则 $g'_-(x_0)$ 也存在，且 $g'_-(x_0)=-f'_-(x_0)$，故由【定理】3 知 $-f'_-(x_0)\geqslant 0$，即 $f'_-(x_0)\leqslant 0$。 □

【系】2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极值且导数 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'(x_0)=0$。

证明 首先，若 $f'(x_0)$ 存在，则 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$ 也都存在，而且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0)=f'_-(x_0).$$

如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极大值，那么根据【定理】3，

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)\leqslant 0,\quad f'(x_0)=f'_-(x_0)\geqslant 0.$$

因此 $f'(x_0)=0$. 又如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有极小值，那么根据【系】1，

$$f'(x_0)=f_+'(x_0)\geqslant 0,\ f'(x_0)=f_-'(x_0)\leqslant 0,$$

因此也得到 $f'(x_0)=0$.

注意 为了求出可导函数的极值，可以先求出满足 $f'(x)=0$ 的 x 值，然后再考虑函数在点 x 左右的增减情况. 但是要注意，满足 $f'(x)=0$ 的 x 未必是极值点.

例题 求函数 $f(x)=x^5-x^3$ 的极值.

解 $f'(x)=5x^4-3x^2=5x^2\left(x+\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

函数的增减情况如下表所示：

x	…	$-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$	…	0	…	$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	增加	极大	减小		减小	极小	增加

因此得到下列结果：

$$x=-\frac{\sqrt{15}}{5}\text{ 时有极大值 }\frac{6\sqrt{15}}{125},$$

$$x=\frac{\sqrt{15}}{5}\text{ 时有极小值 }-\frac{6\sqrt{15}}{125}.$$

【定理】4. 设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数，x_0 为该区间 I 的内点. 若 $f'(x)$ 在 x_0 的左邻为正而右邻为负，则 x_0 为极大点；又若 $f'(x)$ 在 x_0 的左邻为负而右邻为正，则 x_0 为极小点. 如果 $f'(x)$ 在 x_0 邻近的两侧不变号，则函数在 x_0 处没有极值.

证明 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta_1,\ x_0)$ 内为正而在 $(x_0,\ x_0+\delta_2)$ 内为负，则 $f(x)$ 在区间 $[x_0-\delta_1,\ x_0]$ 上是严格单增的函数，而在区间 $[x_0,\ x_0+\delta_2]$ 上是严格单减的函数. 令 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $f(x)<f(x_0)$，也就是说，x_0 是 $f(x)$ 的极大点. 此外，若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta_1,\ x_0)$ 为负而在 $(x_0,\ x_0+\delta_2)$ 为正，则 $f(x)$ 在 $[x_0-\delta_1,\ x_0]$ 上是严格单减函数，而在 $[x_0,\ x_0+\delta_2]$ 上是严格单增函数. 令 $\delta=\min(\delta_1,\ \delta_2)$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $f(x_0)<f(x)$，也就是说，x_0 是极小点. 如果 $f'(x)$ 无论在 $(x_0-\delta_1,\ x_0)$ 或在 $(x_0,\ x_0+\delta_2)$ 均为正，令 $0<\delta\leqslant\min(\delta_1,\ \delta_2)$，由于在满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 x 中，在 x_0 左边的 x 使 $f(x)<f(x_0)$，而

在 x_0 右边的 x 使 $f(x)>f(x_0)$，所以 $f(x)$ 在 x 处没有极值。 □

注意 即使 $f'(x_0)$ 不存在，【定理】4 仍然成立。也就是说，在 $f(x)$ 不可微的点也可以有极值.

例 设 $f(x)=|x|$，则 $f'(0)$ 不存在，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极小值.

例题 求 $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$ 的极值.

解 $f'(x)=\frac{1}{3}\{(x-1)(x-2)^2\}^{-\frac{2}{3}}\{(x-2)^2+2(x-2)(x-1)\}$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}(3x-4)$$

$$=\frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}}.$$

$f(x)$ 的增减情况如下表所示：

x	…	1	…	$\frac{4}{3}$	…	2	…
$f'(x)$	+	不存在	+	0	−	不存在	+
$f(x)$	增加		增加	极大	减小	极小	增加

因此，当 $x=\frac{4}{3}$ 时 $f(x)$ 取得极大值 $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$，当 $x=2$ 时取得极小值 0.

5·3 最大和最小

【定理】5. 设 $f(x)$ 在 x 的某个区间内可微，$x=a$ 为这区间的内点，且 $f'(a)=0$，

(1) 若区间上所有的点都使 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 有最小值；

(2) 若区间上所有的点都使 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 有最大值.

证明 引用 4·2【定理】2，当 $a<x$ 时，$f'(x)=f'(a)+(x-a)\cdot f''(c)$，其中 $a<c<x$；当 $x<a$ 时，$f'(a)=f'(x)+(a-x)\cdot f''(d)$，其中 $x<d<a$.

(1) 此时，若 $f''(x)>0$，则 $f''(c)>0$，$f''(d)>0$，于是 $a<x$ 时，$f'(x)>f'(a)=0$，$x<a$ 时 $f'(x)<f'(a)=0$。因此由 5.1【定理】2 得知，$a<x$ 时 $f(x)$ 单调上升，$x<a$ 时单调下降，即 $x=a$ 处 $f(x)$ 有最小值.

(2) 若 $f''(x)<0$，则 $f''(c)<0$，$f''(d)<0$，于是 $a<x$ 时 $f'(x)<f'(a)=0$，$x<a$ 时 $f'(x)>f'(a)=0$. 因此由 5.1 节【定理】2 知，$a<x$ 时

$f(x)$单调下降，$x<a$时单调上升，即$x=a$处$f(x)$有最大值. □

例题1. 求$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$的最大值.

解 因为$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right)$，

令$f'(x)=0$，得到$x=3$.

又因$f''(x)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{(6-x)^3}}\right)<0$，

故在$x=3$处有最大值$2\sqrt{3}$.

注意 若$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则函数在该区间上能达到最大值和最小值. 如果最大点或最小点c是$[a,b]$的内点，则函数$f(x)$在c点取极大值或极小值. 因此，若$f(x)$在开区间(a, b)可微，则必有$f'(x)=0$. 于是可以这么说：如果$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)上可微，则只要比较一下$f(x)$在$f'(x)=0$的点和在端点a、b的值的大小，即可求得最大值和最小值.

例题2. 求定圆的内接长方形，使其周长最大.

解 在$0<x<2r$中(图 11-5)，可求出使半周长$y=x+\sqrt{4r^2-x^2}$成为最大的x值.该函数在闭区间$[0, 2r]$上取最大值和最小值，而且y在开区间$(0, 2r)$上可微：

$$y'=1-\frac{x}{\sqrt{4r^2-x^2}}.$$

令$y'=0$，则$x=\sqrt{4r^2-x^2}$，于是$x=\sqrt{2}r$. 当x为0、$\sqrt{2}r$、$2r$时，相应的y值分别为$2r$、$2\sqrt{2}r$、$2r$. 由此可见，当$x=\sqrt{2}r$时内接长方形的周长最大，此时得到的是内接正方形.

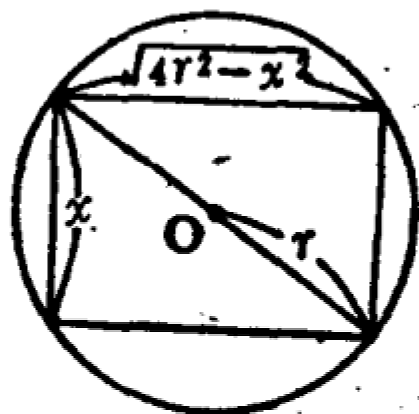


图 11-5

§6 高阶导函数及其应用

6·1 二阶导函数和n阶导函数

【定义】1. n阶导函数 $f(x)$的导函数$f'(x)$的导函数，称为$f(x)$的二阶导函数，二阶导函数在$x=x_0$处的值，称为$f(x)$在x_0的二阶导数. 一

般地，$f(x)$的$(n-1)$阶导函数的导函数，称为$f(x)$的n阶导函数．n阶导函数在$x=x_0$处的值，称为在x_0的n阶导数．

符号 $y=f(x)$的二阶导函数表示为$f''(x)$，y''，$\frac{d^2}{dx^2}f(x)$或$\frac{d^2y}{dx^2}$等．$y=f(x)$的n阶导数表示为$f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$，$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$或$\frac{d^n y}{dx^n}$等．*

注意 逐次求出$f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$……归纳出$f^{(n)}(x)$的方法，叫做逐次微分法．

【公式】 基本初等函数的$n(n\geqslant 1)$阶导函数的公式如下：

(1) $y=x^a$（a为实数），$y^{(n)}=a(a-1)\cdots\cdots(a-n+1)\cdot x^{a-n}$；

(2) $y=\sin x$，$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

(3) $y=\cos x$，$y^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

(4) $y=\frac{1}{a+x}$，$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(a+x)^{n+1}}$ （a为常数）；

(5) $y=e^x$，$y^{(n)}=e^x$；

(6) $y=\ln|x|$，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$；

(7) $y=e^x\sin(x+a)$，$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n e^x.\sin\left(x+a+\frac{n\pi}{4}\right)$；

(8) $y=\mathrm{tg}^{-1}x$，$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$.

证明 现将上述公式分别证明如下：

(1) $n=1$时，由$y=x^a$求导即得$y^{(1)}=y'=ax^{a-1}$，假设$n=m$时也成立，则当$n=m+1$时

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=[a(a-1)\cdots(a-m+1)x^{a-m}]'\\&=a(a-1)\cdots(a-m+1)(a-m)x^{a-m-1}\\&=a(a-1)\cdots[a-(m+1)+1]x^{a-(m+1)}\end{aligned}$$

---

* 当$n=1$时，规定$f^{(1)}(x)=f'(x)$，$y^{(1)}=y'$，$\frac{d'}{dx'}f(x)=\frac{d}{dx}f(x)$，$\frac{d'y}{dx'}=\frac{dy}{dx}$．——译注

$$=a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$$

即当 $n=m+1$ 时仍然成立。因此公式对于一切自然数 n 均成立。

(2) 当 $n=1$ 时，从 $y=\sin x$ 得到 $y^{(1)}=y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，故本公式成立。假设 $n=m$ 也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left[\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\sin\left\{x+\frac{(m+1)\pi}{2}\right\}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

即当 $n=m+1$ 时公式仍然成立。因此公式对于一切自然数 n 均成立。

(3) $n=1$ 时，从 $y=\cos x$ 得到 $y^{(1)}=y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，故本公式成立。假设 $n=m$ 时也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left[\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=-\sin\left(x+\frac{m\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{m\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

公式仍然成立。因此本公式对于一切自然数n均成立。

(4) $n=1$ 时，由 $y=\frac{1}{a+x}$ 得到 $y'=-\frac{1}{(a+x)^2}$，因 $-\frac{1}{(a+x)^2}=(-1)^1\frac{1!}{(a+x)^{1+1}}$，故本公式成立．假设 $n=m$ 时也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left\{(-1)^m\frac{m!}{(a+x)^{m+1}}\right\}'$$

$$=(-1)^m\cdot m!\left(-\frac{m+1}{(a+x)^{m+2}}\right)$$

$$=(-1)^{m+1}(m+1)!\frac{1}{(a+x)^{(m+1)+1}}$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(a+x)^{n+1}},$$

公式仍然成立．因此公式对于一切自然数 n 均成立．

(5) $y=e^x$，$n=1$ 时 $y^{(1)}=y'=e^x$，本公式显然成立．假设 $n=m$ 时也成立，当 $n=m+1$ 时，$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=e^x$，公式仍然成立．因此对于一切自然数 n 均成立．

(6) $n=1$ 时，由 $y=\ln|x|$ 得到 $y^{(1)}=y'=\frac{1}{x}$，因 $\frac{1}{x}=(-1)^0\frac{0!}{x}$

故本公式成立．假设 $n=m$ 时也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left\{(-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{x^m}\right\}'$$

$$=(-1)^{m-1}(m-1)!\left(-m\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$

$$=(-1)^{(m+1)-1}m!\frac{1}{x^{m+1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

公式仍然成立．因此对于一切自然数 n 均成立．

(7) $n=1$ 时，由 $y=e^x\sin(x+a)$ 得到

$$y'=e^x\sin(x+a)+e^x\cos(x+a)$$

$$=e^x\{\sin(x+a)+\cos(x+a)\}$$

$$=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+a+\frac{\pi}{4}\right),$$

故本公式成立．假设 $n=m$ 时也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left[(\sqrt{2})^m e^x\sin\left(x+a+\frac{m\pi}{4}\right)\right]'$$

$$=(\sqrt{2})^m\left[e^x\sin\left(x+a+\frac{m\pi}{4}\right)+e^x\cos\left(x+a+\frac{m\pi}{4}\right)\right]$$

$$=(\sqrt{2})^m e^x\cdot\sqrt{2}\sin\left(x+a+\frac{m\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^{m+1}e^x\sin\left(x+a+\frac{(m+1)\pi}{4}\right)$$

$$=(\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x+a+\frac{n\pi}{4}\right),$$

公式仍然成立．因此公式对一切自然数 n 均成立．

(8) $n=1$ 时，由 $y=\mathrm{tg}^{-1}x$ 和 $x=\mathrm{tg}\,y$ 得到

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2y}=\cos^2y.$$

因为 $\cos^2y=(1-1)!\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$,故本公式成立．假设 $n=m$ 也成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=(y^{(m)})'=\left[(m-1)!\cos^m y\cdot\sin m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]'$$

$$=(m-1)!\left[m\cdot\cos^{m-1}y\cdot(-\sin y)\cdot y'\cdot\sin m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\cos^m y\cdot\cos m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cdot my'\right]$$

$$=m!\left[-\cos^{m+1}y\cdot\sin y\cdot\sin m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.\cos^{m+2}y\cdot\cos m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=m!\cos^{m+1}y\cdot\left[\cos n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\cos y-\sin m\left(y+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin y\right]$$

$$=m!\cos^{m+1}y\cdot\cos\left[m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y\right]$$

$$=m!\cos^{m+1}y\cdot\sin\left[m\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+y+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=m!\cos^{m+1}y\cdot\sin\left[(m+1)\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=(n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

公式仍然成立．因此对于一切自然数 n 均成立．□

【定理】1． 设 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，若 $f(x)$ 的二阶导函数存在且 $f'(x)\neq 0$，则反函数的二阶导数为

$$\varphi''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

证明　由§2的【定理】5知，$\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$，因此

$$\varphi''(y)=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$ □

【定理】2． 若 $x=f(t)$，$y=g(t)$，且 $f'(t)\neq 0$，则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{f'(t)\cdot g''(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{[f'(t)]^3}.$$

证明　由§2【定理】6知

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)},$$

因此，
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{g'(t)}{f'(t)}\right]\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{g''(t)\cdot f'(t)-g'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{f'(t)\cdot g''(t)-f''(t)\cdot g'(t)}{[f'(t)]^3}.$$ □

【定理】3． 若 $f''(x)=0$，则 $f(x)$ 是 x 的至多一次的整式．

证明　因为 $f''(x)=0$，即 $[f'(x)]'=0$，所以根据§4．【定理】3知，$f'(x)=p$，p 是常数．引用【定理】3的【系】得到 $f(x)=px+g$，这就是说，它是 x 的至多一次的整式(注意，p 还可能为0) □

6·2 莱布尼兹定理和递推公式

【定理】4. 若 $y=f(x)+g(x)$，则

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x).$$

证明 $n=1$ 时，因为 $y=f(x)+g(x)$，所以 $y'=f'(x)+g'(x)$成立（根据§2.定理1）. 若假设 $n=m$ 时也成立，则当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}y^{(n)}=y^{(m+1)}&=(y^{(m)})'=[f^{(m)}(x)+g^{(m)}(x)]'\\&=[f^{(m)}(x)]'+[g^{(m)}(x)]'\\&=f^{(m+1)}(x)+g^{(m+1)}(x)\\&=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x).\end{aligned}$$

即 $n=m+1$ 时公式仍然成立. 因此，公式对一切自然数 n 均成立. □

【定理】5. 若 $y=f(x)\cdot g(x)$，则

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f(x)\cdot g^{(n)}(x).$$

这就是莱布尼兹公式.

证明 $n=1$ 时，因 $y=f(x)\cdot g(x)$，引用§2.**【定理】**3 可得，$y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$，即公式成立. 若假设 $n=m$ 时成立，则当 $n=m+1$ 时

$$y^{(n)}=y^{(m+1)}=[y^{(m)}]'$$

$$=\left[f^{(m)}\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k f^{(m-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f(x)\cdot g^{(m)}(x)\right]'$$

$$=[f^{(m)}(x)]'\cdot g(x)+f^{(m)}(x)\cdot g'(x)+$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k\left\{[f^{(m-k)}(x)]'\cdot g^{(k)}(x)+f^{(m-k)}(x)\cdot[g^{(k)}(x)]'\right\}+$$

$$f'(x)\cdot g^{(m)}(x)+f(x)\cdot[g^{(m)}(x)]'$$

$$=f^{(m+1)}(x)\cdot g(x)+f^{(m)}\cdot g'(x)+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k\cdot f^{(m-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k f^{(m-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)+f'(x)\cdot g^{(m)}(x)+f(x)\cdot g^{(m+1)}(x)$$

$$=f^{(m+1)}(x)\cdot g(x)+\left[\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k f^{(m-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f'(x)\cdot\right.$$

$$g^{(m)}(x)\Big]+\Big[f^{(m)}(x)\cdot g'(x)+\sum_{k=1}^{m-1}C_m^k f^{(m-k)}(x)\cdot g^{(k+1)}(x)\Big]$$

$$+f(x)\cdot g^{(m+1)}(x)$$

$$=f^{(m+1)}(x)\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{m}C_m^k f^{(m-k+1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{m-1}C_m^k$$

$$f^{(m-K)}(x)\cdot g^{(K+1)}(x)+f(x)\cdot g^{(m+1)}(x)$$

$$=f^{(m+1)}(x)\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{m}\Big[C_m^k+C_m^{k-1}\Big]\cdot f^{(m+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$$

$$+f(x)\cdot g^{(m+1)}(x)$$

$$=f^{(m+1)}(x)\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{m}C_{m+1}^k f^{(m+1-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f(x)\cdot$$

$$g^{(m+1)}(x)$$

$$=f^{(n)}(x)\cdot g(x)+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)+f(x)\cdot g^{(n)}(x).$$

即当 $n=m+1$ 时公式仍然成立。因而对于一切自然数 n 均成立。 □

例题1. 求 $\frac{x+a}{x+b}$ 的 n 阶导数。

解 因 $y=\frac{x+a}{x+b}=1+\frac{a-b}{x+b}$，利用【公式】(4)即得

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{n!(a-b)}{(x+b)^{n+1}}.$$

例题2. 求 $\frac{1}{x^2+3x+2}$ 的 n 阶导数。

解 因 $y=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$，利用【定理】4和【公式】(4)得到

$$y^{(n)}=(-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

例题3. 求 $x^3\cdot e^x$ 的 n 阶导数。

解 令 $f(x)=e^x$，对所有自然数 n，都有 $f^{(n)}(x)=e^x$。令 $g(x)=x^3$，则

$g'(x)=3x^2$,　$g''(x)=6x$,　$g'''(x)=6$

$g^{(n)}(x)=0(n\geqslant 4)$.

因此，若引用【定理】5，对于 $y=x^3e^x$，

$y'=e^x(x^3+3x^2)$,

$y''=e^x(x^3+6x^2+6x)$,

$y'''=e^x(x^3+9x^2+18x+6)$.

当 $n\geqslant 4$ 时得到

$$y^{(n)}=e^x[x^3+C_n^1\cdot 3x^2+C_n^2\,6x+C_n^3 6]$$

$$=e^x[x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)].$$

在 $n\leqslant 3$ 的情况下，上述结果仍然正确．因此，

$$y=e^x[x^3+3nx^2+3n(n-1)x+n(n-1)(n-2)]$$

$$(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

例题4．设 $y=\sin^{-1}x$，求当 $x=0$ 时 y 的 n 阶导数（用递推公式计算高阶导数）．

解　因 $y=\sin^{-1}x$，故 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $y'\sqrt{1-x^2}=1$，在此等式两边对 x 微分，得

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y'+\sqrt{1-x^2}\cdot y''=0,$$

即　$(1-x^2)y''-xy'=0$,　　①

①式两端再对 x 微分，得到

$(1-x^2)y'''-3xy''-y'=0$.

应用【定理】5，把①式两端对 x 微分 n 次($n\geqslant 2$)，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+C_n^1(-2x)y^{(n+1)}+C_n^2(-2)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-C_n^1y^{(n)}$$

$$=0.$$

即 $(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$.

此式也包含了①式和对①式微分一次所得的结果，故当 $n\geqslant 0$ 时，此式恒成立．将 $x=0$ 代入此式，对于一切大于或等于零的整数n，$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$显然是成立的．

由此可知，若设 $y''(0)=0$，$y^{(2r)}(0)=0$，则因 $y^{(2r+2)}(0)=(2r)^2\cdot y^{(2r)}(0)=0$，故对于一切自然数 m，$y^{(2m)}(0)=0$.

又有 $y'(0)=1$，$y'''(0)=1^2\cdot y'(0)=1$，$y^{(2r+1)}(0)=1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2r-1)^2$，由于

$$y^{(2r+3)}(0)=(2r+1)^2\cdot y^{(2r+1)}(0)=1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2r-1)^2\cdot(2r+1)^2.$$

因此对于一切自然数 m 下式成立

$$y^{(2m+1)}(0)=1^2\cdot 3^2\cdots\cdots(2m-1)^2,$$

6·3　曲线的凹凸和拐点

【定义】2. 在区间内向下凸及向上凸　当函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义时，在区间内任取两点 x_1、x_2，把曲线 $y=f(x)$ 上与之对应的两点记为 P_1、P_2. 若对于区间 $[x_1, x_2]$ 曲线弧位于线段 P_1P_2 的下方，则说此曲线在区间 I 内向上凹或向下凸；若曲线弧位于线段 P_1P_2 的上方，则说此曲线在区间 I 内向下凹或向上凸.

【定理】6. 设 $f(x)$ 是在区间 (a, b) 内有定义的连续函数. 若对于 (a, b) 内的任何两点 x_1、x_2(且 $x_1<x<x_2$).

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

成立，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a, b) 向下凸.

证明　因 $x_1<x<x_2$，故由 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ 得

$$(x_2-x)[f(x)-f(x_1)]\leqslant(x-x_1)[f(x_2)-f(x)],$$

$$(x_2-x_1)f(x)\leqslant(x-x_1)f(x_2)+(x_2-x)f(x_1).$$

因 $x_2-x_1>0$，故可得到

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1}.$$

所以，曲线 $y=f(x)$ 上与 x 对应的点都位于线段 P_1P_2 的下方.　□

【定理】7. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数 $f''(x)$，则 $f(x)$ 在该区间上向下凸的充分必要条件是，在该区间上恒有 $f''(x)\geqslant 0$.

证明　设在区间 I 上恒有 $f''(x)\geqslant 0$. 由 §4.【定理】2 可知，对于满足 $x_1<x<x_2$ 的所有 x，存在一个 ξ_1，$x_1<\xi_1<x$，使 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1)$；同时还存在一个 ξ_2，$x<\xi_2<x_2$，使 $\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2)$. 因 $f''(x)\geqslant 0$，$\xi_1<\xi_2$，所以由 §5【定理】2，有 $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$，即 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. 由【定理】6 知，$f(x)$ 在区间 I 向下凸.

反之，假设在区间 I 向下凸，对于 $x_1<x<x_2$ 的 x，下式成立

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1}.$$

整理后得到 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

因 $x-x_1>0$，$x_2-x>0$，故

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{[f(x)-f(x_1)]+[f(x_2)-f(x)]}{(x-x_1)+(x_2-x)}$$

$$=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

但是，$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$f'(x_2)=\lim_{x\to x_2}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

因此，对于使 $x_1<x_2$ 的任何 x_1、x_2 来说，$f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$ 成立，故可得到 $f''(x)\geqslant 0$. □

【系】 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数 $f''(x)$，则 $f(x)$ 在该区间向上凸的充分必要条件是，在区间上恒有 $f''(x)\leqslant 0$.

证明 令 $F(x)=-f(x)$，在 I 上 $F''(x)=-f''(x)$ 成立，那么 $f(x)$ 在 I 向上凸的条件就是 $F(x)$ 在 I 向下凸的条件，根据【定理】7，此条件就是 $F''(x)\geqslant 0$，即 $f''(x)\leqslant 0$. □

注意 函数在区间 I 向下凸时，如果作曲线 $y=f(x)$ 的切线，并沿该曲线从左向右移动切点，则切线将作反时针旋转，若函数向上凸，则切线将作顺时针旋转.

【定理】8. 设 c 为区间 (a, b) 的内点．若 $f(x)$ 在 (a, b) 向下凸，则 $f(x)$ 在 $x=c$ 存在有限的右导数 $f_+'(c)$ 和左导数 $f_-'(x)$.

证明 对于满足 $d<c<x'<x$ 的 d、x' 和 x，因函数向下凸，故下式成立，

$$\frac{f(c)-f(d)}{c-d}\leqslant\frac{f(x')-f(c)}{x'-c}\leqslant\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

(参看【定理】7 的证明)．即当 $x\to c$ 时，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ 单调下降并存在下

界，因此，$f'_+(c)=\lim\limits_{x\to c+0}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$存在．另外，对于满足$x<x'<c<d$的$x$、$x'$和$d$，下式成立，

$$\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\leqslant\frac{f(c)-f(x')}{c-x'}\leqslant\frac{f(d)-f(c)}{d-c},$$

所以，当$x\to c$时，$\dfrac{f(c)-f(x)}{c-x}$单调上升并存在上界，故$f'_-(c)=\lim\limits_{x\to c-0}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-c}$存在。 □

【定义】3．拐点 在$x=C$的两侧$f''(x)$的异号时，C点叫做$f(x)$的一个拐点。

注意 当$x=C$是拐点时，则曲线$y=f(x)$在C的一侧是凸的，而在另一侧则是凹的。

例题 求$\sin x$的拐点。

解 令$y=\sin x$，$y'=\cos x$，$y''=-\sin x$， 因此$x=n\pi$是拐点。

6·4 极大与极小的判别

【定理】9． 设$f(x)$在$x=a$有连续的n阶导数，且

$$f'(a)=f''(a)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,\quad f^{(n)}(a)\neq0(n\geqslant1).$$

(1) n是偶数时，i) 若$f^{(n)}(a)>0$，则a为极小点，ii) 若$f^{(n)}(a)<0$，则a为极大点。

(2) n是奇数时， i) 若$f^{(n)}(a)>0$，则$f(x)$在$x=a$处于增加状态；ii)若$f^{(n)}(a)<0$，则$f(x)$在$x=a$处于为减少状态。

证明 因$f^{(n)}(x)$在$x=a$是连续的，所以总有$h>0$存在，对于满足$a-h<x<a+h$的x $f^{(n)}(x)$与$f^{(n)}(a)$同号。又根据后面8.10，【定理】6及其注意事项，对于满足$a-h<b<a+h$的b，总存在着一个c，使下式成立，

$$f(b)=f(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),\quad (c\text{ 在 }a,b\text{ 之间})$$

(1) 当n为偶数时，$\dfrac{(b-a)^n}{n!}>0$，因此

i) 若$f^{(n)}(a)>0$，则从$f^{(n)}(c)>0$可知，当$0<|b-a|<h$时，$f(b)>f(a)$，即a是极小点。

ii) 若$f^{(n)}(a)<0$，则从$f^{(n)}(c)<0$可知，当$0<|b-a|<h$时，

$f(b)<f(a)$，即 a 是极大点。

(2) n 为奇数时，$\dfrac{(b-a)^n}{n!}$ 要随着 $b<a$ 变到 $a<b$ 而变号，因此

i) 若 $f^{(n)}(a)>0$，则从 $f^{(n)}(c)>0$ 可知，当 b 从左至右经过 a 时 $f(b)-f(a)$ 的符号由负变正，因而 $f(x)$ 在 $x=a$ 处于增加状态。

ii) 若 $f^{(n)}(a)<0$，则从 $f^{(n)}(c)<0$，可知，当 b 从左至右经过 a 时 $f(b)-f(a)$ 的符号由正变负，因而 $f(x)$ 在 $x=a$ 处于减少状态。

【系】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近可微，而 $f'(x)$ 在 $x=a$ 附近连续。

(1) 若 $f'(a)>0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处于增加状态、

(2) 若 $f'(a)<0$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处于减少状态。

(3) 若 $f'(a)=0$ 且 $f''(x)$ 在 $x=a$ 连续，则

i) $f''(a)>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 成为极小；

ii) $f''(a)<0$ 时，$f(x)$ 在 $x=a$ 成为极大.

证明 上述(1)和(2)是【定理】9(2) $n=1$ 的情况，上述(3)是【定理】9(1)中 $n=2$ 的情况。 □

例 $f(x)=x^p$，p 为正整数时，$f'(x)=p\cdot x^{p-1}$，$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$，……，$f^{(p-1)}(x)=p(p-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot x$，$f^{(p)}(x)=p!$. 因此，$f'(0)=0$，$f''(0)=0$，……，$f^{(p-1)}(0)=0$，$f^{(p)}(0)>0$. 从而 p 为偶数时函数在 $x=0$ 处成为极小，p 为奇数时在 $x=0$ 处于增加状态。

§7. 曲线的形状

7·1 一般方法

本节我们将根据已知函数 $y=f(x)$（或 $x=\varphi(y)$，或 $f(x,y)=0$）来确定它所表示的曲线的形状，通常，按下述五个步骤来确定曲线的形状。

(1) 定义域——确定曲线存在的区域

由已知方程来确定使 y 为实数的 x 的范围，以及使 x 为实数的 y 的范围。

(2) 函数的增减和极值——确定曲线的上升和下降。

求出 y'，按 y' 的正、负、零点分别确定曲线的上升、下降和极值点。

(3) 确定曲线的凹部、凸部及拐点。

按 y'' 的符号来确定。

(4) 确定有无渐近线．若有，它位于曲线的哪一侧．

(5) 函数的奇偶性——确定有无对称轴或对称中心．

在方程 $f(x, y)=0$ ($y=f(x)$ 可看作 $y-f(x)=0$, $x=\varphi(y)$ 可看作 $x-\varphi(y)=0$)中，当 $f(x,-y)=f(x,y)$时，则方程 $f(x,y)=0$ 表示的曲线对称于 x 轴，当 $f(-x, y)=f(x,y)$时，则曲线对称于 y 轴，当 $f(-x, -y)=f(x, y)$时，则曲线对称于原点，原点为对称中心．

按上述步骤※确定曲线的形状，称为曲线的描绘(在下一节举例说明)．

7·2 渐近线和孤立点

【定义】1．渐近线 当 P 点沿着一条曲线或它的一个分支(如果它有的话)向无限远处移动时，若该点和某直线的距离趋近于 0，则该直线叫做曲线的一条渐近线．

【定义】2．孤立点 除 P 点以外在 P 的充分小邻域内不存在曲线的其他点时，则P点叫做曲线的孤立点．

【定理】1．(1) 当 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ 为$-\infty$ 或 $+\infty$ 时，直线 $x=a$ 是曲线 $y=f(x)$的一条渐近线．

(2) 当曲线 $y=f(x)$具有不平行于 y 轴的渐近线 $y=mx+b$ 时，则

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx].$$

(3) 设 g 为极坐标平面内的一条直线，从极点向 g 引的垂线长度为p，g 和极轴所成的角为 α．当 g 和极轴相交时设 p 为正，当g和极轴的反向延长线相交时设 p 为负．此时，易得 g 的方程为 $r\cdot\sin(\alpha-\theta)=p$． 若 g 是曲线 $r=f(\theta)$的渐近线，则 α 和 p 满足

$$\alpha=\lim_{r\to\pm\infty}\theta,\ p=\lim_{\theta\to\alpha}r\cdot\sin(\alpha-\theta).$$

证明 (1) 设 $P(x, y)$为曲线 $f(x)$上的点，从 P 向直线 $x=a$ 所引垂线长为$|x-a|$．显见，当 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$或 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$为$+\infty$或$-\infty$时，直线$x=a$是曲线的渐近线．

(2) 设 $P(x, y)$为曲线 $f(x)$上的点，则从 P 向直线 $y=mx+b$ 所引垂线长度为$\dfrac{|f(x)-mx-b|}{\sqrt{1+m^2}}$．因此，若 g 是渐近线，则有 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx-b]=0$ 从而

※ 有时，还要讨论函数有无周期性．——译注

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx+b+[f(x)-mx-b]}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[m+\frac{b}{x}+\frac{f(x)-mx-b}{x}\right]$$

$$=m.$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}[b+(f(x)-mx-b)]=b.$$

(3) 从图 11-6 知 $\alpha=\lim\limits_{\gamma\to\pm\infty}\theta$，此外，$\theta\to\alpha$ 时，

$PM=r\cdot\sin(\alpha-\theta)\to p.$ □

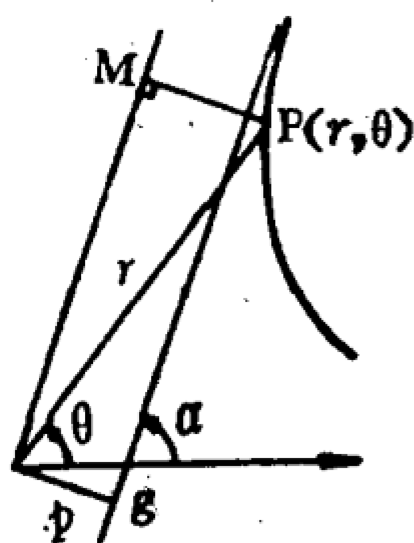


图 11-6

例题1. 求 $y^3=(x-1)(x-2)^2$ 的渐近线。

解 因不存在 a 使 $x\to a$ 时 $y\to\pm\infty$，故不存在平行于y轴的渐近线。其次，由于 $\left(\frac{y}{x}\right)^3=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)^2$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^3=1,\text{即}\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1.$$

又因

$$y-x=\frac{y^3-x^3}{y^2+xy+x^2}=\frac{(x-1)(x-2)^2-x^3}{y^2+xy+x^2}$$

$$=\frac{-5x^2+8x-4}{y^2+xy+x^2},$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1}=-\frac{5}{3}.$$

所以渐近线为 $y=x-\frac{5}{3}$.

例题2. 求 $r\theta=a$ $(a>0)$的渐近线。

解 因 $\lim\limits_{\gamma\to\pm\infty}\theta=\lim\limits_{r\to\pm\infty}\frac{a}{r}=0$，故 $\alpha=0$，

$$\lim_{\theta\to\alpha}r\cdot\sin(\alpha-\theta)=\lim_{\theta\to 0}r\cdot\sin(-\theta)=\lim_{\theta\to 0}\left(-\frac{a}{\theta}\sin\theta\right)$$

$$=-a\cdot \operatorname{sim}_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=-a.$$

所求渐近线为 $\bar{r}\cdot\sin(-\theta)=-a$ 即 $r\cdot\sin\theta=a$.

曲线作图举例

例题3. 画出 $y^2=x^2\cdot\frac{1-x}{1+x}$ 的图象.

解 (1) 对称性：用 $-y$ 代替 y 时方程式不变，故曲线对称于 x 轴.（此外，无其他对称性）

(2) 定义域：从 $y^2=x^2\frac{1-x}{1+x}\geqslant 0$ 知 $-1<x\leqslant 1$，曲线存在的范围在二直线 $x=-1$ 及 $x=1$ 之间.

(3) 渐近线：$x\to -1+0$ 时，$y\to\pm\infty$，故 $x=-1$ 为渐近线，曲线从右侧接近它.

(4) 增减和极值：将 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 对 x 微分，

$$y'=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}$$

$$=\frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{-\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\ +\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

当 $-1<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$y'>0$，y 为增加；

当 $1>x>\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$y'<0$，y 为减少；

当 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，函数有极大值；

当 $x=1$ 时曲线和 x 轴垂直相交.

曲线 $y=-x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 与曲线 $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 关于 x 轴对称.

(5) 凹凸：

$$y''=\frac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{-(1+2x)}{1-x-x^2}-\frac{-2x}{2(1-x^2)}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$=\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

$$\frac{-(1+2x)(1-x^2)+[x-(1-x)](1-x-x^2)}{1-x^2}$$

$$=\frac{x-2}{(1+x)^2(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

当 $-1<x<1$ 时 $y''<0$，即 y 在 $(-1,\ 1]$ 向上凸。

将函数图象画出来，即如图 11-7 所示。

例题4. 画出 $r=3\cos\theta+\cos 2\theta$ 的图象。

解 令 $f(\theta)=3\cos\theta+\cos 2\theta$，则 $f(-\theta)=f(\theta)$. 又因 $f(\theta)$ 的周期为 2π，故只须在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上来考察它。

$$f'(\theta)=-(3\sin\theta+2\sin 2\theta)=-\sin\theta\cdot(3+4\cos\theta),$$

设在 $[0,\ \pi]$ 上满足，$\cos\theta=-\frac{3}{4}$ 的 θ 为 θ_1，则

$$f(\theta_1)=3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2-1=-\frac{17}{8}.$$

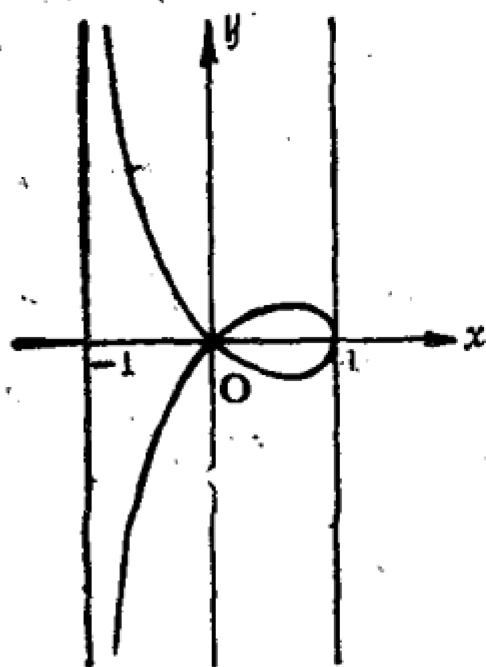


图 11-7

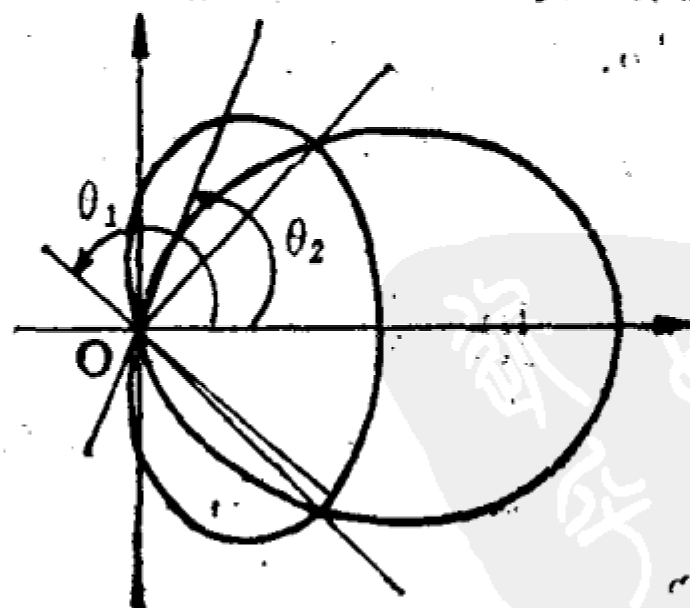


图 11-8

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	θ_1	π
$r=f(\theta)$	4	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\frac{17}{8}$	-2

由 $\bar{r}=0$ 即 $2\cos^2\theta+3\cos\theta-1=0$，解出 $\cos\theta=\frac{\sqrt{17}-3}{4}$，将适合此式的 θ 值记为 θ_2。函数图象如图 11-8 所示。

7·3 曲率和曲率半径

【定义】3. 曲率 设函数 $f(x)$ 及其 $f'(x)$ 和 $f''(x)$连续，$P(x, y)$和 $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的两点，过 P和 Q 的两条切线的夹角为 $\Delta\sigma$，弧 $\widehat{PQ}$ 的长为 Δs，则称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$为曲线在 P 点的曲率. 若记曲率为 k，则称 $\rho=\frac{1}{|k|}$为曲率半径. 在过 P 点的法线上，向曲线凹的一侧取一点 M，使 $PM=\rho$，以 M 为中心以 ρ 为半径作圆，此圆称为曲率圆，M 称为曲率中心.

【定理】2. 曲线 $y=f(x)$上 $P(x, f(x))$ 点处的曲率为$\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}$，

曲率中心为

$$\left(x-\frac{\{1+[f'(x)]^2\}\cdot f'(x)}{f''(x)},\ y+\frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}\right).$$

证明 设 P 点的切线和 x 轴的夹角为 σ，Q 点的切线与 x 轴的夹角为 $\sigma+\Delta\sigma$，因 $\operatorname{tg}\sigma=f'(x)$，$\operatorname{tg}(\sigma+\Delta\sigma)=f'(x+\Delta x)$，$\Delta\sigma=\operatorname{tg}^{-1}[f'(x+\Delta x)]-\operatorname{tg}^{-1}[f'(x)]$，又因 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{PQ}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=1$，

所以
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^{-1}[f'(x+\Delta x)]-\operatorname{tg}^{-1}[f'(x)]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^{-1}[f'(x+\Delta x)]-\operatorname{tg}^{-1}[f'(x)]}{\Delta x}\cdot$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$=\left\{\frac{d}{dx}\text{tg}^{-1}[f'(x)]\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$$

$$=\frac{f''(x)}{\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

从而得到曲率半径 $\dfrac{\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$ 和曲率中心

$$\left(x-\frac{\{1+[f'(x)]^2\}\cdot f'(x)}{f''(x)},\ y+\frac{1+[f'(x)]^2}{f''(x)}\right).$$ □

【系】1 当曲线用 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 的形式给出时，其曲率为

$$\frac{y''x'-x''y'}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

证明 因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{g''(t)\cdot f'(t)-g'(t)f''(t)}{[f'(t)]^3}$，故曲率为

$$\frac{g''(t)\cdot f'(t)-g'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)^2+g'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$ □

【系】2 当曲线用极坐标形式 $r=f(\theta)$ 给出时，其曲率为 $\dfrac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

证明 因 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$r=f(\theta)$，故

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta,$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2.$$

又因 $\dfrac{d^2x}{d\theta^2}=\dfrac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta$,

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,$$

从而

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}\frac{dx}{d\theta}-\frac{d^2x}{d\theta^2}\frac{dy}{d\theta}=\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right).$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right)-\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\cos\theta-2\frac{dr}{d\theta}\sin\theta-r\cos\theta\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\right.$$

$+\bar{r}\cos\theta)$

$$=2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\bar{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}+r^2.$$

由上述【系】1 得知曲率为$\dfrac{r^2+2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2-r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}{\left[\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2+\bar{r}^2\right]^{\frac{3}{2}}}$. □

例题1. 若曲线 $y=f(x)$在原点与 x 轴相切，且 $f''(x)$在原点连续，试证原点处的曲率半径为$\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{x^2}{2y}\right|$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{y'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{y''}$.

由【定理】2知，原点处的曲率半径为

$$\left|\frac{[1+f'(0)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(0)}\right|=\frac{1}{|f''(0)|}$$

故曲线 $y=f(x)$在原点处的曲率半径为$\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{x^2}{2y}\right|$.

例题2. 曲线$r=f(\theta)$在极点与极轴相切，若$f'(\theta)$在 $\theta=0$ 连续，试证极点处的曲率半径为$\lim\limits_{\theta\to0}\left|\dfrac{r}{2\theta}\right|$.

解 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\bar{r}}{2\theta}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\bar{r}'}{2}=\dfrac{1}{2}f'(0)$. 根据前面【系】2知，在 $\bar{r}=0$ 时，曲率半径为$\left|\dfrac{r'}{2}\right|$，故极点处的曲率半径是$\lim\limits_{\theta\to0}\left|\dfrac{r}{2\theta}\right|$.

例题3. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一点$(x, y)$处的曲率半径。

解 把椭圆方程两边对x微分两次，$\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}y'=0$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}y'^2+\dfrac{1}{b^2}yy''=0$，因此

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=\frac{b^2}{y}\left(-\frac{1}{a^2}-\frac{b^2x^2}{a^4y^2}\right)=-\frac{b^2}{y}\left(\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^4y^2}\right)$$

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

从而得曲率半径

$$\rho=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{b^4}{a^2y^3}\right|}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

例题4. 求圆 $x^2+y^2=a^2(a>0)$上点(x, y)处的曲率半径.

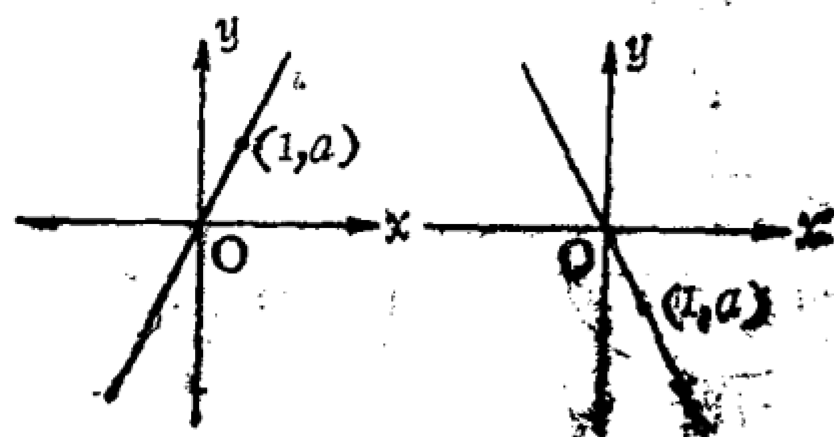
解 在上例中取 b 为 a，则 $\rho=\frac{[a^4(x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}{a^8}=\frac{a^9}{a^8}=a$. 或者，使用极坐标，圆的方程为 $r=a$，就可用【定理】2 的【系】2，因 $r'=0$，$r''=0$，所以 $\rho=\frac{r^3}{r^2}=r=a$.

7·4 直角坐标系下常用曲线的形状

见图 11-9 至图 11-43.

(1) $y=ax$ $(a\neq0)$

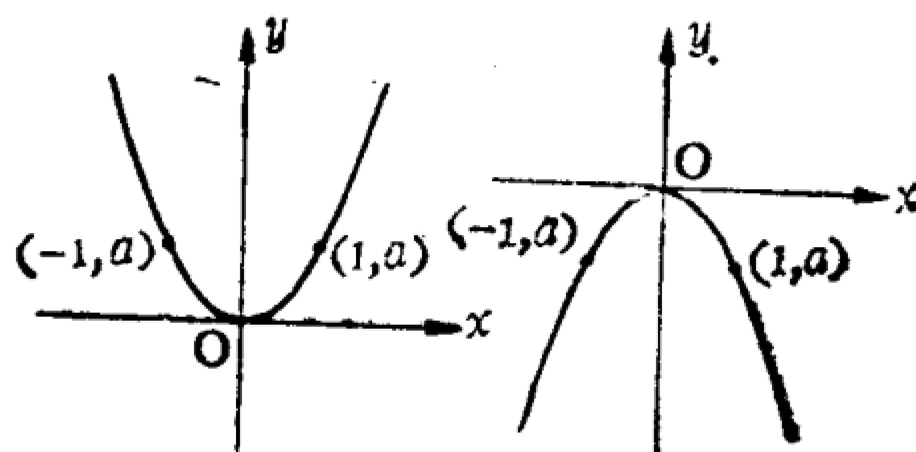
(a) $a>0$ (b) $a<0$



直 线

图 11-9

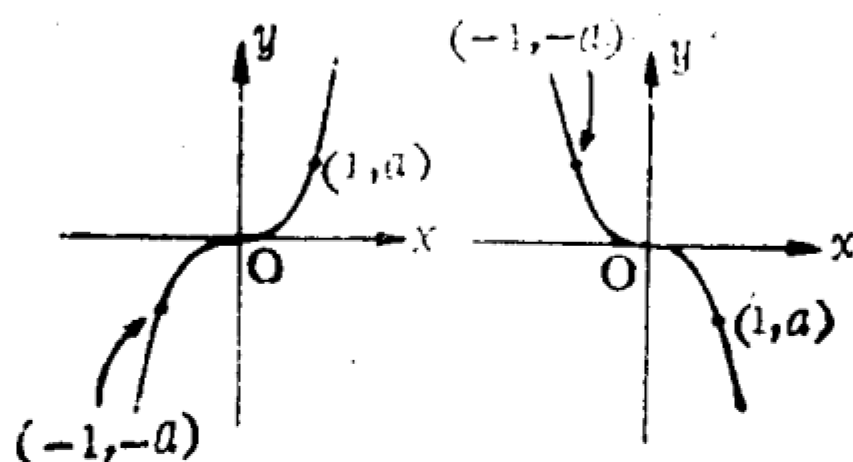
(2) $y=ax^2(a\neq 0)$



抛物线

图 11-10

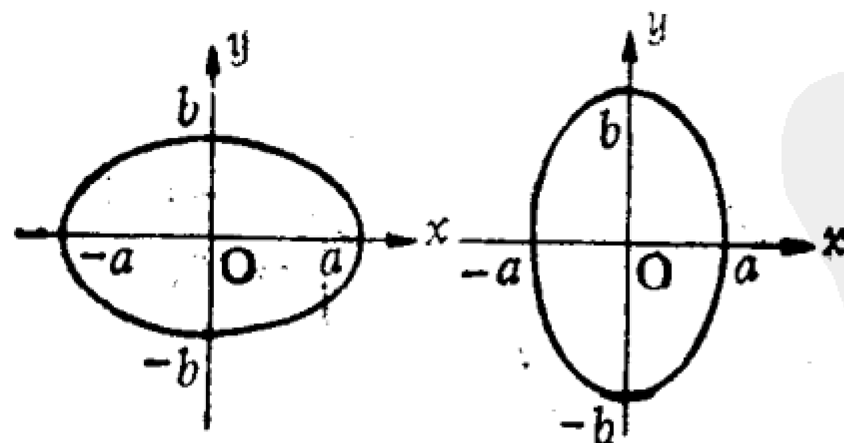
(3) $y=ax^3$ $(a\neq 0)$



立方抛物线

图 11-11

(4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

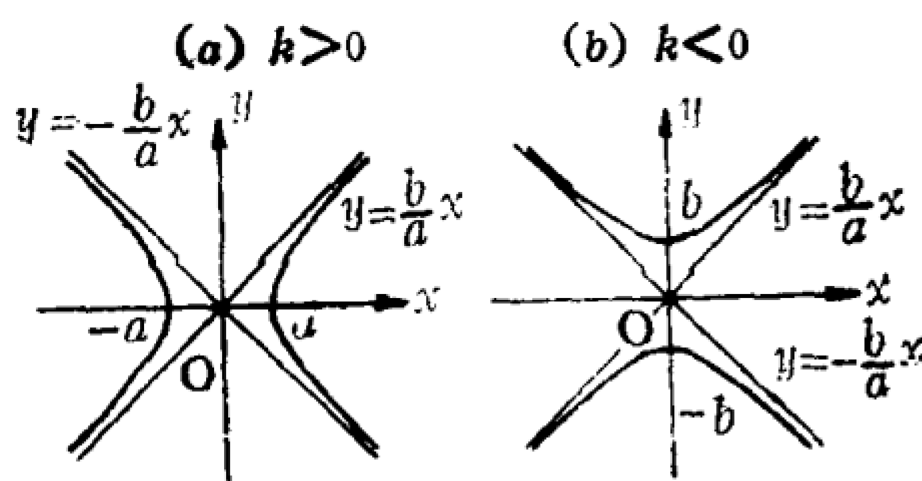


椭 圆

图 11-12

(5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=k$ ($a>0$, $b>0$, $k\neq0$)

(a) $k>0$ (b) $k<0$

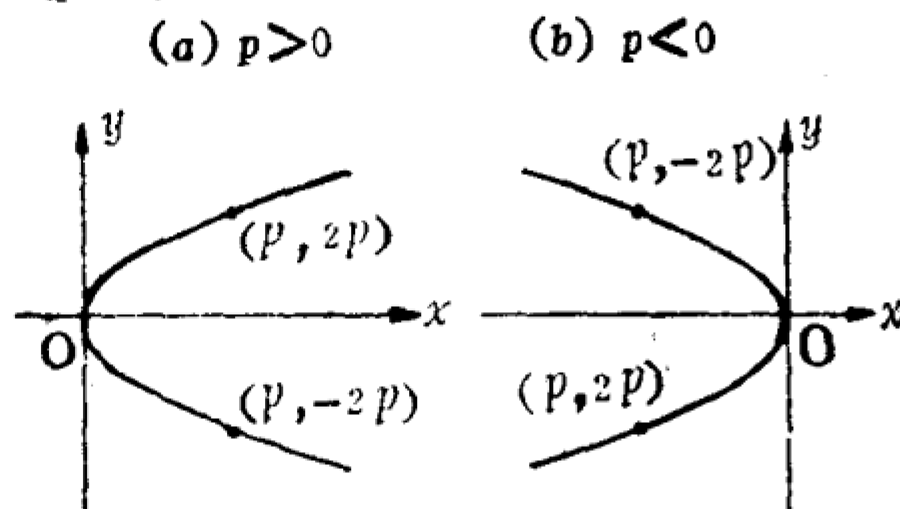


双 曲 线

图 11-13

(6) $y^2=4px$ ($p\neq0$)

(a) $p>0$ (b) $p<0$

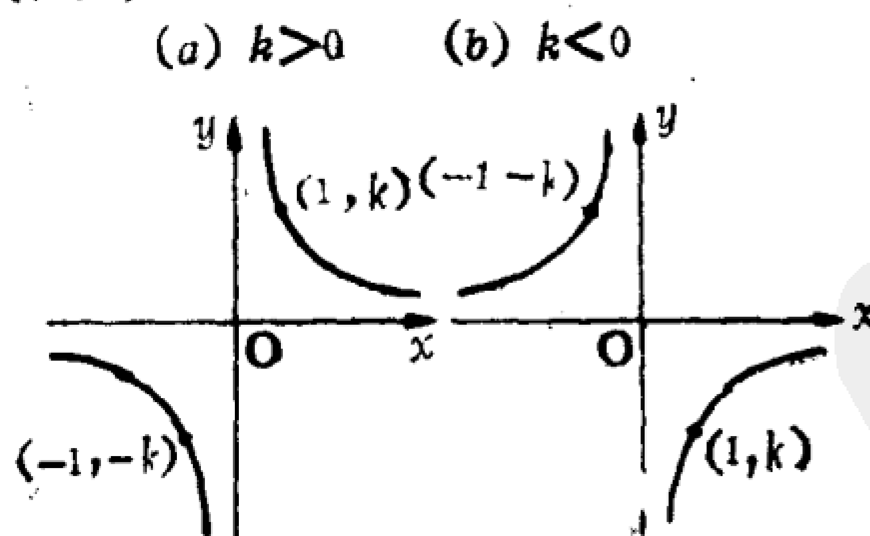


抛 物 线

图 11-14

(7) $xy=k$ ($k\neq0$)

(a) $k>0$ (b) $k<0$



等轴双曲线

图 11-15

(8) $y=\sqrt{x}$　　　　(9) $y=\sqrt[3]{x^2}$

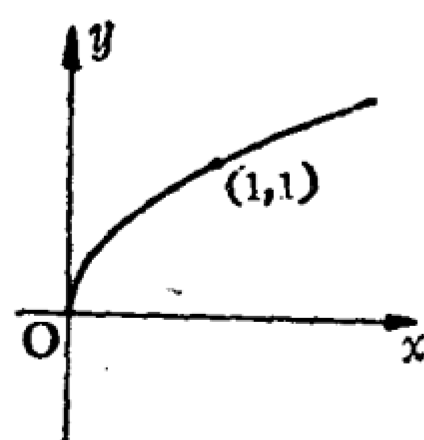


图 11-16

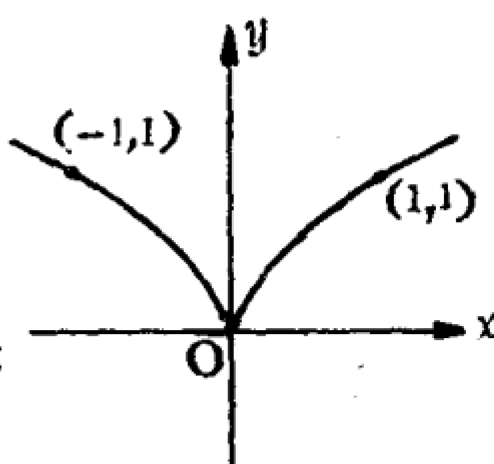
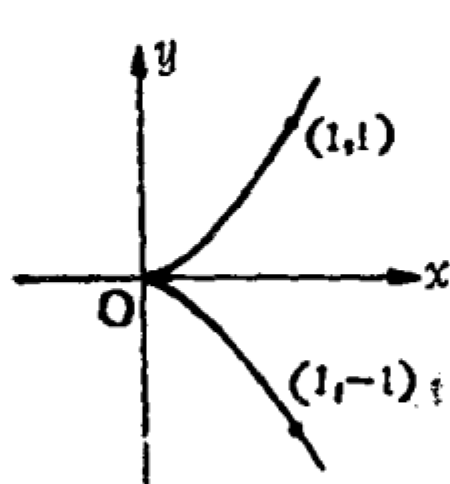
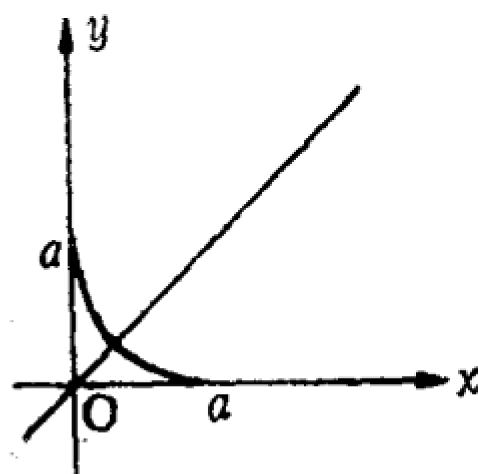


图11-17

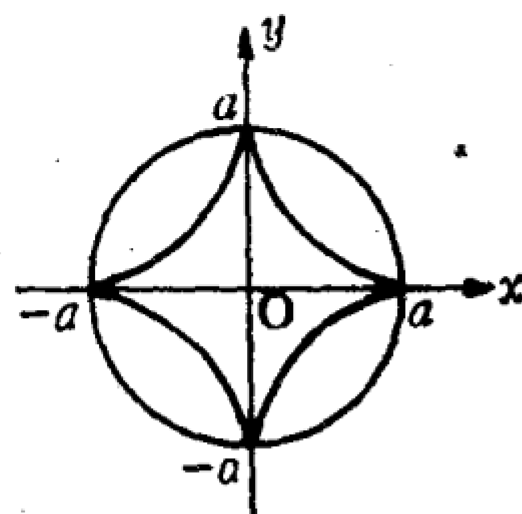
(10) $y^2=x^3$　(11) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ $(a>0)$ (12) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$



半立方抛物线
图 11-18

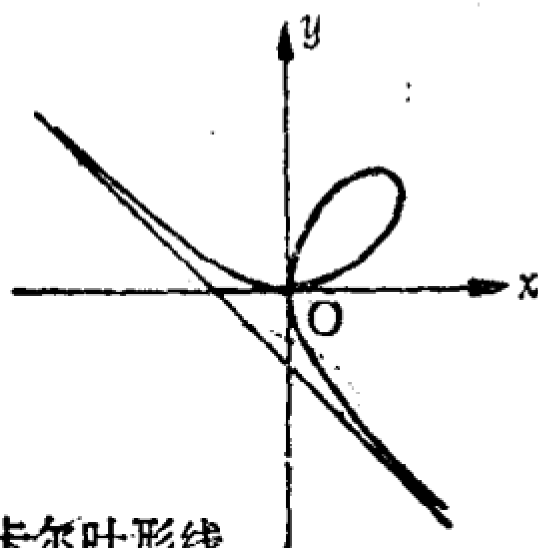


抛物线
图 11-19



星形线
图 11-20

(13) $x^3+y^3-3axy=0(a>0)$　　(14) $y=x+\frac{1}{x}$



笛卡尔叶形线
图 11-21

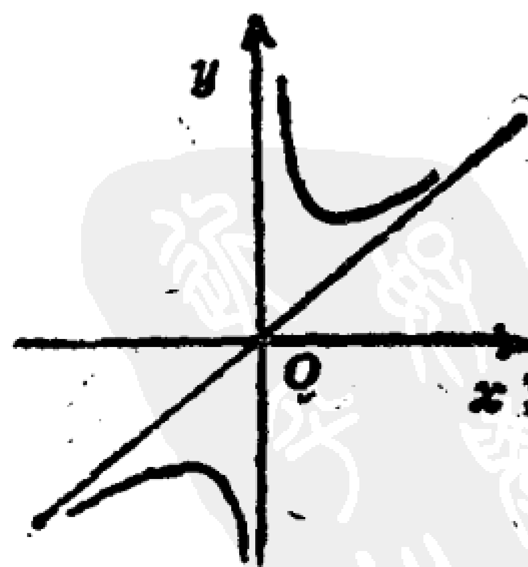
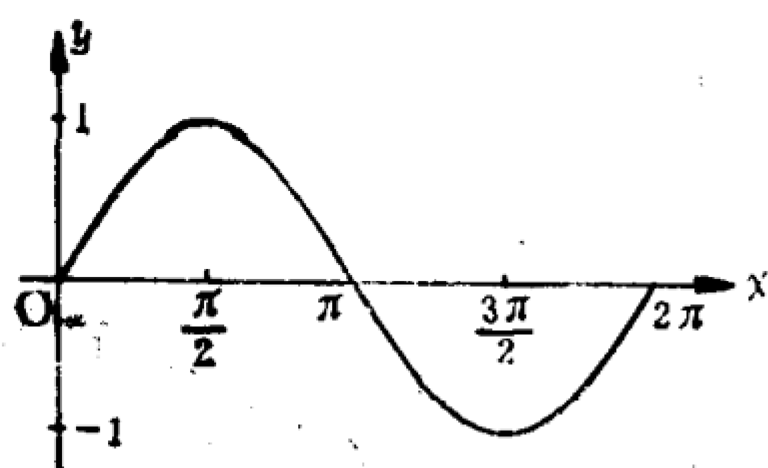


图 11-22

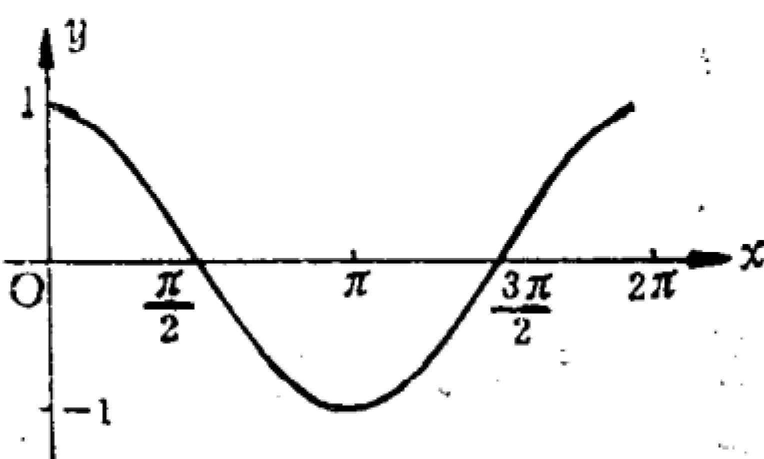
(15) $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$



正弦曲线

图 11-23

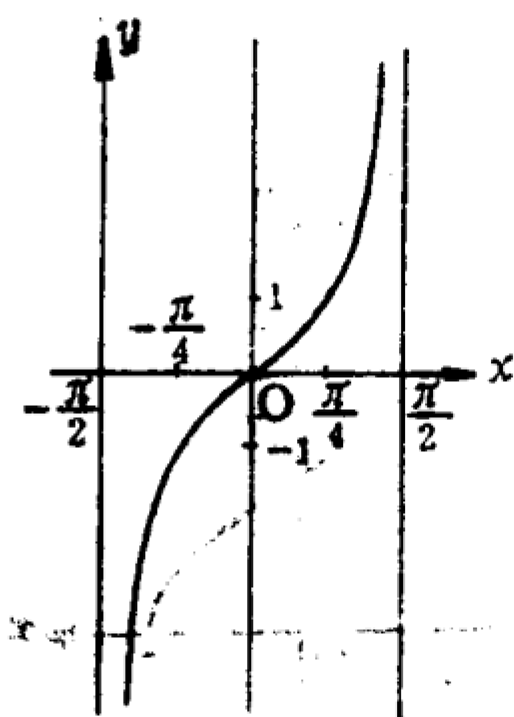
(16) $y=\cos x\ (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$



余弦曲线

图 11-24

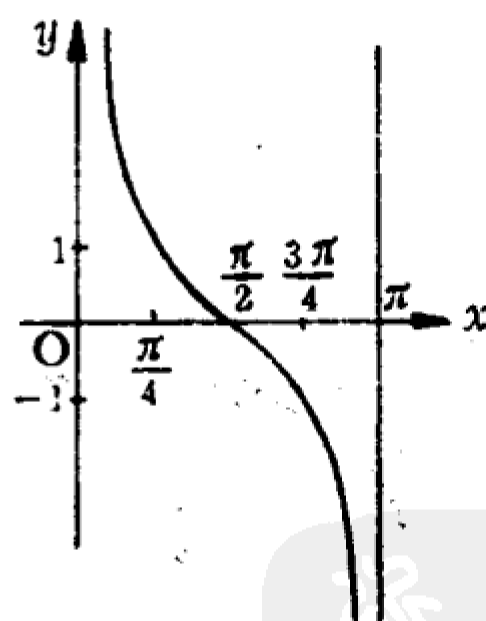
(17) $y=\operatorname{tg}x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$



正切曲线

图 11-25

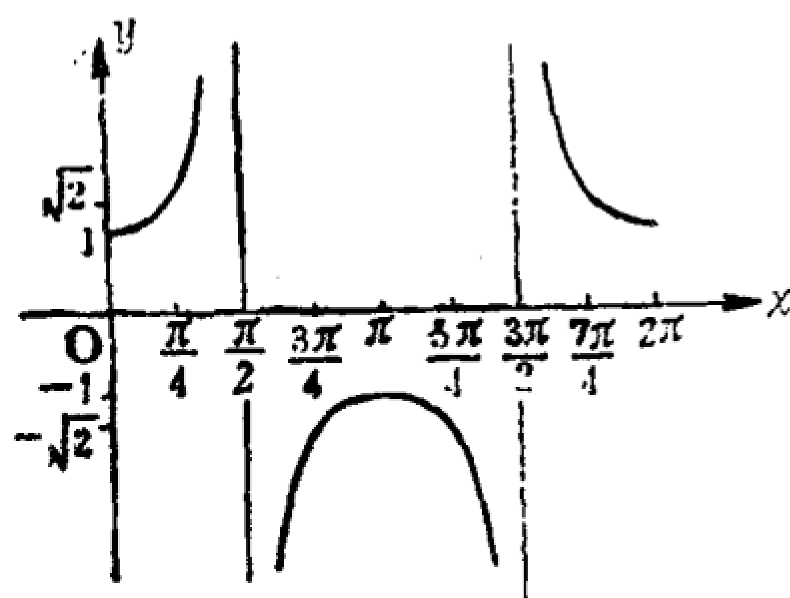
(18) $y=\operatorname{ctg}x\ (0<x<\pi)$



余切曲线

图 11-26

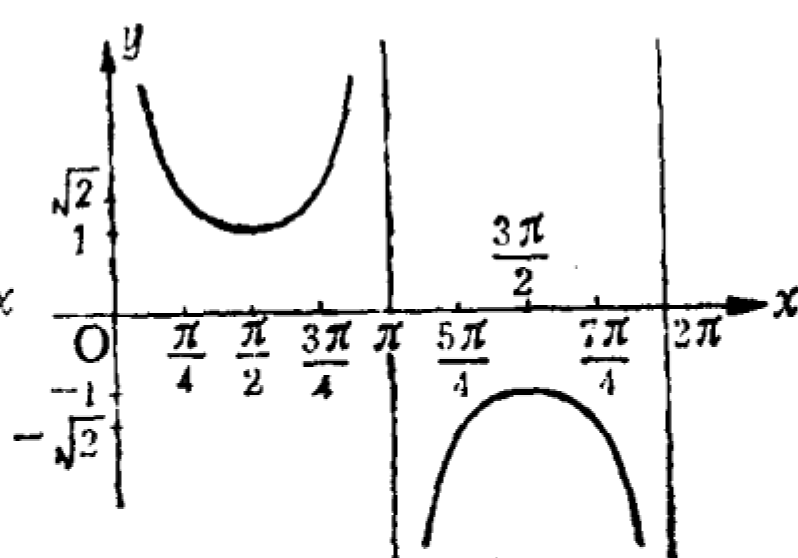
(19) $y=\sec x(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$



正割曲线

图 11-27

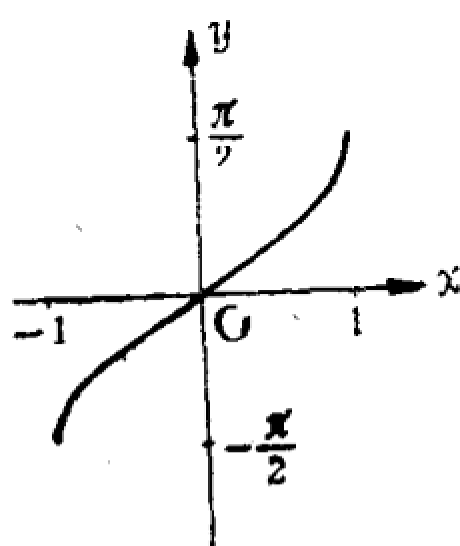
(20) $y=\csc x(0<x<\pi, \pi<x<2\pi)$



余割曲线

图 11-28

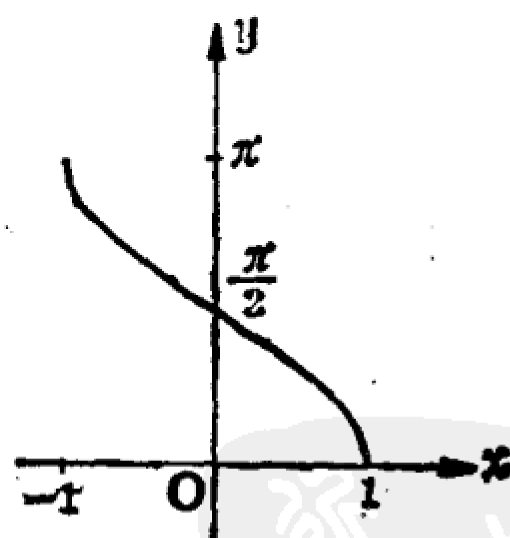
(21) $y=\sin^{-1}x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$



反正弦曲线

图 11-29

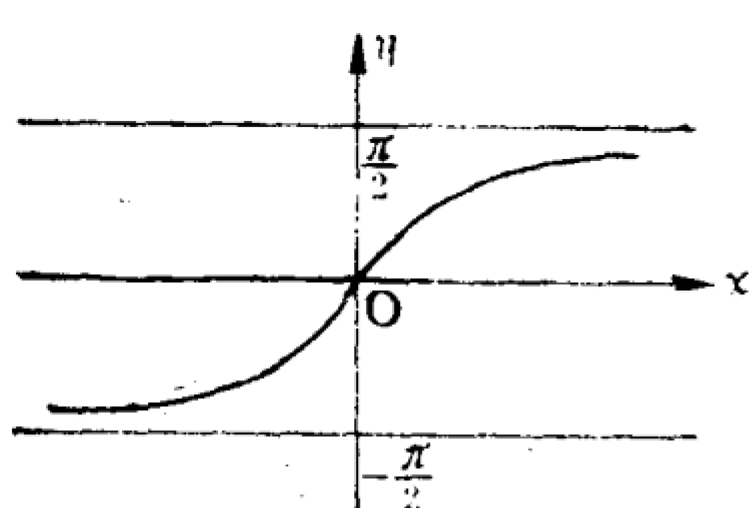
(22) $y=\cos^{-1}x\ (0\leqslant y\leqslant\pi)$



反余弦曲线

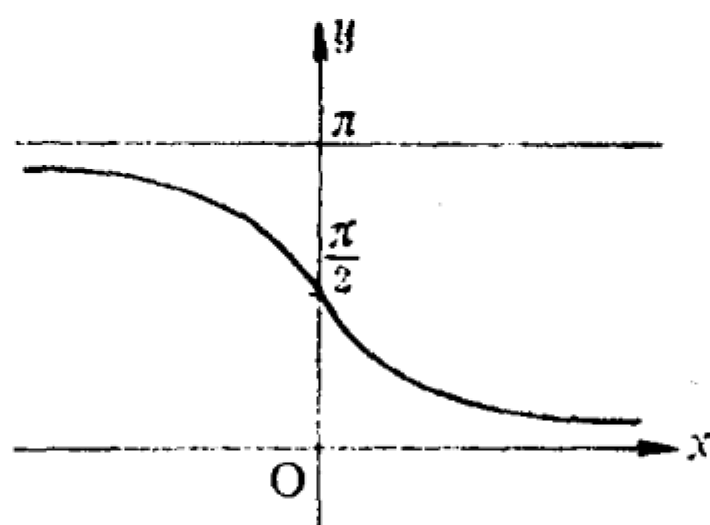
图 11-30

(23) $y=\mathrm{tg}^{-1}x\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$　(24) $y=\mathrm{ctg}^{-1}x\ (0<y<\pi)$



反正切曲线

图 11-31

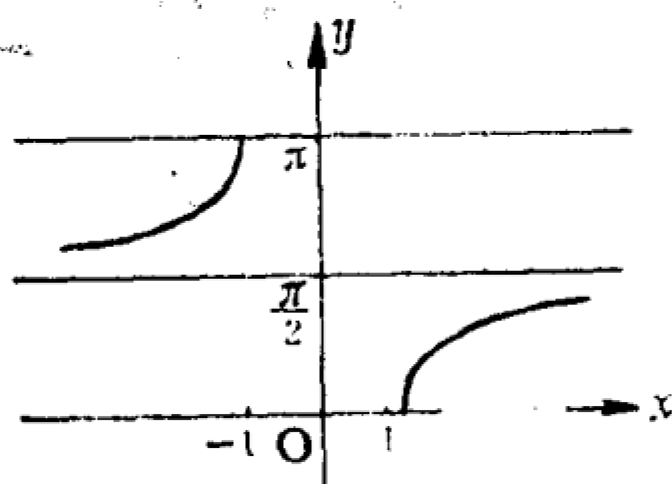


反余切曲线

图 11-32

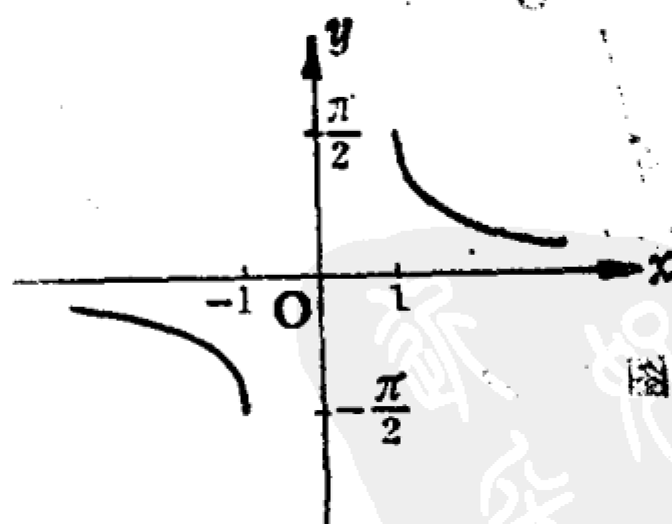
(25) $y=\sec^{-1}x\left(0<y<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<y<\pi\right)$

(26) $y=\csc^{-1}x\left(-\frac{\pi}{2}<y<0,\ 0<y<\frac{\pi}{2}\right)$



反正割曲线

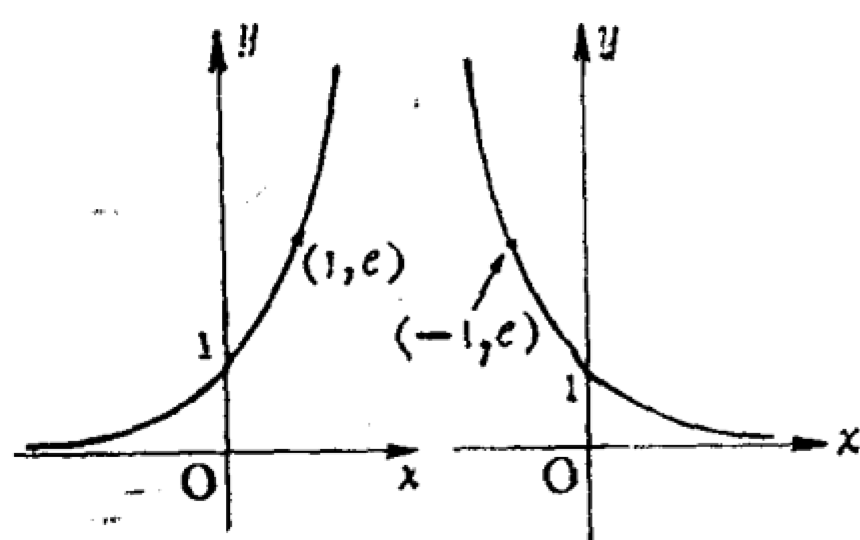
图 11-33



反余割曲线

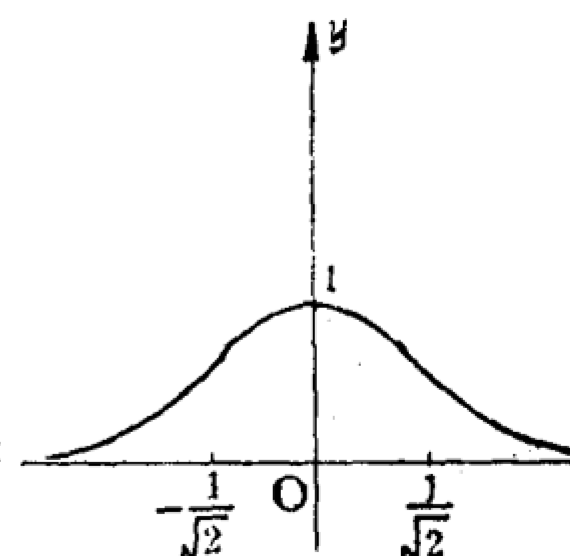
图 11-34

(27) $y=e^x$ (28) $y=e^{-x}$ (29) $y=e^{-x^2}$



指数曲线

图 11-35 图 11-36



概率曲线

图 11-37

(30) $y=x\cdot e^{-x}$ (31) $y=e^{-x}\sin x$ (32) $y=e^{-x}\cos x$

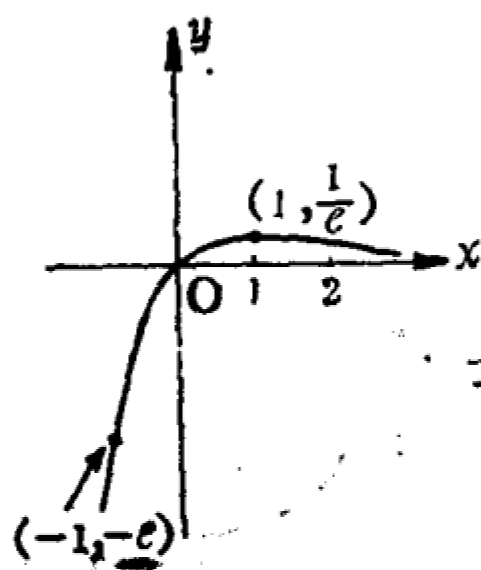


图 11-38

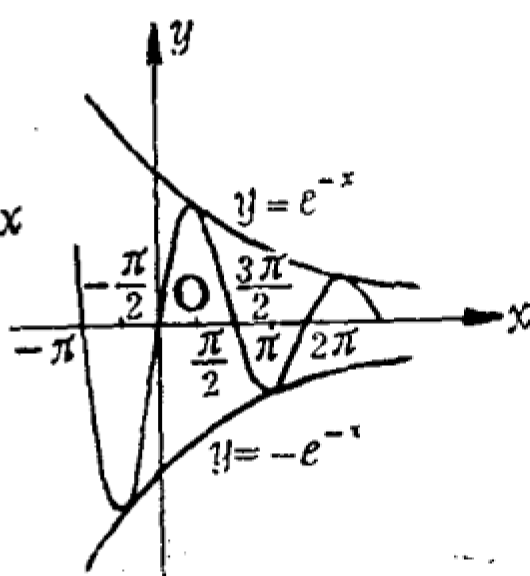


图 11-39

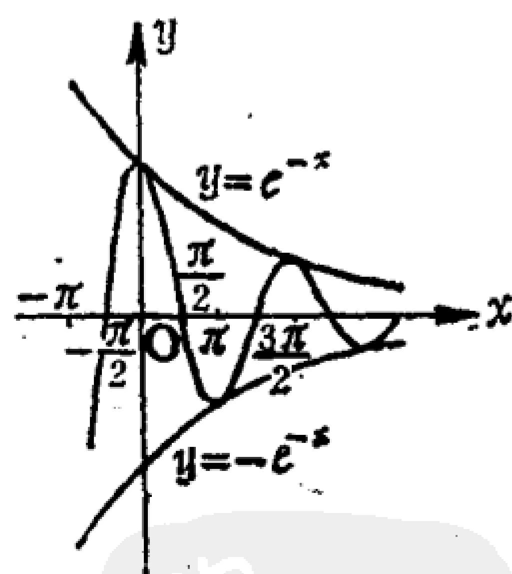
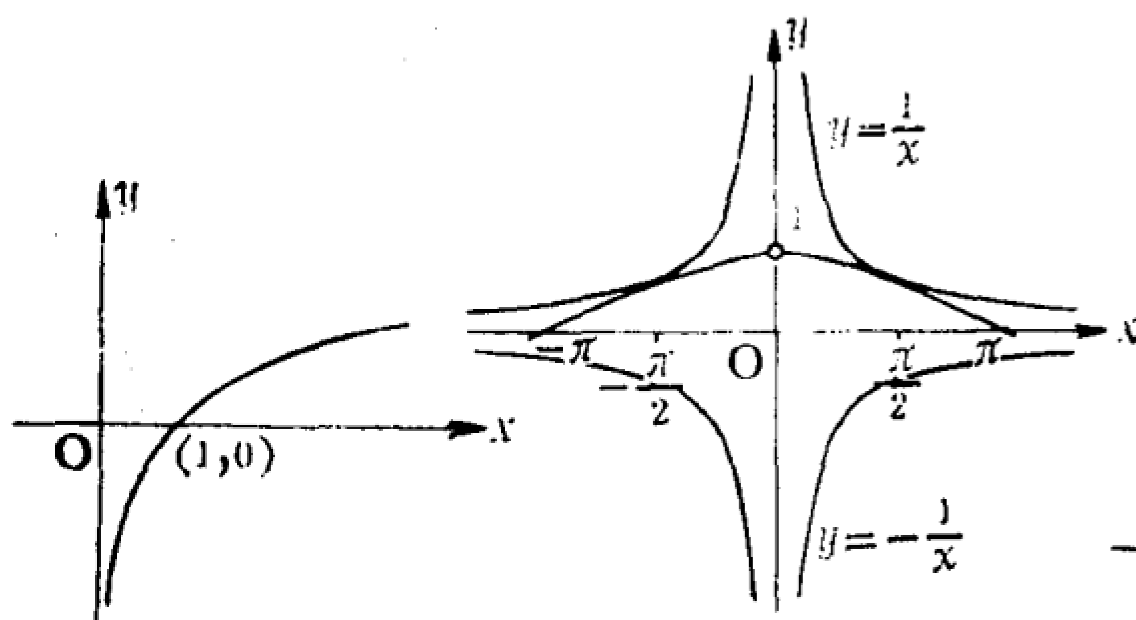
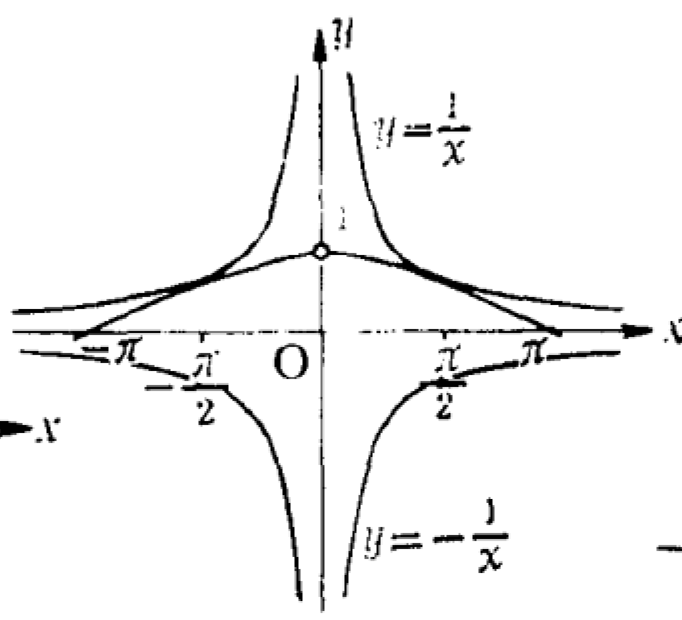


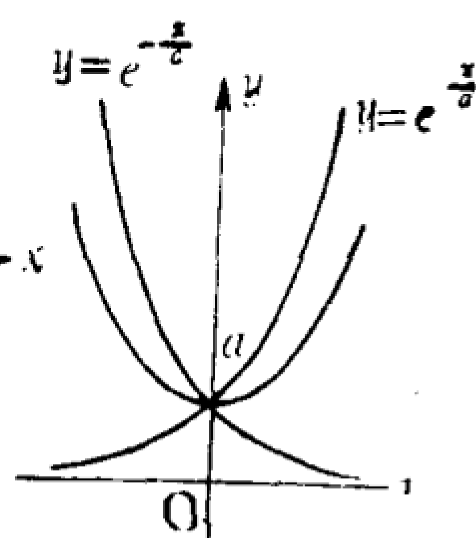
图 11-40

(33) $y=\ln x$　　(34) $y=\frac{\sin x}{x}$　$(-\pi<x<0,\quad 0<x<\pi)$

(35) $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{\frac{x}{a}}(a>0)$







对数曲线

图11-41

图11-42

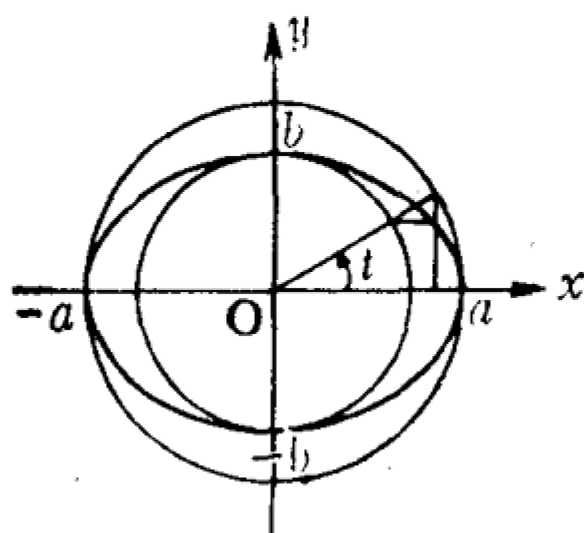
悬垂线

图11-43

7.5 用参数表示的常用曲线的形状

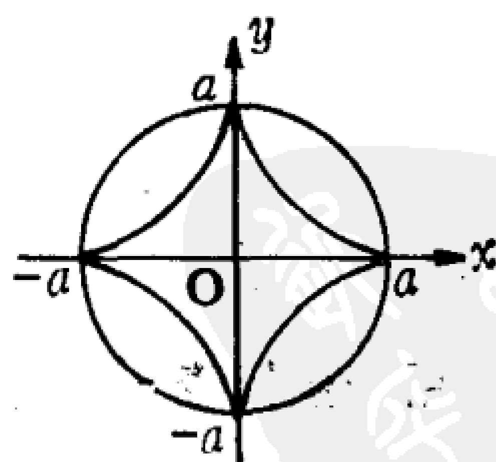
见图11-44至图11-48

(1) $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ $(a>0,\ b>0)$　　(2) $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $(a>0)$



椭圆

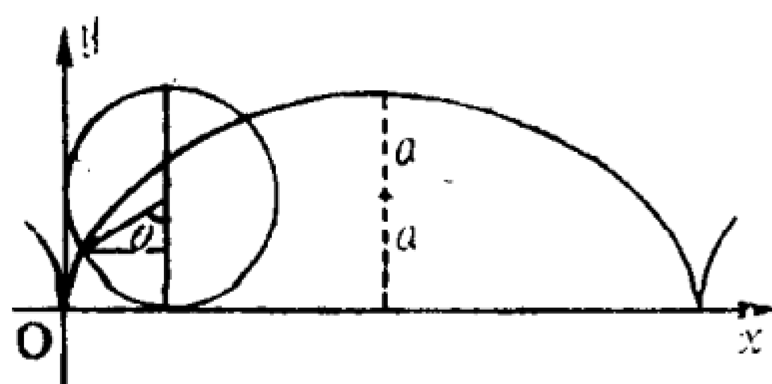
图11-44

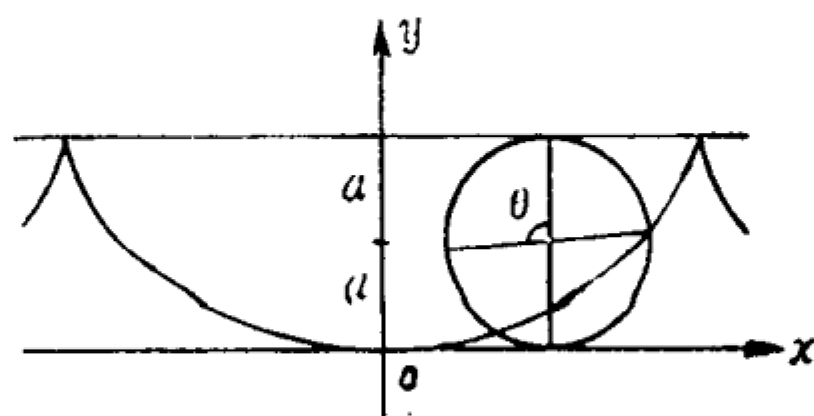


星形线

图11-45

(3) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a>0)$ (4) $\begin{cases} x=a(\theta+\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$ $(a>0)$

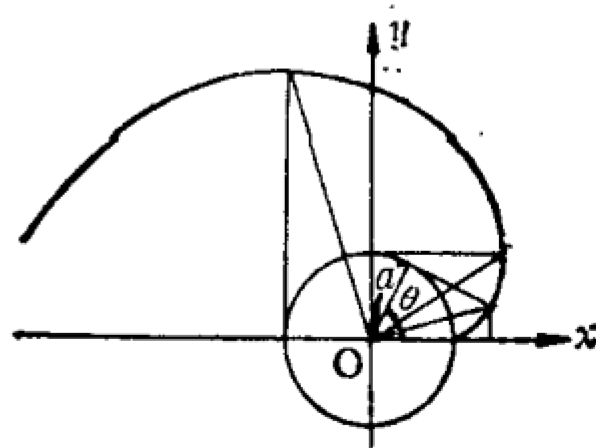




摆 线

图 11-46 图 11-47

(5) $\begin{cases} x=a(\cos\theta+\theta\cdot\sin\theta) \\ y=a(\sin\theta-\theta\cdot\cos\theta) \end{cases}$ $(a>0)$



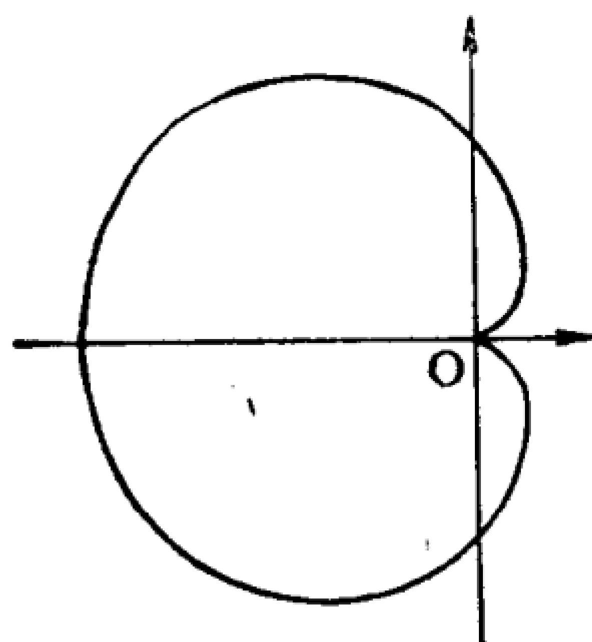
圆的渐开线

图 11-48

7·6 用极坐标表示的常用曲线的形状

见图 11-49 至图 11-62

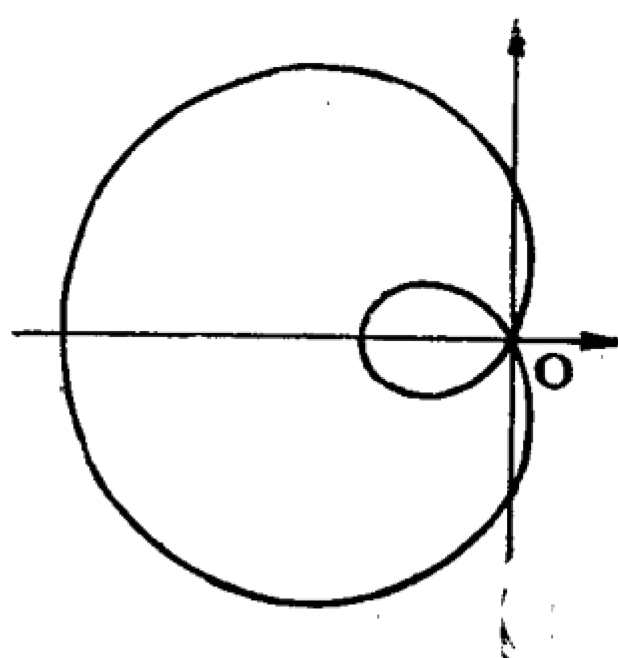
(1) $\rho=a(1-\cos\theta)\quad(a>0)$



心脏线

图 11-49

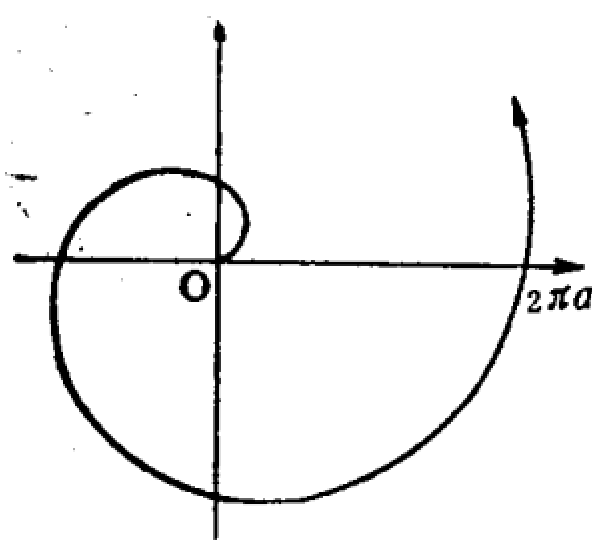
(2) $\rho=b-a\cos\theta\quad(0<b<a)$



蚶线

图 11-50

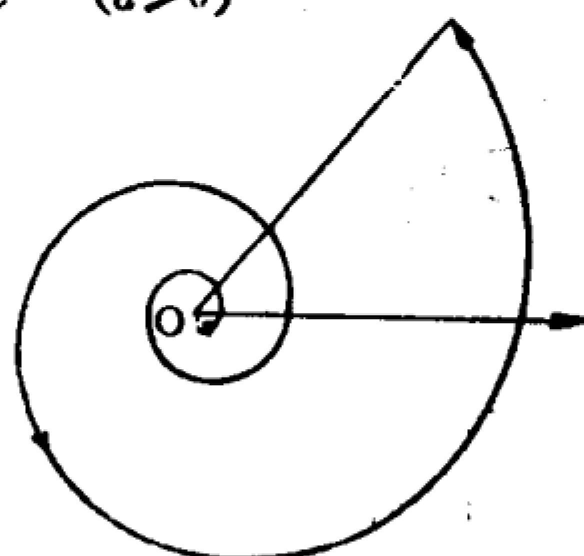
(3) $\rho=a\theta\quad(a>0)$



阿基米德螺线

图 11-51

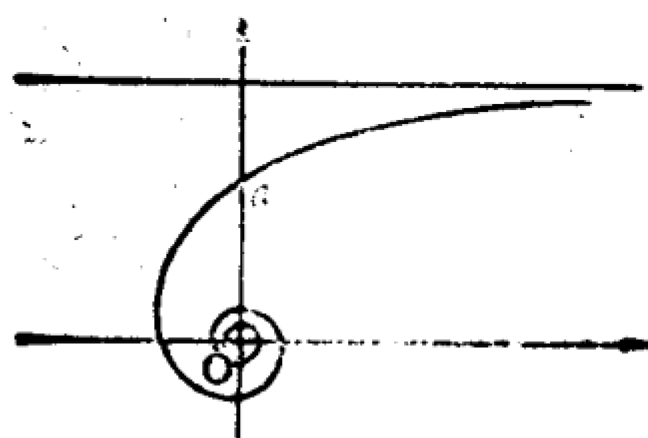
(4) $\rho=e^{a\theta}\quad(a>0)$



对数螺线

图 11-52

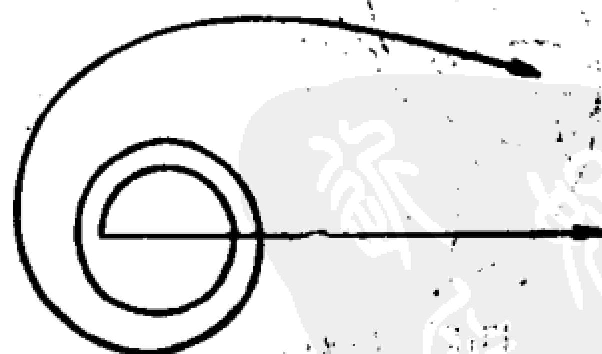
(5) $\rho\theta=a$



双曲螺线

图 11-53

(6) $\rho^2\theta=a^2$

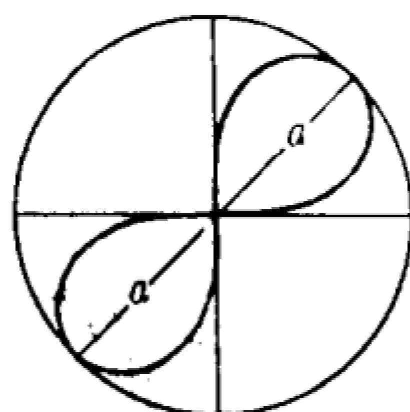


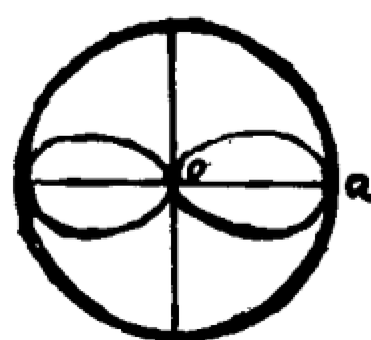
连锁螺线

图 11-54

(7) $\rho^2=a^2\sin 2\theta$

(8) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$





双纽线

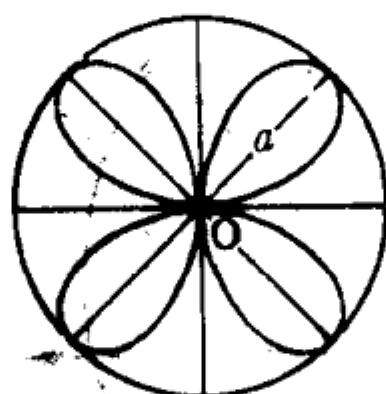
图 11-55

图 11-56

(9) $\rho=a\cdot\sin 2\theta$

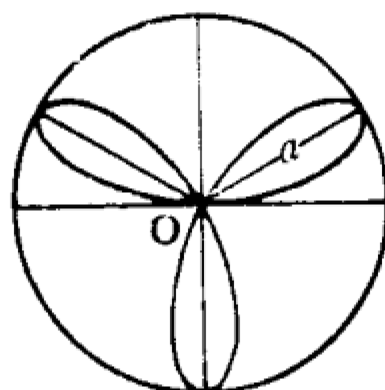
(10) $\rho=a\cdot\sin 3\theta$

(11) $\rho=a\cdot\sin 4\theta$



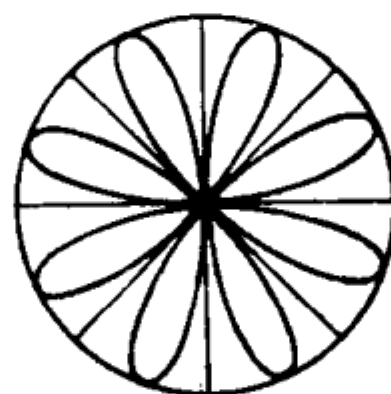
四叶玫瑰线

图 11-57



三叶玫瑰线

图 11-58



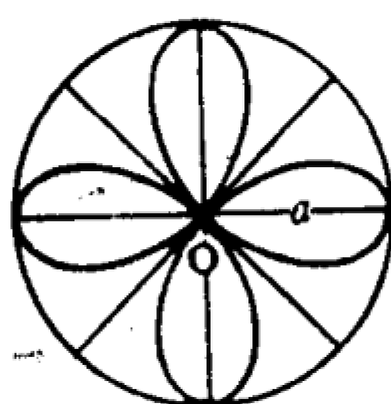
八叶玫瑰线

图 11-59

(12) $\rho=a\cdot\cos 2\theta$

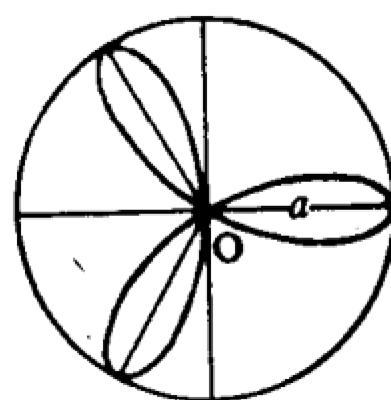
(13) $\rho=a\cdot\cos 3\theta$

(14) $\rho=a\cdot\cos 4\theta$



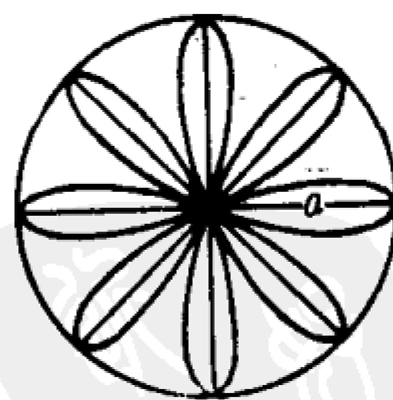
四叶玫瑰线

图 11-60



三叶玫瑰线

图 11-61



八叶玫瑰线

图 11-62

§8．其他应用

8·1　无穷小和无穷大的阶

【定义】1．无穷小　当自变量趋向某一数值（或趋于无穷大）时因变量趋向于0，这个因变量叫做无穷小．设 u 和 v 为两个无穷小，若 $\frac{u}{v}\to 0$，则称 u 是比 v 高阶的无穷小，或 v 是比 u 低阶的无穷小；若 $\frac{u}{v}\to c$ $(c\neq 0)$，则称 u 和 v 是同阶无穷小．又，若 u 和 v^{α} $(\alpha\neq 0)$ 是同阶无穷小，则称 u 是关于 v 的 α 阶无穷小．

例题1． 当 $x\to 0$ 时，x、x^2、$\sqrt{x}$ 分别是 x 的1阶、2阶、$\frac{1}{2}$阶无穷小．

解　证明从略（这是显而易见的）．

例题2． $x\to 0$ 时，$\sin x$、$1-\cos x$ 分别是 x 的1阶、2阶无穷小．

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

例题3． $x\cdot\sin\frac{1}{x}$ 和 $x\cdot\cos\frac{1}{x}$ 都是 $x\to 0$ 时的无穷小，但两者不能比较．

解　因为 $\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，$\left|x\cdot\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，所以当 $x\to 0$ 时，$x\cdot\sin\frac{1}{x}\to 0$，$x\cdot\cos\frac{1}{x}\to 0$．但是，

$$\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x\cdot\cos\frac{1}{x}}=\operatorname{tg}\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时极限不存在，因而两者不能比较．

【定义】2．无穷大　当自变量趋向于某数值（或趋于无穷大）时，因变量趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 或 ∞，这个因变量叫做无穷大．设 u 和 v 是两个无穷大，

若$\frac{u}{v}\to 0$，则称u是比v低阶的无穷大，或v是比u高阶的无穷大；若$\frac{u}{v}\to c(c\neq 0)$，则称$u$和$v$是同阶无穷大。

例题1. 试证当$x\to+\infty$时x^n是比e^x低阶的无穷大。

解 根据后文的洛比达定理(8·7)，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$。一般地，若设$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x}=0$，则必有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{m+1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(m+1)x^m}{e^x}=(m+1)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{e^x}=0.$$

因此，一般地，有$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$成立，即$x^n$是比$e^x$低阶的无穷大。

例题2 试证$\ln x$是比$\sqrt[n]{x}$低阶的无穷大。

解 根据洛比达定理(8·7)，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n}{x^{\frac{1}{n}}}=0$$

成立，即$\ln x$是比$\sqrt[n]{x}$低阶的无穷大。

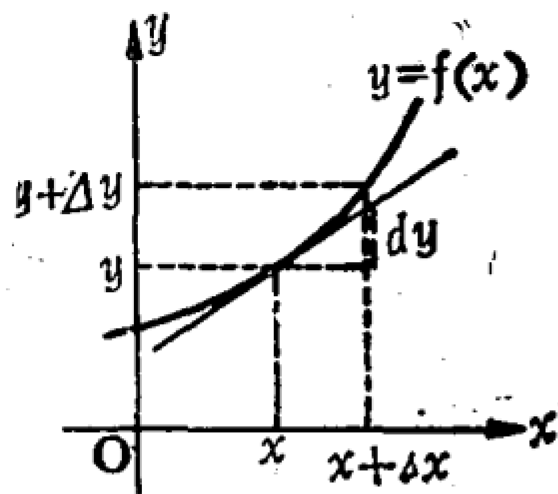


图 11-63

8·2 微　　分

【定义】3. 微分 当函数$f(x)$可导时，对于x的增量Δx，令$dy=f'(x)\cdot\Delta x$，则称dy为$f(x)$的微分。

注意1. 若$f(x)$在$x=a$可导，令$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)+\varepsilon$，则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$成立，即

$$\Delta y=f'(a)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x.$$

式中第二项是比Δx高阶的无穷小，因此dy是Δy的近似值，两者之差是比Δx高阶的无穷小。此外，对于函数$y=x$，$dy=f'(x)\cdot\Delta x=\Delta x$*，故

* 此式应改为$dy=dx=(x)'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$——译注

$y=f(x)$ 的微分可写成 $dy=f'(x)dx$ 的形式，由于 $f'(x)=dy/dx$，故 $f'(x)$又叫做微商(图 11-63)。

注意2. 在函数 $f(x)$ 的微分 $dy=f'(x)\cdot dx$ 中，若 dx 一定，则 dy 为 x 的函数，且得 $\frac{d(dy)}{dx}=f''(x)dx$. 因此 dy 的微分为 $f''(x)(dx)^2$，用 d^2y 表示，叫做 y 的二阶微分。一般，$d^n y=f^{(n)}(x)(dx)^n$，$d^n y$ 叫做 y 的 n 阶微分。

8·3 近似公式和误差

【公式】1. (1) 一级近似式 $f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)$；

(2) 二级近似式 $f(a+h)\approx f(a)+h\cdot f'(a)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(a)$.

例 令 $f(x)=\sqrt{x}$，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$，因此，$a>0$ 时作一级近似式和二级近似式分别得到

一级近似式：$\sqrt{a+h}\approx\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}$；

二级近似式：$\sqrt{a+h}\approx\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}$.

注意 根据泰勒定理(8·10)，$f(x)$与它的一级近似式的差是对于 h 的二阶无穷小，$f(x)$与它的二级近似式的差是对于 h 的三级无穷小.

【定理】1. 如果$f(x)$ 可导，E 为 $f(x)+f'(x)\Delta x$ 作为 $f(x+\Delta x)$ 的近似值的误差，$f'(x)$在闭区间$[x, x+\Delta x]$* 内的最大值和最小值为 G 和 L，则

$$|E|\leqslant(G-L)\cdot|\Delta x|.$$

证明 根据§4【定理】2 的[系]，

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x,\quad 0<\theta<1,$$

$$E=f(x+\Delta x)-[f(x)+f'(x)\cdot\Delta x]$$

$$=\Delta x\cdot[f'(x)+\theta\Delta x)-f'(x)],$$

$$L\leqslant f'(x+\theta\Delta x),\quad G\geqslant f'(x).$$

于是得到 $|f'(x+\theta\Delta x)-f'(x)|\leqslant G-L$，亦即

$$|E|\leqslant(G-L)\Delta x.$$ □

【定理】2. 如果 $f(x)$的 $n+1$阶导数存在，$f(a+h)$ 的其近似值

$$f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

*当$\Delta x<0$时，闭区间为 $[x+\Delta x, x]$——译注

对于 $f(a+h)$ 的误差为 E，且 $|f^{(n+1)}(x)|$ 在 a 和 $a+h$ 之间的值不超过 M，则

$$|E|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|h|^{n+1}.$$

证明　根据泰勒定理(8·10)，

$$E=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),\quad a<c<a-h^{*}$$

故 $$|E|=\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|h|^{n+1}.$$ □

8·4　一次插值法

【公式】2. 设 y_1 和 y_2 分别为对应于 x_1 和 x_2 的 y 的值，则

$$y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x+x_1).$$

注意　在图 11-64 中，已约定用 $\bar{y}$ 代替 y.

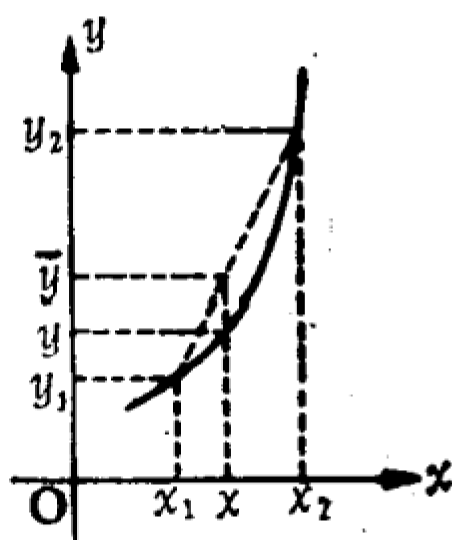


图 11-64

8·5　二次插值法（牛顿公式）：

【公式】3. 令 $x_2=x_1+\Delta x$，$x_3=x_2+\Delta x$，与 x_1、x_2、x_3 对应的 y 值分别为 y_1、y_2、y_3，则

$$y\approx y_1+u\Delta y_1+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_1,\quad u=\frac{x-x_1}{\Delta x}.$$

$$\begin{matrix} x_1 & & \\ & \Delta x & \\ x_2 & & \\ & \Delta x & \\ x_3 & & \end{matrix}\qquad\begin{matrix} y_1 & & \\ & \Delta y_1 & \\ y_2 & & \Delta^2 y_1 \\ & \Delta y_2 & \\ y_3 & & \end{matrix}$$

推导方法　令 $y=a_0+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2)$，分别确定 a_0、a_1、a_2 后再代入上式。

将 $x=x_1$ 代入上式即得到 $a_0=y_1$。其次因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\Big[[a_0+a_1(x+\Delta x-x_1)+a_2(x+\Delta x-x_1)\cdot$$

* 当h<0时，应有a+h<c<a——译注

$$(x+\Delta x-x_2)\Big]-\Big[a_0+a_1(x-x_1)+a_2(x-x_1)(x-x_2)\Big]$$
$$=a_1+2a_2(x-x_1).$$

将 $x=x_1$ 代入上式即得 $a_1=\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_1}$. 另一方面，因 $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_1}$ $=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$，故 $a_1=\frac{\Delta y_1}{\Delta x}$. 进而 $\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=2a_2$，并且

$$\left[\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\right]_{x=x_1}=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x}-\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)=\frac{\Delta^2 y_1}{(\Delta x)^2};$$

所以 $a_2=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_1}{(\Delta x)^2}$

把 a_0，a_1，a_2 代入 y 的上述表达式，从而得到

$$y=y_1+\frac{\Delta y_1}{\Delta x}(x-x_1)+\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 y_1}{(\Delta x)^2}(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\approx y_1+u\Delta y_1+\frac{1}{2}u(u-1)\Delta^2 y_1.$$

8·6 四则运算的误差

分别用 δX、δY、δZ 表示 X、Y、Z 的误差。

(1) $Z=X+Y$ 时，$\delta Z=\delta X+\delta Y$，$|\delta Z|\leqslant|\delta X|+|\delta Y|$;

(2) $Z=X-Y$ 时，$\delta Z=\delta X-\delta Y$，$|\delta Z|\leqslant|\delta X|+|\delta Y|$;

(3) $Z=XY$ 时，$\frac{\delta Z}{Z}=\frac{\delta X}{X}+\frac{\Delta Y}{Y}$，$\left|\frac{\delta Z}{Z}\right|\leqslant\left|\frac{\delta X}{X}\right|+\left|\frac{\delta Y}{Y}\right|$;

(4) $Z=\frac{X}{Y}$ 时，$\frac{\delta Z}{Z}=\frac{\delta X}{X}-\frac{\delta Y}{Y}$，$\left|\frac{\delta Z}{Z}\right|\leqslant\left|\frac{\delta X}{X}\right|+\left|\frac{\delta Y}{Y}\right|$.

推导方法 设 X_0、Y_0、Z_0 分别为 X、Y、Z 的真值，于是有 $X=X_0+\delta X$，$Y=Y_0+\delta Y$，$Z=Z_0+\delta Z$.

(1) $\delta Z=Z-Z_0=(X+Y)-(X_0+Y_0)=\delta X+\delta Y$,

因此 $|\delta Z|=|\delta X+\delta Y|\leqslant|\delta X|+|\delta Y|$.

(2) $\delta Z=Z-Z_0=(X-Y)-(X_0-Y_0)=\delta X-\delta Y$,

因此 $|\delta Z|=|\delta X-\delta Y|\leqslant|\delta X|+|\delta Y|$.

(3) $\delta Z=Z-Z_0=XY-X_0Y_0=XY-(X-\delta X)(Y-\delta Y)$
$\approx Y\cdot\delta X+X\cdot\delta Y$,

因此 $\frac{\delta Z}{Z}\approx\frac{Y\cdot\delta X+X\cdot\delta Y}{XY}=\frac{\delta X}{X}+\frac{\delta Y}{Y}$,

即 $\left|\frac{\delta Z}{Z}\right|=\left|\frac{\delta Y}{X}+\frac{\delta X}{Y}\right|\leqslant\left|\frac{\delta X}{X}\right|+\left|\frac{\delta Y}{Y}\right|$

(4) $\delta Z=Z-Z_0=\frac{X}{Y}-\frac{X_0}{Y_0}=\frac{X(Y-\delta Y)-Y(X-\delta X)}{YY_0}$

$$=\frac{Y\cdot\delta X-X\cdot\delta Y}{YY_0},$$

$$\frac{\delta Z}{Z}=\frac{Y\cdot\delta X-X\cdot\delta Y}{YY_0}\cdot\frac{Y}{X}=\frac{Y\cdot\delta X-X\cdot\delta Y}{XY_0}$$

这里因 $Y_0\approx Y$，所以

$$\frac{\delta Z}{Z}\approx\frac{Y\cdot\delta X-X\cdot\delta Y}{XY}=\frac{\delta X}{X}-\frac{\delta Y}{Y}.$$

因此 $\left|\frac{\delta Z}{Z}\right|=\left|\frac{\delta X}{X}-\frac{\delta Y}{Y}\right|\leqslant\left|\frac{\delta X}{X}\right|+\left|\frac{\delta Y}{Y}\right|.$

注意 二元函数 $Z=f(X,\ Y)$的泰勒定理为

$$f(X+\delta X,\ Y+\delta Y)=f(X,\ Y)+\left(\delta X\cdot\frac{a}{ax}+\delta Y\frac{a}{aY}\right)f(x,y)$$

$$+\left(\delta X\cdot\frac{a}{aX}+\delta Y\cdot\frac{a}{aY}\right)^2 f(X,\ Y)+\cdots\cdots$$

略去第三项后面的项，得到 $\delta Z=\frac{af}{aX}\cdot\delta X+\frac{af}{aY}\cdot\delta Y$，于是

(1) $Z=X+Y$ 时，因 $\frac{af}{aX}=1$， $\frac{af}{aY}=1$，则 $\delta Z=\delta X+\delta Y$；

(2) $Z=X-Y$ 时，因 $\frac{af}{aX}=1$， $\frac{af}{aY}=-1$，则 $\delta Z=\delta X-\delta Y$；

(3) $Z=XY$ 时，因 $\frac{af}{aX}=Y$， $\frac{af}{aY}=X$，则 $\delta Z=Y\cdot\delta X+X\cdot\delta Y$；

(4) $Z=\frac{X}{Y}$ 时，因 $\frac{af}{aX}=\frac{1}{Y}$， $\frac{af}{aY}=-\frac{X}{Y^2}$，则 $\delta Z=\frac{1}{Y}\delta X$

$$-\frac{X}{Y^2}\delta Y=\frac{Y\cdot\delta X-X\cdot\delta Y}{Y^2}.$$

8·7 洛比达定理

【定理】3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 (a, b) 可导且

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0,\ \lim_{x\to a+0} g(x)=0,\ g'(x)\neq 0$$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为有限值 l，则 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，且

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=l;$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$；

(3) 若 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

另外，在以上命题中，若把 $x\to a+0$ 换成 $x\to b-0$，所得命题仍然成立。

证明 (1) 因 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$，对于任何大于零的 ε，总存在一适当的 $\delta>0$，对于满足 $a<c<a+\delta<b$ 的 c，$\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$ 恒成立。根据§4.【定理】4 的【系】，对于满足 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，总有 c 存在，使 $\dfrac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$，且 $x<c<x'$. 因此，对于满足 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，$\left|\dfrac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}-l\right|<\varepsilon$ 成立。这时若先固定 x' 并使 $x\to a+0$，则从 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$ 得知，对于满足 $a<x'<a+\delta$ 的 x'，$\left|\dfrac{f(x')}{g(x')}-l\right|\leqslant\varepsilon$ 成立，

因此，$\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

(2) 因 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，对任何大于零的 G 总存在一适当的 $\delta>0$，使之对于满足 $a<c<a+\delta<b$ 的 c 恒有 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}>G$. 根据§4.【定理】4 的【系】，对于满足 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，总存在 c，满足

$\dfrac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$，且 $x<c<x'$，所以对于满足 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，$\dfrac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}>G$ 成立．这里若固定 x' 并使 $x\to a+0$，根据

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=0,\ \lim_{x\to a+0}g(x)=0.$$

则对于 $a<x'<a+\delta$ 的 x' 有 $\dfrac{f(x')}{g(x')}\geqslant G$，因此

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

(3) 在刚才(2)的证明中，若将"$>G$"的地方换成"$<-G$"，"$\geqslant G$"的地方换成"$\leqslant -G$"，即得所要证明的结果

在以上证明中，若将"$a<c<a+\delta<b$"换成"$a<b-\delta<c<b$"，"$a<x<x'<a+\delta$"换成"$b-\delta<x'<x<b$"，"$a<x'<a+\delta$"换成"$b-\delta<x'<b$"，"$x\to a+0$"换成"$x\to b-0$"，便可得到关于"$x\to b-0$"的命题的证明． □

【系】1． 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 $(-\infty,\ b)$ 上可导，且

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to-\infty}g(x)=0,\ g'(x)\neq0,$$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，等于有限值 l，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$，

(3) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$．

证明 令 $F(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$，$G(t)=g\left(\dfrac{1}{t}\right)$，则存在 a 使 $F(t)$ 和 $G(t)$ 在 $(a,\ 0)$ 内均可导，同时还有 $\lim\limits_{t\to-0}F(t)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{t\to-0}G(t)=\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$，$G'(t)=-\dfrac{1}{t^2}\cdot g'\left(\dfrac{1}{t}\right)\neq0$．而且

$$\lim_{t\to-0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to-0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

根据【定理】3，在本系(1)、(2)、(3)的情况下，因为$\lim\limits_{t\to-0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to-0}\frac{F'(t)}{G'(t)}$，所以$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to-0}\frac{F(t)}{G(t)}$，由此可得所求证的结果.

【系】2 设$f(x)$和$g(x)$在开区间$(a, +\infty)$上可导，且有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，$g'(x)\neq0$，

(1) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，等于有限值$l$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$也存在，而且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$;

(2) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$;

(3) 若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

证明 令$F(t)=f(-t)$，$G(t)=g(-t)$，$F(t)$和$G(t)$在$(-\infty, -a)$上均有导数，同时下列等式成立.

$$\lim_{t\to-\infty}F(t)=\lim_{t\to-\infty}f(-t)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0;$$
$$\lim_{t\to-\infty}G(t)=\lim_{t\to-\infty}g(-t)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0;$$

$G'(t)=-g'(-t)\neq0$. 而且

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-f'(-t)}{-g'(-t)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

根据【定理】3的【系】(1)、(2)、(3)，因为，$\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{F'(t)}{G'(t)}$，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{F(t)}{G(t)}$，由此得证，□

【定理】4. 设$f(x)$和$g(x)$在开区间(a, b)可导，且有$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$，$g'(x)\neq0$.

(1) 若$\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，等于有限值$l$，则$\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$也存在，

且 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$。

又，将以上命题中的"$x\to a+0$"换成"$x\to b-0$"该命题仍然成立。

证明 (1) 因 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$，故对于任何大于零的 ε，总可取一适当的大于零的 δ 值，使之对于满足 $a<c<a+\delta<b$ 的 c，恒有 $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$ 成立。根据§4.【定理】4的【系】，对于满足条件 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，总存在 c，使 $\dfrac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ 成立，且满足 $x<c<x'$。因此，对于这样的 x 和 x'，下式成立

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

即 $|f(x')-f(x)-l\cdot g(x')+l\cdot g(x)|<\varepsilon\cdot|g(x')-g(x)|$. 又因

$$|f(x)-l\cdot g(x)|-|f(x')-l\cdot g(x')|\leqslant|f(x)-l\cdot g(x)-f(x')+l\cdot g(x')|<\varepsilon\cdot|g(x')-g(x)|.$$

故
$$\begin{aligned}|f(x)-l\cdot g(x)|&<|f(x')-l\cdot g(x')|+\varepsilon\cdot|g(x')-g(x)|\\&\leqslant|f(x')|+|l\cdot g(x')|+\varepsilon\cdot|g(x')|+\varepsilon\cdot|g(x)|.\end{aligned}$$

可设 $g(x)\neq0$，上式用 $|g(x)|$ 除之，得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\left|\frac{f(x')}{g(x)}\right|+\left|\frac{g(x')}{g(x)}\cdot l\right|+\varepsilon+\varepsilon\cdot\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right|.$$

这里使 x' 固定而使 x 充分接近 a，则因

$$\left|\frac{f(x')}{g(x)}\right|<\varepsilon,\quad\left|\frac{g(x')}{g(x)}\cdot l\right|<\varepsilon,\quad\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right|<1,$$

得到
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<4\varepsilon.$$

因此，
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

(2) 因 $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，故对于任何 $G>0$，总存在适当的 $\delta>0$，

使之对于满足 $a<c<a+\delta<b$ 的 c，恒有 $\frac{f'(c)}{g'(c)}>2G$，根据§4.【定理】4 的【系】，对于满足条件 $a<x<x'<a+\delta$ 的 x 和 x'，总可找到一个 c：$x<c<x'$，使 $\frac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ 成立．因此对这样的 x 和 x'，由于 $\frac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)}>2G$，所以

$$|f(x')-f(x)|>2G\cdot|g(x')-g(x)|=2G|g(x)-g(x')|.$$

进而得到

$$|f(x')|+|f(x)|\geqslant|f(x')-f(x)|>2G\cdot|g(x)-g(x')|$$
$$\geqslant 2G|g(x)|-2G|g(x')|.$$

可设 $g(x)\neq0$，并用 $|g(x)|$ 除之，则得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|>2G-2G\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right|-\left|\frac{f(x')}{g(x)}\right|.$$

这里使 x' 固定而使 x 趋近 a，因为

$$\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right|<\frac{1}{4},\quad\left|\frac{f(x')}{g(x)}\right|<\frac{G}{2},$$

所以 $$2G\cdot\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right|+\left|\frac{f(x')}{g(x)}\right|<\frac{G}{2}+\frac{G}{2}=G,$$

于是得到 $$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|>G.$$

可设 $f(x)>0$，$g(x)>0$，进而得到

$$\frac{f(x)}{g(x)}>G,\ \text{即}\ \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

在以上证明中，如果把"$x<c<a+\delta<b$"换成"$a<b-\delta<c<b$"，把"$a<x<x'<a+\delta$"换成"$b-\delta<x'<x<b$"，把"$x\to a+0$"换成"$x\to b-0$"，则可得把 $x\to a+0$ 换成 $x\to b-0$ 后的命题的证明．□

【系】1．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 $(-\infty,b)$ 可导，且 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\infty$，$g'(x)\neq0$，

(1) 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，等于有限值 l，则 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，且

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

证明 令 $F(t)=f(\frac{1}{t})$，$G(t)=g(\frac{1}{t})$，则有 a 存在使 $F(t)$ 和 $G(t)$ 在 $(a, 0)$ 内有导数，且下列式子成立：

$$\lim_{t\to-0}F(t)=\lim_{t\to-0}f(\frac{1}{t})=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty,$$

$$\lim_{t\to-0}G(t)=\lim_{t\to-0}g(\frac{1}{t})=\lim_{x\to-\infty}g(x)=\infty,$$

$$G'(t)=-\frac{1}{t^2}g'(\frac{1}{t})\neq0.$$

而且，

$$\lim_{t\to-0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to-0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2}g'(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to-0}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

根据【定理】4 (1)和(2)，$\lim\limits_{t\to-0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to-0}\frac{F'(t)}{G'(t)}$成立，所以得到

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to-0}\frac{F(t)}{G(t)}.$$ □

由此可得最后结果，

【系】2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在开区间 $(a, +\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$，$g'(x)\neq0$，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在，等于有限值 l，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

证明 令 $F(t)=f(-t)$，$G(t)=g(-t)$，则 $F(t)$和 $G(t)$ 在$(-\infty, -a)$可导，而且下列式子成立，

$$\lim_{t\to-\infty} F(t)=\lim_{t\to-\infty} f(-t)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{t\to-\infty} G(t)=\lim_{t\to-\infty} g(-t)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\infty,$$

$$G'(t)=-g'(-t)\neq 0.$$

而且

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-f'(-t)}{-g'(-t)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f'(t)}{g'(-t)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

根据上面系 1，由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim\limits_{t\to-\infty}\frac{F'(t)}{G'(t)}$ 成立，所以得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to-\infty}\frac{F(t)}{G(t)}.$$

由此可得证 □

例题1. 试求 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}(x^3-1)=0$，$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，$f'(x)=(x^3-1)'=3x^2$，$g'(x)=(x-1)'=1(\neq0)$，所以

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to1}3x^2=3.$$

例题2. 试求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$，$n$ 为正整数。

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$，$(x)'=1(\neq0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$， 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

通常设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=+\infty$ 成立，则

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x^{m+1}=\infty,\quad (x^{m+1})'=(m+1)x^m(\neq0).$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^{m+1})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{m+1}\cdot\frac{e^x}{x^m}=+\infty.$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{m+1}}=\infty$.

即对一切正整数都有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty.$$

8·8　不定型的极限值

(1) 欲求$\frac{0}{0}$型的函数$\frac{f(x)}{g(x)}$极限，等于求$\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限（如果它存在）；若此结果仍为不定型，可以再求$\frac{f''(x)}{g''(x)}$的极限。……

(2) 欲求$\frac{\infty}{\infty}$型的函数$\frac{f(x)}{g(x)}$极限，等于求$\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限（如果它存在）；若此结果仍为不定型，可以再求$\frac{f''(x)}{g''(x)}$的极限。……

(3) 欲求 $0\cdot\infty$ 型的函数 $f(x)\cdot g(x)$ 的极限，可将其变换成$\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$或$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$而作为$\frac{\infty}{\infty}$型或$\frac{0}{0}$型来处理。

(4) 欲求 $\infty-\infty$ 型的函数 $f(x)-g(x)$ 极限，可将其变换成$\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$而作为$\frac{0}{0}$型来处理。

(5) 欲求∞^0 型、0^0 型或1^∞型的函数 $f(x)^{g(x)}$ 极限，均可变这函数为$e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$来处理。

例题1．试求 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$.

解　因$x\cdot\ln x=\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}$，故化为$\frac{\infty}{\infty}$型，

$$\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x,\text{ 故}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=0,\text{ 即 }\lim_{x\to+0}x\cdot\ln x=0$$

例题2. 试求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解 $$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x}\cdot\ln x}=\frac{\ln x-1+\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}$$

$$\frac{\left(\ln x-1+\frac{1}{x}\right)'}{\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x\right]'}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{x-1}{x-1+\ln x}$$

此结果仍为不定式，再求导一次，

$$\frac{(x-1)'}{(x-1+\ln x)'}=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}=\frac{x}{x+1}.$$

因 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$

例题3. 试求 $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

解 $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$为$\infty^0$不定型，故可变形为

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}，\text{而 } x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

为$0\cdot\infty$不定型，进而再变形为

$$x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}，\text{此为}\frac{\infty}{\infty}\text{型。}$$

$$\frac{\left[\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2x}{x+2}.$$

因 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{2x}{x+2}=0$，故 $\lim\limits_{x\to+0}x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=0$，

即 $\lim\limits_{x\to+0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^0=1$。

例题4. 试求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$。

解 因$(1+x)^{\frac{1}{x}}-e=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e$，故

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

将上式中第二个因子的分子分母分别求导，

$$[x-(1+x)\cdot\ln(1+x)]'=1-\ln(1+x)-1=-\ln(1+x),$$

$$[x^2(1+x)]'=2x+3x^2.$$

它们组成的分式仍为不定型，再将它们分别求导，

$$[-\ln(1+x)]'=-\frac{1}{1+x},$$

$$(2x+3x^2)'=2+6x.$$

因 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[-\ln(1+x)]'}{(2x+3x^2)'}=-\frac{1}{2}$，

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{1}{2}$。

另一方面，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，

从以上两方面的结果得到

$$\lim_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'=-\frac{1}{2}e.$$

所以 $$\lim_{x\to0}\frac{[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e]'}{(x)'}=-\frac{1}{2}e.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\dfrac{1}{2}e$.

例题5. 试求 $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\sin x}$.

解 $(\sin x)^{\sin x}=e^{\sin x\,(\ln\sin x)}$,

$$\sin x\cdot\ln(\sin x)=\frac{\ln(\sin x)}{\dfrac{1}{\sin x}},$$

$$\frac{[\ln(\sin x)]'}{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'}=\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}=(-\sin x)\to 0\ (\text{当}x\to+0),$$

故 $\lim\limits_{x\to+0}(\sin x)^{\sin x}=e^0=1$.

8·9 求近似根的牛顿法

设函数 $f(x)$在开区间$(a,\ b)$内连续可导，$f(x)=0$ 在闭区间 $[a,b]$ 内有根 x_0. 设 $x_1\in[a,\ b]$为 x_0 的一个近似值，则由

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},\quad x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)},\quad\cdots\cdots,\quad x_{n+1}=$$

$$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad\cdots\cdots;$$

组成数列$\{x_n\}$，这个 x_n 就叫做牛顿(第 n 次)近似根.

【定理】6. 设$f(x)$ 在开区间$(a,\ b)$内有二阶导数，且$f''(x)$ 具有确定的符号. α 为区间内一点，即 $\alpha\in(a,\ b)$，x_1 位于 x_0 与 α 之间，若$f(x)$ 在 x_0 与 α 之间的值与 $f''(x)$同号，则数列$\{x_n\}$收敛于 x_0.

证明 根据泰勒定理(8·10)，使

$$f(x_0)=f(x_1)+(x_0-x_1)\cdot f'(x_1)+\frac{(x_0-x_1)^2}{2}f''(c)$$

成立 的 c 位于 x_0 和 x_1 之间. 因为 $f(x_0)=0$，故有

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}+x_0-x_1+\frac{f''(c)}{2\cdot f'(x_1)}(x_0-x_1)^2=0.$$

即 $x_0-x_2=-\dfrac{f''(c)}{2\cdot f'(x_1)}(x_0-x_1)^2$.

因此 $(x_0-x_2)(x_2-x_1)=\dfrac{f(x_1)\cdot f''(c)}{2f'(x_1)^2}(x_0-x_1)^2$.

由于 $f(x_1)$和 $f''(x)$同号，故知 x_2 位于 x_0 和 x_1 之间。同理，一般地 x_n 位于 x_0 和 x_{n-1} 之间。故知 $\{x_n\}$ 为单调有界数列，即收敛于一个数α。

这时，因为 $f'(x)$和 $f(x)$连续，故由 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，知

$$\alpha=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

即当 $f(\alpha)=0$，数列 $\{x_n\}$ 收敛于根α. □

例题 试从 $x_1=1.5$ 开始，求 $x^2-2=0$ 的近似根。

解 令 $f(x)=x^2-2$，则 $f'(x)=2x$，$f''(x)=2(>0)$，$f(1.5)=0.25$ (>0)，从而得知牛顿近似根收敛于 $f(x)=0$ 的根。计算前几项得到

$$x_1=1.5,$$

$$x_2=1.5-\frac{f(1.5)}{f'(1.5)}=1.5-\frac{0.25}{3}=1.416,$$

$$x_3=1.416-\frac{f(1.416)}{f'(1.416)}=1.416-\frac{0.005056}{2.832}=1.41422.$$

8.10 泰勒展开式·马克劳林展开式及其余项形式

【定理】6.（泰勒定理） 设 $f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(n-1)}(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，而 $f^{(n)}(x)$在开区间(a,b)内存在，则存在 c 使下式成立，

$$f(b)=f(a)+(b-a)\cdot f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}\cdot f''(a)+\cdots\cdots+$$

$$\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)+R_n.$$

$$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),\quad a<c<b.$$

证明 令 $\Psi(x)=(b-x)^n$,

$$\varphi(x)=f(b)-[f(x)+(b-x)\cdot f'(x)+\frac{(b-x)^2}{2!}\cdot f''(x)+$$

$$\cdots\cdots+\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x)],$$

则 $\varphi(x)$和 $\Psi(x)$均在$[a,\ b]$上连续，在$(a,\ b)$内可导，$\Psi'(x)$在$(a,\ b)$内

不为零。根据§4.【定理】4的【系】，存在 c，它使下式成立，

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\Psi(b)-\Psi(a)}=\frac{\varphi'(c)}{\Psi'(c)},\quad a<c<b.$$

于是

$$\varphi(b)=0,\quad \varphi'(x)=-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x),$$

$$\Psi(b)=0,\quad \Psi'(x)=-n(b-x)^{n-1}.$$

由此，

$$\frac{\varphi'(c)}{\Psi'(c)}=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

最后得到 $\varphi(a)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\Psi(a)=R_n.$

即 $$R_n=\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c),\quad a<c<b$$ □

注意1. 用同样的假设条件下，可以证明存在 c，使下式成立

$$f(a)=f(b)+(a-b)\cdot f'(b)+\frac{(a-b)^2}{2!}\cdot f''(b)+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{(a-b)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(b)+R_n,$$

$$R_n=\frac{(a-b)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(c),\qquad a<c<b.$$

证明 令 $\Psi(x)=(a-x)^n$,

$$\varphi(x)=f(a)-\Big[f(x)+(a-x)\cdot f'(x)+\frac{(a-x)^2}{2!}\cdot f''(x)+$$

$$\cdots\cdots+\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(x)\Big]$$

其余步骤仿上，便可证得该结果。 □

注意2. 设 $f(x)$，$f'(x)$，…，$f^{(n-1)}(x)$在点 x 附近连续，$f^{(n)}(x)$在点x附近存在，则使下式成立的 θ 是存在的，

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\cdot$$

$$f^{(n-1)}(x)+R_n.$$

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\quad 0<\theta<1.$$

特别是当 $x=0$ 时(并把 h 改作 x)，便得到所谓马克劳林展开式：

$$f(x)=f(0)+x\cdot f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\cdot x^n,\quad 0<\theta<1\ \text{（马克劳林展开式）。}$$

证明 (1)根据【定理】6，满足 $R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(c)$ 和 $x<c<x+h$ 的 c 是存在的。若令 $\theta=\frac{c-x}{h}$，则得到前一式。使 $x=0$ 并重新将 h 改写成 x 便得到后一式。

注意3、R_n 可以表示成下列各形式：

(1) $R_n=\frac{1}{n!}(b-a)^n\cdot f^{(n)}[a+\theta(b-a)]$，　$0<\theta<1$ （拉格朗日型余项）；

(2) $R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!m}(b-a)^m(b-c)^{n-m}$ （施勒密赫型余项）；

(3) $R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-a)(b-c)^{n-1}$ （柯西型余项）。

证明 (1) 将【定理】6 余项 R_n 中的 $c(a<c<b)$ 换为 $\theta\left(\text{令}\frac{c-a}{b-a}=\theta\right)$ 表示就行了。

(2) 在【定理】6的证明中如果 $\Psi(x)$ 取为 $(b-x)^m$，则

$$R_n=\frac{\varphi'(c)}{\Psi'(c)}\Psi(a)=\frac{-\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(c)}{-m(b-c)^{m-1}}(b-a)^m$$

$$=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!m}(b-a)^m(b-c)^{n-m}.$$

(3) 在(2)中令 $m=1$ 即得.

【1】常用函数的展开式

(1) $(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+$

$$\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

(2) $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots\cdots$

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}+\cdots\cdots$

(4) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots\cdots$

$(-1<x<1)$

(6) $\sin^{-1}x=x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\times3}{2\times4}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\cdots\cdots+$

$$\frac{1\times3\times\cdots\times(2m-1)}{2\times4\times\cdots\times(2m)}\cdot\frac{x^{2m+1}}{2m+1}+\cdots\cdots(-1<x<1)$$

(7) $\operatorname{tg}^{-1}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^m\dfrac{x^{2m+1}}{2m+1}+\cdots\cdots$

$(-1<x\leqslant1)$.

证明 (1) 根据6·1【公式】(1), $y=(1+x)^\alpha$ 时,

$y^{(n)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)\cdot(1+x)^{\alpha-n}$.

因此 $y^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)$.

(2) 根据6·1【公式】(2), $y=\sin x$ 时 $y\quad=\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

因此, $y^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2m\text{ 时}),\\(-1)^m & (n=2m+1\text{ 时}).\end{cases}$

(3) 根据6.1【公式】(3), $y=\cos x$ 时 $y\quad=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

因此, $y\quad(0)=\cos\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m & (n=2m\text{ 时}),\\0 & (n=2m+1\text{ 时}).\end{cases}$

(4) 根据6.1【公式】(5), $x=e^x$ 时 $y\quad=e^x$,

因此, $y\quad(0)=1$.

(5) 根据6.1【公式】(6), $y=\ln(1+x)$时, $y\quad=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

因此, $y^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$.

(6) 根据6.2例题4, $y^{(2m)}(0)=0$, $y^{(2m+1)}(0)=1^2\cdot3^2\cdots\cdots(2m-1)^2$.

(7) 根据6.1公式(8)，$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y.\sin(y+\frac{\pi}{2})$.

因此，$y^{(n)}(0)=(n-1)!\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2m\text{ 时}),\\ (-1)^m(n-1)! & (n=2m+1\text{ 时}).\end{cases}$

【2】展开式的近似值和误差 请参考8.3的【定理】2.

8·11幂级数的逐项微分法

【定理】7. 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$|x|<r$在内有定义，则逐项微分后的级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$也在$|x|<r$内收敛. 设新得的函数为$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}na_n x^{n-1}$，则$f(x)$在$|x|<r$内可导且$f'(x)=g(x)$.

例题 级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$在$-1<x<1$内收敛于函数$\frac{1}{1-x}$. 将级数逐项微分后所得的新级数$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots$在$-1<x<1$内也收敛，此新级数所表示的函数为$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$.

即 $$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

由此进而得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

(只要x满足条件$-r<x<r$，对幂级数可微分任意次，为了求高阶导数，只要逐项微分即可.

8·12 偏导数

【1】 多元函数及其极限与连续性

【定义】4. 现考虑平面上的点集. 以P点为圆心，$\varepsilon(\varepsilon>0)$为半径的圆内所有点的集合叫做$P$点的$\varepsilon$**邻域**. 设$M$为一个集合，点$P\in M$，取$P$的适当的$\varepsilon$邻域，若它包含在$M$中，则把$P$点叫做$M$的内点. 集合$M$的每一点都是内点时，$M$叫做开集合(如圆和椭圆的内部都是开集合). 开集合D中任意两点都可用有限条线段组成的折线连起来，而折线上的所有点都

属于 M 时，这样的开集合 D 叫做**区域**．

【定义】5．设 D 为一区域，D 中任意一点的坐标为 (x, y)，若对于这个实数对 x、y 有唯一的一个实数 Z 与之对应，则把 **Z 叫做变量 x 和 y 的函数**，用 $Z=f(x, y)$ 表示．**D 叫做它的定义域**．当 $(a, b)\in D$ 时，$f(x, y)$ 在点 (a, b) 的值用 $f(a, b)$ 表示．

例　$Z=f(x, y)=x^2+y^2$，这是在整个平面上都有定义的二元函数．特别地，$f(0,0)=0^2+0^2=0$，$f(1, 2)=1^2+2^2=5$，等等．

【定义】6．二元函数的极限　设 $f(x, y)$ 是在区域 D 内有定义的二元函数，$(a, b)\in D$．A 是一个定数．若对于任何正数 ε，总可以确定一适当正数 δ，对于满足

$$0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2$$

的所有点 (x, y)，恒有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$ 成立，则把 A 叫做函数 $f(x, y)$ 在 $x\to a$，$y\to b$ 即 $(x, y)\to(a, b)$ 时的极限，用 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to b}} f(x, y)=A$ 表示．

例1．$f(x, y)=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$，因为 $|f(x, y)-0|=|x|$，对于满足 $0<x^2+y^2<\varepsilon^2$ 的点 (x, y) 恒有 $|f(x, y)-0|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}=0.$$

例2．$f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，在直线 $y=kx$ 上，因为 $f(x, y)=\dfrac{k}{1+k^2}$，所以无论 δ 取得多么小，在 $0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2$ 所决定的圆内，函数都可以取各种各样的值，也就是说，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} f(x, y)$ 不存在．而且，由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)=0$，$\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)=0$，下式成立：

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x, y)]=\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x, y)].$$

【定义】7．二元函数的连续性　设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内有定义，$(a, b)\in D$，若对于任何正数 ε 总可确定一个适当的正数 δ，若对所有满足 $|x-a|<\delta$，$|y-b|<\delta$ 的点 (x, y) 恒有 $|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 是连续的．若 $f(x, y)$ 在 D 的所有点连续，则说它在 D 连续．

例　$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2} & (x, y)\neq(0, 0)\\ 0, & (x, y)=(0, 0)\end{cases}$

在整个平面上连续，但

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,\ y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,\ y)=(0,\ 0)\end{cases}$$

在(0, 0)不连续.

【2】 偏导数的意义

【定义】8. 偏导数 设 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上有定义，且 $(a,\ b)\in D$，对 $f(x,\ y)$ 如果令 $y=a$(常数) 来考虑 $f(x,\ b)$，则它只是 x 的一元函数. 若 $f(x,\ b)$ 在 $x=a$ 处的导数存在，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

则把它叫做函数 $f(x,\ y)$ 在点 $(a,\ b)$ 对 x 的偏导数，用 $f_x(a,\ b)$ 表示. 如果令 $x=a$(常数)来考虑 $f(a,\ y)$，则它只是 y 的一元函数. 若 $f(a,\ y)$ 在 $y=b$ 处的导数存在，即

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

则把它叫做函数 $f(x,\ y)$ 在点 (a,b) 对 y 的偏导数，用 $f_y(a,\ b)$ 表示. 当 $f_x(a,\ b)$ 存在时，称 $f(x,\ y)$ 在 (a,b) 点对 x 可偏导，当 $f_y(a,\ b)$ 存在时，称 $f(x,y)$ 在 $(a,\ b)$ 点对 y 可偏导. 若在 D 内每一点 $(x_0,\ y_0)$ 偏导数 $f_x(x_0,\ y_0)$ 都存在，则 $f_x(x,\ y)$ 是在 D 内有定义的函数，叫做 $f(x,\ y)$ 对 x 的一阶编导函数(或偏导数)，也可用 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 表示. 若在 D 内每一点 $(x_0,\ y_0)$ 偏导数 $f_y(x_0,\ y_0)$ 都存在，则 $f_y(x,\ y)$ 是在 D 内有定义的函数，叫做 $f(x,\ y)$ 对 y 的一阶偏导函数(或偏导数)，也可用 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 表示.

例1 $Z=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$ 时，

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

【几何意义】 若把与曲面 $Z=f(x,\ y)$ 在其点 $P(x,\ y,\ z)$ 的一切切线垂

直的直线称为法线，则法线方向余弦的比可用 $f_x(x, y):f_y(x, y):-1$ 表示.

例2. 曲面 $Z=xy$ 上点(x, y, z)处法线方向余弦的比为

$$\frac{\partial Z}{\partial x}:\frac{\partial Z}{\partial y}:-1=y:x:-1.$$

【3】 隐函数的极值与条件极值

【定义】9 隐函数 二变量 x 和 y 之间有关系式 $f(x, y)=0$ 成立时，可以把 $y(x)$ 看成 $x(y)$ 的函数，并称 $y(x)$ 为 $x(y)$ 的隐函数.

注意 在这种情况下，对应于一个 x 值，通常有一个以上的 y 值，所以 y 是 x 的多值函数. 例如 $f(x, y)=y^2-x=0$ 时，$y=\pm\sqrt{x}$，y 是 x 的二值函数.

【定理】8. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义，且有连续偏导数，$(a,b)\in D$. 当 $f(a, b)=0$，$f_y(a, b)\neq 0$ 时，若取一适当的区间 $[a-h, a+h]$，则存在单值连续函数 $y=g(x)$ 满足下列条件

(1) $g(a)=b$,

(2) 在该区间上有 $f(x, g(x))=0$，且在该区间上 y 可导，其导数

$$\frac{dy}{dx}=g'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}.$$

再者，若 y 二次可导，则有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}.$$

这里，$f_{xx}=(f_x)_x, f_{xy}=(f_x)_y, f_{yy}=(f_y)_y$.

注意 (1) 在 $f(x, y)=0$ 中，假定 y 对 x 可微分，则可用复合函数微分法公式求出 $\frac{dy}{dx}$,

(2) 欲求 $y=g(x)$ 的极大值或极小值，须先求出同时满足 $f(x,y)=0$ 和 $f_x(x, y)=0$ 的 x 和 y 值(当然须设 $f_y(x, y)\neq 0$) 然后再考察对应于这些值的 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的符号 (在这种情况下 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}$).

例1. 求 $Ax^2+By^2=1$ $(A\neq 0, B>0)$所确定的隐函数 y 的极值.

解 因 $f_x=2Ax$，$f_y=2By$，故 $\frac{dy}{dx}=-\frac{Ax}{By}$. 联解 $Ax^2+Bx^2=1$ 和 $2Ax=0$ (令 $A\neq 0$) 得到 $x=0$，$y=\pm\frac{1}{\sqrt{B}}$. 由 $f_{xx}=2A$ 得 $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}=$

$-\frac{A}{By}$，因此，在点$(0,\ \frac{1}{\sqrt{B}})$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{A}{\sqrt{B}}$，若$A>0$，则$y$在$x=0$处有极大值$\frac{1}{\sqrt{B}}$；若$A<0$，则$y$在$x=0$处有极小值$\frac{1}{\sqrt{B}}$。另外，在点$(0,\ -\frac{1}{\sqrt{B}})$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A}{\sqrt{B}}$，故当$A>0$时$y$在$x=0$处有极小值$-\frac{1}{\sqrt{B}}$；当$A<0$时$y$在$x=0$有极大值$-\frac{1}{\sqrt{B}}$。

例2. 求$x^5+y^5-a^4x=0$ $(a>0)$所确定的隐函数y的极值。

解 等式左边用$f(x,\ y)$表示，则

$$f_x=5x^4-a^4,\quad f_y=5y^4,\quad f_{xx}=20x^3.$$

求出同时满足$f(x,\ y)=0$和$f_x(x,\ y)=0$的x和y值：

$$x=\frac{a}{\sqrt[4]{5}},\quad y=\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[4]{5}}a;\quad x=-\frac{a}{\sqrt[4]{5}},\quad y=-\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[4]{5}}a.$$

这些值都满足$f_y\neq 0$。

当$x=\frac{a}{\sqrt[4]{5}}$时，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}}{f_y}=-\frac{4x^3}{y^4}<0$。

故y取极大值$\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[4]{5}}a$；又当

$$x=-\frac{a}{\sqrt[4]{5}}\text{时，}\frac{d^2y}{dx^2}>0.$$

故y取极小值$-\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[4]{5}}a$。

【定理】9.（拉格朗日定理） 当m个关系式$\varphi_1=0, \varphi_2=0,\ \cdots\cdots, \varphi_m=0$成立时，欲求$n$元函数$f(x_1,\ x_2, \cdots\cdots, x_n)$的极值，可作辅助函数$f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots\cdots+\lambda_m\varphi_m$($\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots\lambda_m$为未定常数)，并令它的$n$个偏导数通通为零而得一方程组，最后求出同时满足此方程组和$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \cdots\cdots,\ \varphi_m=0$的$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$

注意 这只是极值存在的必要条件。

例题 求满足条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$时函数$xyz$的极值（设$a>0$，$b>0, c>0$。）

解. 设辅助函数为 $\varphi=xyz-\lambda\cdot\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$，

则　$\varphi_x = yz - \frac{2\lambda}{a^2}x,\quad \varphi = zx - \frac{2\lambda}{b^2}y,\quad \varphi_z = xy - \frac{2\lambda}{c^2}z,$

从 $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ 可得 $3xyz-2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0$，将 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 代入上式得 $\lambda=\frac{3}{2}xyz$. 再将 λ 代入 $\varphi_x=0$，$\varphi_y=0$，$\varphi_z=0$，得到

$$\begin{cases} yz(a^2-3x^2)=0, \\ zx(b^2-3y^2)=0, \\ xy(c^2-3z^2)=0. \end{cases}$$

将它和 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$联解即得 x，y，z 的值。

i) $x^2=\frac{a^2}{3}$,　$y^2=\frac{b^2}{3}$,　$z^2=\frac{c^2}{3}$;

ii) $x=y=0$,　$z^2=c^2$;

iii) $y=z=0$,　$x^2=a^2$;

iv) $z=x=0$,　$y^2=b^2$.

后三种情况使 $xyz=0$，故不是极值。第一种情况得到 $xyz=\pm\frac{abc}{3\sqrt{3}}$，是极值。

【4】 包络线的方程

【定义】10. 曲线族的包络线　已知含参变量 a 的方程 $f(x, y, a)=0$，当a取不同的数值时便得到一系列的曲线，所有这些曲线称为曲线族。

与曲线族中每一条曲线相切的曲线，叫做曲线族的包络线。

【定理】10. 以 a 为参变量的方程 $f(x,y,a)=0$ 所代表的曲线族，其包络线由 $f(x,y,a)=0$ 和 $f_a(x,y,a)=0$ 消去 a 而得到.

注意　视情况不同，消去 a 所得结果除包络线而外，还可能包括奇点的轨迹。

例题1. 求直线族 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$($ab=k^2\neq0$，$k$为常数)，的包络线。

解　将 $ab=k^2$ 代入 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 得到 $\frac{x}{a}+\frac{a}{k^2}y-1=0$　　(第1式).

此式对 a 微分得 $-\frac{x}{a^2}+\frac{1}{k^2}y=0$， （第2式）

再从这两式中消去a。

第 2 式两端乘 a 得到 $-\frac{x}{a}+\frac{a}{k^2}y=0$，此式与第 1 式联解得到 $\frac{2x}{a}=1$，即 $a=2x$. 将它代入第 2 式得 $\frac{y}{k^2}=\frac{x}{a^2}=\frac{1}{4x}$，故 $xy=\frac{k^2}{4}$，这就是所求包络线方程(图11-65)。

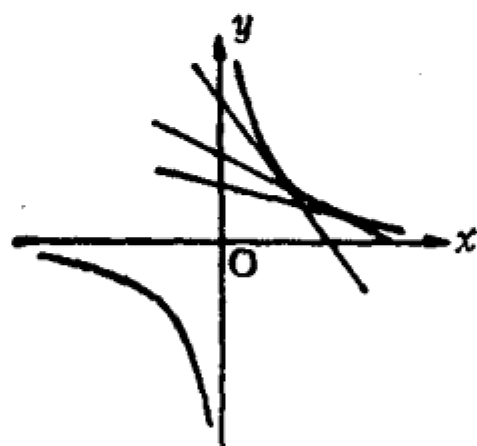


图 11-65

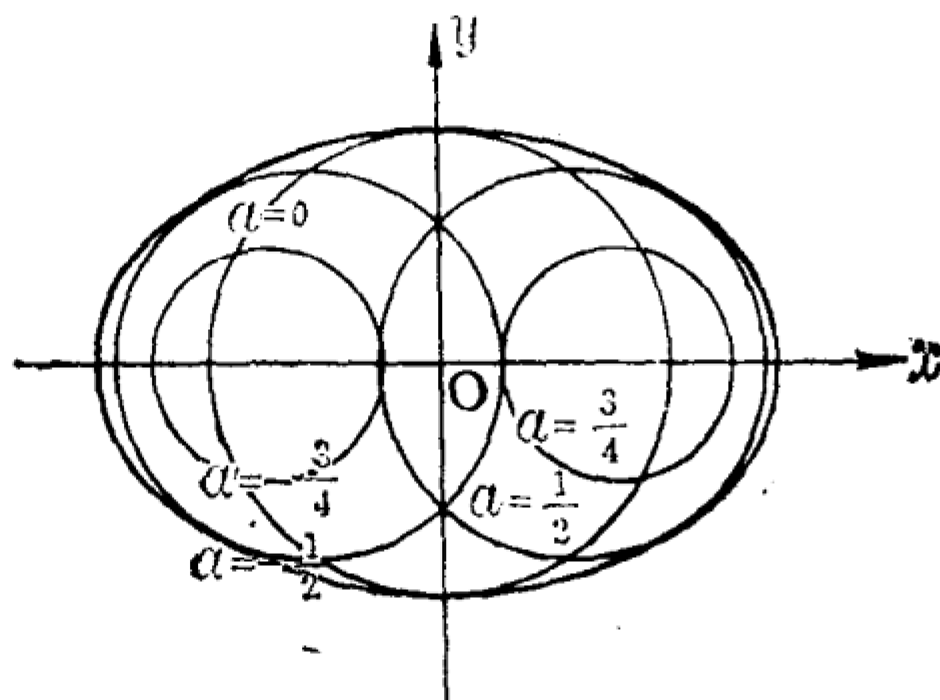


图 11-66

例题2. 求圆族 $(x-a)^2+y^2=1-a^2$ 的包络线。

解 方程 $(x-a)^2+y^2=1-a^2$ 两边对 a 微分之后，得到 $x=2a$. 将它代入原方程，其结果是 $y^2=1-2a^2$，消去 a 后得 $2y^2=2-x^2$. 因此，该圆族的包络线方程为 $x^2+2y^2=2$(图11-66).

注意 在这种情况下，$\frac{1}{\sqrt{2}}<|a|<1$ 所对应的圆不会与包络线相遇，因此上述包络线应当带上附加条件 $|a|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$，即它应为曲线族 $(x-a)^2+y^2=1-a^2$，当 $|a|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时的包络线，

例题3 求曲线 $y=f(x)$ 的法线族的包络线方程。

解 曲线 $y=f(x)$ 上点 (x, y) 处的法线方程是 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，

两边对参数 x 微分后为 $-y' = \frac{y''}{y'^2}(X-x)+\frac{1}{y'}$，由此得到 $X = x - \frac{1+y'^2}{y''}y'$. 将它代入前面的法线方程，得 $Y = y+\frac{1+y'^2}{y''}$，X，Y 的表达式就是以 x 为参变量的包络线方程(它是渐屈线，请参考下列内容[5])。

[5] 渐屈线和渐伸线

【定义】11. 渐屈线和渐伸线 已知曲线的曲率中心的轨迹，叫做该曲线的渐屈线；对渐屈线而言，原曲线叫做渐伸线.

【定理】11 .曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线方程，若用 x 作参变量，则其形式如下：

$$\xi = x - \frac{1+y'^2}{y''}y';$$

$$\eta = y - \frac{1+y'^2}{y''}.$$

此结果可由§7定理得到.)

(**【系】** 曲线的法线族的包络线是该曲线的渐屈线.

(这可由前面(4)例3得知.)

【定理】12. 设曲线上点 P 的曲率中心为 P'，则渐屈线在点 P 的切线是原曲线在点 P 的法线.

证明 令 P 和 P' 的坐标分别为 (x, y)，(ξ, η)，根据【定理】11，$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x)$，故 P 位于曲线在 P 点的法线上. 又因为

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 - y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right) - \frac{1+y'^2}{y''}y''$$

$$= -\left[y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)\right]y'',$$

$$\frac{d\eta}{dx} = y' + \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right),$$

所以 $$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{y'}.$$

也就是说，P' 处渐屈线的切线与点 P 处的法线是一致的. □

【定理】13. 渐屈线上两点间的弧长，等于原曲线上对应点处曲率半径之差，但要设 $\frac{d\rho}{dx} \neq 0$，(ρ 为曲率半径).

证明从略.

例题1. 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的渐屈线。

解 原方程对x二次微分：

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}y'=0,$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}y'^2+\frac{1}{b^2}yy''=0,$$

故 $$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

$$y''=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}=-\frac{a^2b^4}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

从而得到渐屈线方程为

$$\xi=x-\frac{1+y'^2}{y''}y'=(a^2-b^2)\cdot\frac{x^3}{a^4},$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=-(a^2-b^2)\frac{y^3}{b^4}.$$

由此二式消去x和y，整理后得到

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

例题2 求$x^2+y^2=a^2$的渐伸线

解 如图11-67，根据【定理】12和13，$P'P$为圆的切线，因$P'P$的长度等于$P'A$的弧长，故若令$\angle AOP'=\varphi$，则$\widehat{P'A}=a\varphi$。因$\overrightarrow{P'P}$与正x轴的夹角为$(\varphi-\frac{\pi}{2})$，故

$$x=\xi+a\varphi\cdot\cos(\varphi-\frac{\pi}{2}),$$

$$y=\eta+a\varphi\cdot\sin(\varphi-\frac{\pi}{2}).$$

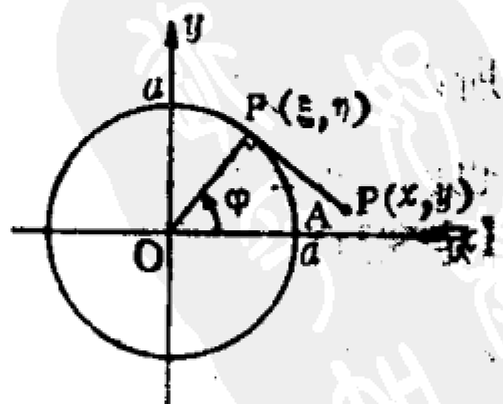


图 11-67

经整理后得到

$$x=a\cos\varphi+a\varphi\sin\varphi,$$
$$y=a\sin\varphi-a\varphi\cos\varphi.$$

第十二章　积 分 学

§1．不定积分

1·1 原函数和不定积分

【定义】1 原函数如果在某区间 I 上恒有，$G'(x)=f(x)$，则 $G(x)$ 叫做 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。

【定理】 $f(x)$的每一原函数都具有 $G(x)+C$ 的形式，这里 C 是任意常数。

【证明】 设 $F(x)$是 $f(x)$的任意一个原函数，则由【定义】1，有 $F'(x)=f(x)$，又 $G(x)$也是 $f(x)$的一个原函数，故

$$[F(x)-G(x)]'=F'(x)-G'(x)=f(x)-f(x)=0$$

$F(x)-G(x)=C$（任意常数）(参看微分学)

$$F(x)=G(x)+C$$ □

【定义】2. 不定积分 $f(x)$的全体原函数(含有一个不定的常数)称为$f(x)$的不定积分，记成$\int f(x)dx$，这里 $f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，由上述定理得：若 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$，　$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$．$C$ 称为积分常数，求 $f(x)$ 的不定积分称为积分 $f(x)$。

1·2 不定积分的法则与公式

【法则】

1. $\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

2. $\int cf(x)\,dx=c\int f(x)\,dx$　（$c\neq$）为常数)，

3. $F(x)=\int f(x)dx$ 时，若令 $x=g(t)$，且 $g(t)$ 可导，则

$$F[g(t)]=\int f[g(t)]g'(t)dt.$$ *①(换元积分法).

4. 若 $f(x)$ 和 $G(x)$ 可导，则

$$\int f(x)G'(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$ (分部积分法).

5. $$\int f(x)^n f'(x)\,dx=\begin{cases}\frac{1}{n+1}f(x)^{n+1}+c & (n\neq -1 \text{ 时}),\\ \ln|f(x)|+c & (n=-1 \text{ 时})\end{cases}$$

(c 为积分常数).

【证明】

1. $\left[\int f(x)dx\pm\int g(x)dx\right]'=\left[\int f(x)dx\right]'\pm\left[\int g(x)dx\right]'=f(x)\pm g(x)$.

2. $\left[c\int f(x)dx\right]'=cf(x)$.

3. 将 $F(x)=\int f(x)dx$ 中的 x 作为 t 的函数对 t 求导，则得

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}=f(x)\cdot g'(t)=f[g(t)]\cdot g'(t).$$

$$\therefore\quad F[g(t)]=\int f[g(t)]\cdot g'(t)dt.$$

4. $$\left[f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx\right]'$$

$$=[f(x)\cdot G(x)]'-\left[\int f'(x)G(x)dx\right]'$$

$$=f'(x)G(x)+f(x)G'(x)-f'(x)G(x)$$

$$=f(x)G'(x),$$

$$\therefore\quad \int f(x)G'(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx.$$

5. $$\left[\frac{1}{n+1}f(x)^{n+1}+C\right]'=f(x)^n f'(x),$$

$$[\ln|f(x)|+C]'=\frac{1}{f(x)}f'(x),$$ □

①公式 3 的两个等式中都省略了常数 C——译注

1·3 常用初等函数的不定积分公式

(为简化书写，省略积分常数.)

【公式】

6. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}$ $(a\neq 0,\ n\neq -1)$,

7. $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$ $(a\neq 0)$.

8. $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ $(a\neq 0)$.

9. $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$ $(a\neq b)$.

10. $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2+A}|$.

12. $\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A} + \frac{1}{2}A\cdot\ln|x+\sqrt{x^2+A}|$.

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

14. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

15. $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$ $(a\neq 0)$.

16. $\int a^{bx}dx = \frac{1}{b\ln a}a^{bx}$ $(b\neq 0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

17. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$.

18 $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$ $(a\neq 0)$,

19. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \qquad (a\neq 0).$

20. $\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| \qquad (a\neq 0).$

21. $\int \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| \qquad (a\neq 0).$

22. $\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg} ax \qquad (a\neq 0).$

23. $\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax \qquad (a\neq 0).$

24. $\int \frac{1}{\sin ax} dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right| \qquad (a\neq 0).$

25. $\int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \qquad (a\neq 0).$

【证明】

6. $\left[\frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1}\right]' = (ax+b)^n.$

7 $\left(\frac{1}{a}\ln|ax+b|\right)' = \frac{1}{ax+b}.$

8. $\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{x^2-a^2}.$

9. $\left(\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|\right)' = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)$

$= \frac{1}{(x-a)(x-b)}.$

10. $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{x^2+a^2}.$

11. $\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}.$$

另证，令$\sqrt{x^2+A}=t-x$并解出x，得$x=\frac{t^2-A}{2t}$，

$$\therefore\quad dx=\frac{A+t^2}{2t^2}dt,$$

$$\therefore\quad \int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx=\int\frac{2t}{t^2+A}\cdot\frac{t^2+A}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2+A}|.$$

12. $$I=\int\sqrt{x^2+A}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2+A}-I+A\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx.$$

$$\therefore\quad 2I=x\sqrt{x^2+A}+A\ln|x+\sqrt{x^2+A}|,$$

故得原式.

13. $$\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)'=\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

14. 令$x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 tdt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

15. $\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'=e^{ax}$.

16. $\left(\frac{1}{b\ln a}a^{bx}\right)'=a^{bx}$.

17. $\int \ln x dx=x\ln x-\int x.\frac{1}{x}dx=x\ln x-x$.

18. $\left(-\frac{1}{a}\cos ax\right)'=\sin ax$.

19. $\left(\frac{1}{a}\sin ax\right)'=\cos ax$.

20. $\left(-\frac{1}{a}\ln|\cos ax|\right)'=\operatorname{tg} ax$.

21. $\left(\frac{1}{a}\ln|\sin ax|\right)'=\operatorname{ctg} ax$.

22. $\left(\frac{1}{a}\operatorname{tg} ax\right)'=\sec^2 ax$.

23. $\left(-\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax\right)'=\csc^2 ax$.

24. $$\int\frac{1}{\sin ax}dx=\int\frac{1}{2\sin\frac{ax}{2}\cos\frac{ax}{2}}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{ax}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{ax}{2}}dx=\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|.$$

25. $$\int\frac{1}{\cos ax}dx=\int\frac{1}{\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)}dx=\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$ □

1·4 有理函数的积分法

(省略积分常数)。

例题 1. $\int\frac{6-2x^2}{(1-x)^2(1+x)}dx=\frac{2}{1-x}+\ln\left|\frac{1+x}{(1-x)^3}\right|.$

解 令 $\frac{6-2x^2}{(1-x)^2(1+x)}=\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1+x}$，并求出 $A=2$，$B=3$，$C=1$．再对上式右边逐项积分即可得到结果。

例题 2.
$$I=\int\frac{4x^2-5x+5}{(x^2+1)^2(1-x)}dx$$
$$=-\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{5}{2}\mathrm{tg}^{-1}x+\frac{1}{x^2+1}+\frac{3x}{2(x^2+1)}.$$

解 令 $\frac{4x^2-5x+5}{(x^2+1)^2(1-x)}=\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$，不难求出 $A=1$，$B=C=1$，$D=-2$，$E=3$，将上式右边逐项积分，得到

$$I=\int\frac{1}{1-x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+1}dx-\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx+3\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$
$$=-\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{tg}^{-1}x+\frac{1}{x^2+1}+3\left[\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx\right]$$
$$=-\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{5}{2}\mathrm{tg}^{-1}x+\frac{1}{x^2+1}+\frac{3x}{2(x^2+1)}.$$

（参看下面【公式】26.）

【有理函数的积分法】.

欲求有理函数的不定积分，可用下列两个性质：

性质 1. 有理整式的性质 设 $F(x)=0$ 为 x 的实系数 n 次方程，则方程有 n 个根；若一个根为复数 $a+bi$，则必有其共轭复数 $a-bi$ 为它的另一个根，从而 $F(x)$ 包含如下的因式：

$$[x-(a+bi)]\cdot[x-(a-bi)]=x^2-2ax+a^2+b^2.$$

因此，$F(x)$ 可以分解成 $(x-a)^m$ 或 $(x^2+2px+q)^k$ 这样的因式之积

(m 和 k 为非负整数，且 $p^2-4q<0$).

性质 2. 既约真分式的性质 设$\frac{N(x)}{D(x)}$为既约真分式，当分母可因式分解为 $D(x)=P(x)\cdot Q(x)$时($P(x)$和 $Q(x)$ 为没有公因式的有理整式)，则原式可以分解为以 $P(x)$和 $Q(x)$作分母的两个既约真分式之和，即

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\frac{A(x)}{P(x)}+\frac{B(x)}{Q(x)}.$$

(证明从略)

根据以上两个性质，如上例所示，有理函数的不定积分，可以归结成下列两种形式的不定积分：

$$(1)\ \int\frac{a}{(x-a)^m}dx; \qquad (2)\ \int\frac{bx+c}{(x^2+2px+q)^k}dx.$$

进一步令 $x+p=t$，(2) 又可分成下列两种形式：

$$(3)\ \int\frac{1}{(t^2+\beta^2)^k}dt=I_k; \quad (4)\ \int\frac{t}{(t^2+\beta^2)^k}dt.$$

令 $t^2=z$，(4) 就成为(1)的形式，而(1)的形式可用 1.3 给出的积分公式。因此现在来求(3)的结果，这可以根据下列递推公式来求.

【公式】26. $$I_k=\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{t}{(2k-2)(t^2+\beta^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}\right]. \quad ①$$

$(\beta\neq0)$.

【证明】 $$\left[\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}\right]'=\frac{1}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}-(k-1)\frac{2t^2}{(t^2+\beta^2)^k}$$

$$=\frac{1}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}-2(k-1)\frac{t^2+\beta^2-\beta^2}{(t^2+\beta^2)^k}$$

$$=-\frac{2k-3}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}+2(k-1)\beta^2\frac{1}{(t^2+\beta^2)^k}.$$

上式两端积分，

$$\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{k-1}}=-(2k-3)I_{k-1}+2(k-1)\beta^2I_k.$$

$$\therefore\ I_k=\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{t}{(2k-2)(t^2+\beta^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}\right].$$

1·5 无理函数的积分法

【无理函数的积分法】 (设$f(x,y)$为 x、y 的无理函数，讨论中略去积分

常数.)

方法 1. (1) $\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx.\qquad(a\neq0)$

令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$ 则有理化成 $\frac{n}{a}\int f\left(\frac{t^n-b}{a},\ t\right)t^{n-1}dt$ 的形式。

例题 1. $I=\int x\sqrt{2a-x}\,dx=-\frac{2}{15}(x-2a)(3x+4a)\sqrt{2a-x}$.

解 令 $\sqrt{2a-x}=t$，则 $x=2a-t^2$，$dx=-2tdt$，

$$\therefore\quad I=\int(2a-t^2)t\cdot(-2t)dt=\int(2t^4-4at^2)dt$$

$$=\frac{2}{5}t^5-\frac{4a}{3}t^3=\frac{2t^3}{15}(3t^2-10a)$$

$$=-\frac{2}{15}(x-2a)(3x+4a)\sqrt{2a-x}.$$

(2) $\int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.\qquad(a^2+c^2\neq0)$

令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$，则有理化成 $\int f\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\cdot$ $\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$ 的形式.

例题 2. $I=\int\sqrt{\frac{x+a}{x}}dx=a\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})+\sqrt{x}\sqrt{x+a}$.

解 令 $t=\sqrt{\frac{x+a}{x}}$，则 $x=\frac{a}{t^2-1}$，$dx=-\frac{2at}{(t^2-1)^2}dt$.

$$\therefore\quad I=\int\frac{-2t^2a}{(t^2-1)^2}dt=-2a\left[\int\frac{1}{t^2-1}dt+\int\frac{1}{(t^2-1)^2}dt\right]$$

$$=-2a\left[\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)^2dt\right]$$

$$=-2a\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{2}{t^2-1}\right]dt\right\}$$

$$=-2a\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\right]$$

$$=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{at}{t^2-1}$$

$$=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}\right|+x\sqrt{\frac{x+a}{x}}$$

$$=a\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})+\sqrt{x}\sqrt{x+a}.$$

方法 2. $\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

当 $a=0$ 时成为方法 1 所讨论的情况，又当 $b^2-4ac=0$ 时成为有理函数的积分，因此这里只考虑 $a\neq0$ 且 $b^2-4ac\neq0$ 的情况。

(1) $b^2-4ac>0$ 的情况：

这时令 α，β 为 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

(i) $a>0$ 时，令 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}=t$，有理化之后为

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

$$=\int f\left(\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2},\ \frac{\sqrt{a}(\alpha-\beta)t}{1-t^2}\right)\cdot\frac{2(\alpha-\beta)t}{(1-t^2)^2}dt.$$

另一方法，令 $\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t$，则

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int f_1(t,\ \sqrt{t^2-r^2})dt,\ (r>0).$$

再作代换：

$$t=\frac{r}{2}(e^{\theta}+e^{-\theta})\quad 或\quad t=\frac{r}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

例题1 . $I=\int\sqrt{x^2-x-\frac{3}{4}}dx=\int\sqrt{t^2-1}\,dt\left(t=x-\frac{1}{2},\ t>1\right)$

解 令 $t=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)\quad(u>1)$

$$I=\int\frac{1}{4}\left(u-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{1}{u^2}\right)du.$$

$$\therefore\quad u=t+\sqrt{t^2-1},\ \frac{1}{u}=t-\sqrt{t^2-1},$$

$$I=\frac{1}{8}\left(u^2-\frac{1}{u^2}\right)-\frac{1}{2}\ln|u|$$

$$=\frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1}-\ln|t+\sqrt{t^2-1}|),\ (t\leqslant-1\text{ 时也一样}).$$

(ii) $a<0$ 时，令 $\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}=t$，则有理化之后为

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int f\left(\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2},\ \frac{\sqrt{-a}(\beta-\alpha)t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2(\beta-\alpha)}{(1+t^2)^2}dt.$$

另一方法 令 $\sqrt{-a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)=t$，得到下列形式：

$$\int f(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int f_2(t,\sqrt{r^2-t^2})dt,\ (r>0).$$

再作代换 $t=r\sin\theta$（或 $t=r\cos\theta$）.

例题 2. $I=\int\frac{x}{\sqrt{15-2x-x^2}}dx=\int\frac{(t-1)dt}{\sqrt{16-x^2}}$，$(1+x=t)$.

解 $I=\int\frac{(4\sin\theta-1)\cdot4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta\ (t=4\sin\theta)$

$$=-4\cos\theta-\theta=-4\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{4}\right)^2}-\sin^{-1}\frac{1+x}{4}$$

$$=-2\sqrt{15-2x-x^2}-\sin^{-1}\frac{x}{4}.$$

(2) $b^2-4ac<0$ 的情况：

欲使根号内的式子 $ax^2+bx+c\geqslant0$，必须 $a>0$，令 $\sqrt{ax_2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$，可作如下有理化.

$$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int f\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},\ \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt.$$

例题 3. $I=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-x+2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}\right|.$

解 令 $\sqrt{x^2-x+2}=t-x$，则 $-x+2=-2xt+t^2$，$x=\frac{2-t^2}{1-2t}$，

$$\therefore\quad dx=\frac{2(t^2-t+2)}{(1-2t)^2}dt,\quad t-x=\frac{-t^2+t-2}{1-2t}.$$

$$\therefore\quad I=\int\frac{1-2t}{2-t^2}\cdot\frac{1-2t}{-(2-t+t^2)}\cdot\frac{2(t^2-t+2)}{(1-2t)^2}dt$$

$$=2\int\frac{1}{t^2-2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}\right|.$$

方法 3. $\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}dx$，($m$，$n$，$p$，$q$ 为整数，$a\neq0$，$b\neq0$，$q>0$，$\frac{p}{q}\neq$整数.)

(1) 当 $\frac{m+1}{n}$ 为整数，令 $\sqrt[q]{ax^n+b}=t$ 作有理化.

例题 1. $I=\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}dx=-\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

解 $\frac{m+1}{n}=\frac{2+1}{3}=1$，令 $\sqrt[3]{1+x^3}=t$，则 $x=(t^3-1)^{\frac{1}{3}}$，

$$dx=t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}dt.$$

$$\therefore\quad I=\int\frac{(t^3-1)^{\frac{2}{3}}}{t^4}\cdot t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}dt$$

$$=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}=-(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

(2) 当 $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ 为整数时，令 $\sqrt[q]{a+bx^{-n}}=t$ 作有理化.

例题 2. $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^3)^4}}dx=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

解 $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}=\frac{0+1}{3}-\frac{4}{3}=-1$，令$\sqrt[3]{1+x^{-3}}=t$，则 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}}$，

$dx=-\frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}dt$，$\sqrt[3]{1+x^3}=xt=\frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}$；

$$\therefore \quad I=\int\frac{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}{t^4}\cdot\frac{-t^2}{\sqrt[3]{(t^3-1)^4}}dt=-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^{-3}}}=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

1·6 超越函数的积分法

【超越函数的积分法】

设$f(x)$为有理函数，$T(x)$为超越函数e^x、$\ln x$、$\sin x$、$\cos x$中的一种。(略去积分常数。)

方法 1. $\int f(x)T(x)dx$，反复使用分部积分法来降低$f(x)$的次数。

例题 $I=\int x^3e^xdx=e^x(x^3-3x^2+6x-6)$.

解 $I=x^3e^x-\int 3x^2e^xdx=x^3e^x-(3x^2e^x-\int 6xe^xdx)$

$$=x^3e^x-3x^2e+(6xe^x-\int 6e^xdx)$$

$$=e^x(x^3-3x^2+6x-6).$$

方法 2. $\int f[T(x)]dx$，　　令$T(x)=t$.

例题 1. $I=\int(e^x+1)^3dx=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^x+x$.

解 令$e^x=t$，则$x=\ln t$，$dx=\frac{1}{t}dt$，

$$\therefore \quad I=\int(t+1)^3\frac{1}{t}dt=\int\left(t^2+3t+3+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\frac{t^3}{3}+\frac{3}{2}t^2+3t+\ln|t|$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{3}{2}e^{2x}+3e^{x}+x.$$

例题 2. $I=\int(\ln x+1)^2dx=x(\ln x)^2+x.$

解 令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$dx=e^t\,dt$，

$$\therefore\quad I=\int(t+1)^2e^tdx=(t+1)^2e^t-\int2(t+1)e^tdt$$

$$=(t+1)^2e^t-2(t+1)e^t-2\int e^tdt$$

$$=e^t(t^2+1)=x(\ln x)^2+x.$$

例题 3. $I=\int(\sin x+1)^2dx=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cos x-2\cos x.$

解 令 $\sin x=t$，则 $x=\sin^{-1}t$，$dx=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$，

$$\therefore\quad I=\int(t+1)^2\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int\frac{t^2-1+2t+2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int\left(-\sqrt{1-t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sin^{-1}t-\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}-2\sqrt{1-t^2}+2\sin^{-1}t$$

$$=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cos x-2\cos x.$$

另解

$$I=\int(\sin^2x+2\sin x+1)dx$$

$$=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx-2\cos x+x$$

$$=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\sin2x-2\cos x.$$

方法 3. $\int g(\sin x,\cos x)\,dx$（$g(x,y)$是$x$和$y$的有理函数）.

令 $tg\frac{x}{2}=t$，则$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，这

样便使原积分式有理化，即

$$\int g(\sin x,\ \cos x)dx=\int g\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例题 $I=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$.

解 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则有

$$I=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{1+2t-t^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{2-(t-1)^2}dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(t-1)}{\sqrt{2}-(t-1)}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|.$$

方法 4. $I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n x dx\qquad(m+n\neq0,\ m,n\text{ 是整数})$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}\qquad①$$

$$=\frac{-\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n},\qquad②$$

证明 $I_{m,n}=\int(\sin^m x\cos x)\cos^{n-1}xdx$

$$=\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cos^{n-1}x-\int\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$$

$$(m\neq-1)$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}xdx$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^m x(1-\cos^2x)\cos^{n-2}xdx$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}(I_{m,n-2}-I_{m,n}),$$

$$\therefore\quad I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}. \qquad ①$$

同样，从 $I_{m,n}=\int\sin^{m+1}x(\cos^n x\sin x)dx$ 可得②式. □

方法 5. $I_n=\int\mathrm{tg}^n x dx=\frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}.$

证明 因 $(\mathrm{tg}^{n-1}x)'=(n-1)\mathrm{tg}^{n-2}x\sec^2 x=(n-1)\mathrm{tg}^{n-2}x(1+\mathrm{tg}^2 x)=(n-1)(\mathrm{tg}^{n-2}x+\mathrm{tg}^n x)$,

$$\therefore\quad \mathrm{tg}^{n-1}x=(n-1)\int\mathrm{tg}^{n-2}xdx+(n-1)\int\mathrm{tg}^n xdx.$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{\mathrm{tg}^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}.$$ □

1·7 各种函数的不定积分的例题

例题 (略去积分常数).

1. $\int\frac{x^3-5x^2+10x-7}{(x-1)^2(x-2)^3}dx=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-2)^2}.$ [部分分式]

2. $\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}x.$ [部分分式]

3. $\int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|.$ [$x^3=t$]

4. $\int\frac{x}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$ [$x^2=t$]

5. $\int\frac{1}{x(a^3+x^3)}dx=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$ $(a\neq 0)$. [$x^3=t$]

6. $\int\frac{x^3+x}{(x-a)^3}dx=x-a+3a\ln|x-a|-\frac{3a^2+1}{x-a}-\frac{a^3+a}{2(x-a)^2}.$ [$x-a=t$]

7. $\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x-a}{a}\right].$

[$x-a=t$]

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x-a}{a}$. [$x-a=t$]

9. $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$. [$x^2=t$]

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}$ $(a>0)$. [$\sqrt{a^2-x^2}=t$]

11. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}$. [$x=a\sin\theta$]

12. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$. [$x=a\sec\theta$]

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}=\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right|$.

[$\sqrt{1+x+x^2}+x=t$]

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}=3\ln\left|\frac{1+\sqrt[6]{x}}{1-\sqrt[6]{x}}\right|-6\sqrt[6]{x}$. [$\sqrt[6]{x}=t$]

15. $\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{3/2}}=\frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}}$. [$x-a=t$]

16. $\int \sin^3 x dx=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$. [$\cos x=t$]

17. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right)$, $(ab\neq 0)$.

[$\operatorname{tg} x=t$]

18. $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x}=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+\frac{a}{a^2+b^2}x$.

[$\operatorname{tg} x=t$]

19. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ [$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$]

20. $\int \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx=e^x+x-2\ln(e^x+1)$. [$e^x=t$]

21. $\int \frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx=\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+a^{-x})$, $(a>0)$. [$a^x=t$]

22. $\int xa^x dx = \frac{a^x}{\ln^2 a}(x\ln a - 1)$. [分部积分]

23. $\int \frac{\ln|x|}{(1+x)^2}dx = \frac{x}{1+x}\ln|x| - \ln|1+x|$. [分部积分]

24. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$. [分部积分]

25. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$. 【分部积分】

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. [分母有理化]

27. $\int \sin ax \sin bx dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right)$,

$(a^2 \neq b^2)$. [积化和差公式]

28. $\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b} + \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]$,

$(a^2 \neq b^2)$. [积化和差公式]

29. $\int \sin ax \cos bx dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right\}$,

$(a^2 \neq b^2)$. [积化和差公式]

30. $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\right|$, $\left(\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}\right)$.

[分母化为单项]

解 以上例题的解法如下：

1. 令 $\frac{x^3-5x^2+10x-7}{(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^2}$ $+ \frac{E}{x-2}$，去分母后有

$x^3-5x^2+10x-7 = A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x-2) + E(x-1)^2(x-2)^2$.

当 $x=1$ 时，$A=1$，并将上式右边第一项 $(x-2)^3$ 移到左边，得到

$x^2-2x+1 = B(x-1)(x-2)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x-2)$

$+E(x-1)^2(x-2)^2$.

用$(x-1)$除上式两端，得

$$x-1=B(x-2)^3+C(x-1)+D(x-1)(x-2)+E(x-1)(x-2)^2.$$

当$x=1$时，$B=0$，再用$(x-1)$除两端后成为$1=C+D(x-2)+E(x-2)^2$，当$x=2$时，得$C=1$．同时再比较x^2的系数得知$E=0$，$D=0$．

$$\therefore \int\frac{x^3-5x+10x-7}{(x-1)^2(x-2)^3}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{1}{(x-2)^3}dx$$

$$=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-2)^2}.$$

2. $\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{2(x^2+1)}$.

分别将上式两端积分，则得

$$\int\frac{1}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}x.$$

3. 令$x^3=t$，则$3x^2dx=dt$，

$$\therefore \int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\int\frac{dt}{3(t+1)}=\frac{1}{3}\ln|t+1|=\frac{1}{3}\ln|x^3+1|.$$

4. 令$x^2=t$，则$2xdx=dt$，

$$\therefore \int\frac{xdx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|.$$

5. 令$x^3=t$，则$3x^2dx=dt$.

$$\therefore \int\frac{1}{x(a^3+x^3)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t(a^3+t)}=\frac{1}{3a^3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+a^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{t}{t+a^3}\right|=\frac{1}{3a^3}\ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$$

6. 令$x-a=t$，则$x=t+a$，$dx=dt$，

$$\therefore \int\frac{x^3+x}{(x-a)^3}dx=\int\frac{(t+a)^3+t+a}{t^3}dt$$

$$=\int\left(1+\frac{3a}{t}+\frac{3a^2+1}{t^2}+\frac{a^3+a}{t^3}\right)dt$$

$$=t+3a\ln|t|-\frac{3a^2+1}{t}-\frac{a^3+a}{2t^2}$$

$$=x-a+3a\ln|x-a|-\frac{3a^2+1}{x-a}-\frac{a^3+a}{2(x-a)^2}.$$

7. 令 $x-a=t$,

$$\int\sqrt{2ax-x^2}dx=\int\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx=\int\sqrt{a^2-t^2}\ dt$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{t}{a}$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}.$$

8. 令 $x-a=t$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}}=\sin^{-1}\frac{t}{a}=\sin^{-1}\frac{x-a}{a}.$$

9. 令 $x^2=t$,

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}dx=\int t\sqrt{a^2-t}\ \frac{dt}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(a^2-t)^{\frac{3}{2}}t+\frac{2}{3}\int(a^2-t)^{\frac{3}{2}}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{3}(a^2-t)^{\frac{3}{2}}t-\frac{2}{15}(a^2-t)^{\frac{5}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}x^2-\frac{2}{15}(a^2-x^2)^{\frac{5}{2}}.$$

10. 令 $\sqrt{a^2-x^2}=t$，则 $x^2=a^2-t^2$，$xdx=-tdt$,

$$\therefore\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{-tdt}{(a^2-t^2)t}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{t+a}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t^2-a^2}{(t+a)^2}\right|$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{(a+\sqrt{a^2-x^2})^2}=-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{|x|}.$$

11. 令 $x=a\sin\theta$,

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos\theta\,d\theta}{a^2\sin^2\theta(\pm a\cos\theta)}=\pm\int\frac{\csc^2\theta}{a^2}d\theta$$

$$=\pm\frac{1}{a^2}\operatorname{ctg}\theta=\mp\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\pm\sqrt{1-(x/a)^2}}{x/a}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}.$$

12. 令 $x=a\sec\theta$, 则 $dx=a\sec\theta\operatorname{tg}\theta\,d\theta$,

$$\therefore\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a^2\sec^2\theta|a\operatorname{tg}\theta|}d\theta=\pm\frac{1}{a^2}\int\cos\theta\,d\theta$$

$$=\pm\frac{1}{a^2}\sin\theta=\pm\frac{1}{a^2}\sqrt{1-\cos^2\theta}=\pm\frac{1}{a^2}\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}.$$

$$=\pm\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}.$$ (经验算，取负号不适合.)

13. 令 $\sqrt{1+x+x^2}+x=t$, 将 $\sqrt{1+x+x^2}=t-x$ 两端平方后得到 $x=\frac{t^2-1}{2t+1}$,

$$\therefore\quad dx=\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt.$$

另外，$\sqrt{1+x+x^2}=t-\frac{t^2-1}{2t+1}=\frac{t^2+t+1}{2t+1}$,

$$\therefore\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{2t+1}{t^2-1}\cdot\frac{2t+1}{t^2+t+1}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt$$

$$=\int\frac{2dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x+x^2}+x+1}\right|.$$

$$=\ln\left|\frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x}\right|.$$

14. 令 $\sqrt[6]{x}=t$, 则 $x=t^6$, $dx=6t^5dt$,

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt[3]{x})}=\int\frac{6t^5dx}{t^3(1-t^2)}=6\int\frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt$$

$$=6\int\left(-\frac{1}{t^2-1}-1\right)dt=6\left(-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-t\right)$$

$$=3\ln\left|\frac{1-\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[6]{x}}\right|-6\sqrt[6]{x}.$$

15. 令 $x-a=t$,

$$\int\frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dt}{(a^2-t^2)^{3/2}}=\int\frac{a\cos\theta\, d\theta}{\pm a^3\cos^3\theta}d\theta$$ (再令 $t=a\sin\theta$)

$$=\pm\int\frac{\sec^2\theta}{a^2}d\theta=\pm\frac{\operatorname{tg}\theta}{a^2}=\pm\frac{1}{a^2}\cdot\frac{t/a}{\sqrt{1-(t/a)^2}}$$

$$=\pm\frac{1}{a^2}\,\frac{x-a}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$ (经验算，舍去负号。)

16. 令 $\cos x=t$, 则 $-\sin x dx=dt$,

$$\therefore\ \int\sin^3 x dx=-\int\sin^2 x(-\sin x)dx=-\int(1-t^2)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3-t=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x.$$

17. 令 $\operatorname{tg} x=t$, 则 $\sec^2 x dx=dt$,

$$\therefore\ \int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int\frac{\sec^2 x dx}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2 x}=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{a}t=\frac{1}{ab}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} x\right).$$

18. 令 $\operatorname{tg} x=t$, 则 $x=\operatorname{tg}^{-1}t$, $dx=\frac{dt}{1+t^2}$,

$$\therefore\ \int\frac{dx}{a+b\operatorname{tg} x}=\int\frac{1}{a+bt}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\int\left(\frac{b^2}{a+bt}-\frac{bt-a}{1+t^2}\right)dt=\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\ln|a+bt|-\frac{b}{2}\ln|1+t^2|+a\operatorname{tg}^{-1}t\right)$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\left(b\ln\left|\frac{a\cos x+b\sin x}{\cos x}\right|-\frac{b}{2}\ln\sec^2 x+ax\right).$$

19. 令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$，

$$\therefore \int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1-t^2}{1+t^2}dt$$

$$=\int\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)dt=2\operatorname{tg}^{-1}t-t=x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

20. 令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，$dx=\frac{1}{t}dt$，

$$\therefore \int\frac{e^{2x}+1}{e^x+1}dx=\int\frac{t^2+1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\left[1+\frac{1-t}{t(t+1)}\right]dt$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right)dt=t+\ln|t|-2\ln|t+1|$$

$$=e^x+x-2\ln(e^x+1).$$

21. 令 $a^x=t$，则 $x=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln t$，$dx=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{t}dt$

$$\therefore \int\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}dx=\int\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\ln a}\int\frac{t^2-1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt=\frac{1}{\ln a}\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{t^2+1}{t}\right|=\frac{1}{\ln a}\ln(a^x+a^{-x}).$$

22. $\int xa^xdx=\frac{a^x}{\ln a}\cdot x-\int\frac{a^x}{\ln a}dx=\frac{a^x}{\ln a}\cdot x-\frac{a^x}{(\ln a)^2}.$

23. $\int\frac{\ln|x|}{(1+x)^2}dx=-\frac{\ln|x|}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=-\frac{\ln|x|}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{\ln|x|}{1+x}$$

$$+\ln|x|-\ln|x+1|$$

$$=\frac{x\ln|x|}{1+x}-\ln|x+1|.$$

24. $I=\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx dx$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx\right)$$

$$=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I,$$

$\therefore\quad I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx).$

25. 证明方法同 24.

26. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}dx$

$$=\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right].$$

27. $\int\sin ax\sin bx dx=\int\frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right].$$

28. $\int\cos ax\cos bx dx=\int\frac{1}{2}[\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b}+\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right].$$

29. $\int\sin ax\cos bx dx=\int\frac{1}{2}[\sin(a-b)x+\sin(a+b)x]dx$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)x}{a-b}+\frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right].$$

30. $\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)}\left(令\ \alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x+\alpha}{2}\right|.$$

§2. 定 积 分

2·1 有理整函数的定积分

【定理】 1. 已知 $f(x)=x^m$(m 是自然数)，$a\leqslant x\leqslant b$. 把区间$[a,b]$任意细分为 n 份，其分点依次为 $a=x_0$，x_1，x_2，…，$x_n=b$. 作和式 $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$，这里的 ξ_k 是在 $[x_k,x_{k+1}]$上任意选取的。于是 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1})$.（但除了 $n\to\infty$ 还要让 $\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)\to 0$.）

【证明】 先设 $0\leqslant a\leqslant b$. 对于$[a,b]$内任意的一个小区间$[\alpha,\beta]$ ($\beta>\alpha\geqslant 0$)，$\frac{\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}}{\beta-\alpha}=\beta^m+\beta^{m-1}\alpha+\beta^{m-2}\alpha^2+\cdots+\alpha^m$，∴ $(m+1)\alpha^m<\frac{\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}}{\beta-\alpha}<(m+1)\beta^m$，故在区间$(\alpha,\beta)$存在数 C 使 $\frac{\beta^{m+1}-\alpha^{m+1}}{\beta-\alpha}=(m+1)C^m$.（这个 C 可由此等式解出来）.

今代替$[\alpha,\beta]$而考虑$[a,b]$内的小区间 $[x_k,x_{k+1}]$，并把相应的 C 改为 C_k. 则 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}^{m+1}-x_k^{m+1}}{m+1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_k^m(x_{k+1}-x_k)$，其左边等于 $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. 它与 n 无关，当 $n\to\infty$ 时其极限仍是它自身，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}C_k^m(x_{k+1}-x_k)=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

又若在上式左边，把特定的 C_k 换成$[x_k,x_{k+1}]$ 上任取的 C_k'，上式也成立.（这也就证明了 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{m+1}(b^{m+1}-a^{m+1})$）.这是因为

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}C_k^m(x_{k+1}-x_k)-\sum_{k=0}^{n-1}C_k'^m(x_{k+1}-x_k)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n-1}(C_k^m-C_k'^m)(x_{k+1}-x_k)\right|\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^m-x_k^m)$$

$=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)(b^m-a^m)\to 0$ ($n\to\infty$，$\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)\to 0$). 这里利用

了 x^m 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的单调增加性. □

在上述证明中，区间 $[a,b]$ 的分法(即分点的取法)是任意的，无论等分与否皆可以，而且 C_k' 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 中的取法也是任意的.

注意 对于 $a<0\leqslant b$ 及 $a<b<0$ 的情形，也可类似证明，只须在各小区间上函数单调即可.

【定义】1. 有理函数的定积分 象上面那样对于有理整函数 $f(x)$，作出的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ 称为 $f(x)$ 的从 a 到 b 的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$.

【定理】2. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 是有理整函数，则其定积分具有下述性质：

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx \quad (\alpha, \beta \text{ 是常数.})$$

证明 设 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^{m-k}$，$g(x)=\sum\limits_{j=0}^{l} b_j x^{l-j}$. 把区间 $[a,b]$，如同【定理】1 证明中那样，分成 n 份，对于 $\alpha f(x)+\beta g(x)$ 作 S_n，则

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha f(\xi_i)+\beta g(\xi_i)](x_{i+1}-x_i) \quad (x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1})$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left[\alpha\left(\sum_{k=0}^{m} a_k\,\xi_i^{m-k}\right)+\beta\left(\sum_{j=0}^{l} b_j\,\xi_i^{l-j}\right)\right](x_{i+1}-x_i)$$

$$=\alpha\sum_{k=0}^{m}a_k\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^{m-k}(x_{i+1}-x_i)+\beta\sum_{j=0}^{l}b_j\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i^{l-j}(x_{i+1}-x_i).$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\alpha\sum_{k=0}^{m}a_k\int_a^b x^{m-k}dx+\beta\sum_{j=0}^{l}b_j\int_a^b x^{l-j}dx$$

$$\therefore\ \int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$ □

2·2 定 积 分

【定义】2. 定积分 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数. 把 $[a,b]$ 细分成 n 份，其分点依次为：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

此分法称为 $[a,b]$ 的一种分割，记为 Δ. 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上任取一点 ξ_k，和 $S_\Delta=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$，用 $|\Delta|$ 记各小区间长的最大值，即 $|\Delta|=\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)$. 如果当 $n\to\infty$ 且 $|\Delta|\to 0$ 时，对于任何分割方法及 ξ_k 的任意取法，S_Δ 恒有确定的极限值，则称这个极限值为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=\int_a^b f(x)dx.$$

(b 称为积分上限，a 称为积分下限). 此时，称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，由此定义知，求可积函数的定积分时，把 $[a,b]$ 等分也是可以的.

注意 在 $[a,b]$ 上的连续函数及单调有界函数都是可积的，由于其证明较难，故省略.

2.3 定积分的基本性质

【定义】3. $\int_a^a f(x)dx=0$，$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$，$(a<b)$.

【定理】3. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则它在被包含于 $[a,b]$ 的任意(子)区间 $[\alpha,\beta]$ 也可积. (证明从略.)

【定理】4. 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$, $[c,b]$ 可积，则它在 $[a,b]$ 也可积，且有

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

这对 $c\in[a,b]$ 的情况也成立.

证明 当 $a<c<b$ 时，对 $[a,b]$ 作分割 Δ:

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b,$$

当 $x_k<c<x_{k+1}$ 时，在分割 Δ 上加入新分点 c，所得新分割记为 Δ'，作差 $S_\Delta-S_{\Delta'}$，显然在此差中，$[x_k,x_{k+1}]$ 以外的对应部分为零，若设 $x_k<c_k<c<c_k'<x_{k+1}$，则

$$\begin{aligned}S_\Delta-S_{\Delta'}&=f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)-[f(c_k)(c-x_k)+f(c_k')(x_{k+1}-c)]\\&=f(\xi_k)(x_{k+1}-c+c-x_k)-[f(c_k)(c-x_k)+f(c_k')(x_{k+1}-c)]\\&=(c-x_k)[f(\xi_k)-f(c_k)]+(x_{k+1}-c)[f(\xi_k)-f(c_k')].\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |S_\Delta-S_{\Delta'}|\leqslant(c-x_k)|f(\xi_k)-f(c_k)|+(x_{k+1}-c)|f(\xi_k)-f(c_k')|.$$

因已假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即 $|f(x)|\leqslant M$，故

$|f(\xi_k)-f(c_k)|\leqslant 2M$，$|f(\xi_k)-f(c_k')|\leqslant 2M$，

$|S_\Delta-S_{\Delta'}|\leqslant 2M(x_{k+1}-x_k)\to 0$．（$\because\ \max|x_{k+1}-x_k|\to 0$．）

因此，即使在$[a,b]$内加入 c 点，对定积分的值也无影响，故

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=\int_a^b f(x)dx,$$

其中 $x_m=c$．

在 $c<a<b$，$a<b<c$ 的场合，结论也同样成立．　□

【定理】 5．若 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$可积，则 $\alpha f(x)+\beta g(x)$，$f(x)g(x)$ 在$[a,b]$也可积，且有

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\quad(\alpha,\beta\text{是常数}).$$

证明　如【定义】2，分割$[a,b]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha f(\xi_k)+\beta g(\xi_k)](x_{k+1}-x_k)$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

$$\therefore\quad\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

由于证明 $f(x)g(x)$ 可积较困难，故从略．　□

【定理】 6．如果 $f(x)$在$[a,b]$上可积且 $f(x)\geqslant\alpha>0$（或 $f(x)\leqslant\alpha<0$．α 是常数），则 $f(x)$的倒数 $f(x)^{-1}$ 在$[a,b]$上也可积．（证明从略．）

【定理】 7．如果 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$（$a<b$）可积，且 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx$．特别是，如果 $m\leqslant f(x)\leqslant M$（$m$，$M$ 是常数），则

$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$. ①

【证明】 如【定义】2，分割$[a,b]$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)(x_{k+1}-x_k),$$

$\therefore\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)\,dx$. 特别地，如果$g(x)=m=$常数，则$\int_a^b g(x)dx=m(b-a)$. 对于$f(x)=M$，也有相应说法。 □

【定理】 8. 若$f(x)$在$[a,b]$($a<b$)可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$也可积，且$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$. (证明从略).

【定理】 9. 若$f(x)$在$[a,b]$连续，$\int_a^b f(x)^2dx=0$，则$f(x)\equiv 0$.

证明 用反证法，设$f(x)\not\equiv 0$，则必有某点$\xi\in[a,b]$使$f(\xi)>0$ ($f(\xi)<0$的情形，证法类似)，因$f(x)$在ξ连续，故存在ξ的邻域区间$[r,\delta]\subset[a,b]$使$f(x)>0$ ($r\leqslant x\leqslant\delta$)②(第10章2.2【定理】4). 因此$f(x)\geqslant\underset{r\leqslant x\leqslant\delta}{\mathrm{Min}}f(x)=f(x_0)>0$ ($r\leqslant x_0\leqslant\delta$) (第10章2.4【定理】17). 若令$f(x_0)=c$，则$\int_a^b f(x)^2dx\geqslant\int_r^\delta f(x)^2dx\geqslant\int_r^\delta c^2dx=c^2(\delta-r)>0$，这与题设相矛盾. □

【定理】 10. 如果$f(x)$在$[a,b]$连续，则$\int_a^x f(t)dt$是x的连续函数，且$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$，即$\int_a^x f(t)dt$是$f(x)$的一个原函数.

证明 令$\int_a^x f(t)dt=F(x)$，则

---

① 如果$f(x)>g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$，特别是，若$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$. ——译注

② 如果引用〔定理〕7的译注，则有$\int_a^b f(x)^2dx\geqslant\int_r^\delta f(x)^2dx>0$，导致与题设矛盾从而证明了本定理. ——译注

$$\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]-f(x)=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)dt\right]-\frac{1}{h}\int_0^h f(x)$$

du（因为$\frac{1}{h}\int_0^h f(x)du=f(x)$，又$\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^{x+h}f(t)dt=$

$\int_0^h f(x+u)\,du$（设$t=x+u$）

故 $\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]-f(x)=\frac{1}{h}\int_0^h[f(x+u)-f(x)]du$

由题设条件$f(x)$连续，故对$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得$|f(x+u)-f(x)|<\varepsilon$ ($|u|<\delta$)．设$0<h<\delta$（对$h<0$类似处理）则

$$\left|\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_0^h[f(x+u)-f(x)]du\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+u)-f(x)|\,du\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h\varepsilon\,du=\varepsilon$$，因此$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]=f(x)$．这就证明了$F(x)$在点$x$处可导，且$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$，从而，更有$F(x)$是连续函数．

例题 1． 试证明$\frac{d}{dx}\int_{-x}^x t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\sqrt{2}\,x\sin x$．

解 左边$=\frac{d}{dx}\left[\int_{-x}^0+\int_0^x\right]=\frac{d}{dy}\left(-\int_0^y t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt\right)$

$$\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt\ (y=-x)$$

$$=-y\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)(-1)+x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=-x\sin\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)+x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,x\sin x.$$

例题 2． 设$f(x)$在$x\geqslant1$连续且$f(x)>0$．试求使下列函数$F(x)$取最小值

的 x 值.

$$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)dt \quad (x\geqslant 1).$$

解 $F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\,dt\right]$

$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)dt+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$

$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\,dt \lesseqgtr 0,\ \left(x\lesseqgtr 2\right).$$

故当 $x=2$ 时，$F(x)$取最小值.

【定理】 11. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=\Big[F(x)\Big]_a^b .$$

证明 给 $[a,b]$ 一个分割：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，则 $F(b)-F(a)=\sum_{k=0}^{n-1}[F(x_{k+1})-F(x_k)]$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)F'(\xi_k)\quad(x_k<\xi_k<x_{k+1})(\text{中值定值})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)\to\int_a^b f(x)dx,$$ $(n\to\infty,\ |\Delta|\to 0$，参看[定义] 2). □

2·4 换元积分法·分部积分法

【定义】 4. 换元积分法 设 $f(x)$在$[a,b]$连续 $x=g(t)$在$[\alpha,\beta]$可导，且为严格单调函数，又 $g'(t)$在$[\alpha,\beta]$上可积，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[g(t)]g'(t)dt$$ （设 $g(\alpha)=a$，$g(\beta)=b$.）这样的积分法称为换元积分法.

例题 求 $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

解 设$\sqrt{x^2+1}=t$，则$x^2+1=t^2$，∴ $xdx=tdt$.

$$\therefore\quad I=\int_1^{\sqrt{2}}t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

【定义】5. 分部积分法 若$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$可导，$f'(x)$，$g'(x)$可积，则$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

例题 求$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$.

解 $I=-\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2·5 广义定积分

【定义】6. 广义定积分 设$f(x)$在$I=[a,b]$不连续．从I中去掉各个不连续点的小邻域所剩下的集合I'是一些闭区间的并集，即是说$I'=\bigcup[\alpha_i,\beta_i]$．考虑定积分$\int_{I'}f(x)dx$．如果极限$\lim\limits_{I'\to I}\int_{I'}f(x)\,dx$有确定的值，则用它定义$\int_a^b f(x)dx$，并称为广义定积分．

例题 求$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

解 $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^1=2$.

注意 1. 对于广义定积分，2.3中定积分的性质有一部分已不定立．例如，由上面的例题知，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$和$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$在$[0,1]$上都是广义可积函数，但$f(x)g(x)=\frac{1}{x}$在$[0,1]$上不可积$\left(\text{因为}\int_0^1\frac{1}{x}dx=\infty\right)$.

2．正常的定积分，通过"换元"方法可以成为广义积分．例如，$I=\int_{-1}^1\frac{dx}{1+x^2}$．令$x=\frac{1}{t}$，$I=\int_{-1}^1\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{1+\frac{1}{t^2}}=-\int_{-1}^1\frac{1}{1+t^2}dt$，但这是

错误的*. 正确的作法是:

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=-\int_{-1}^{-\infty}\frac{dt}{1+t^2}-\int_{+\infty}^{1}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-\Big[\mathrm{tg}^{-1}t\Big]_{-1}^{-\infty}-\Big[\mathrm{tg}^{-1}t\Big]_{\infty}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

2·6　定积分的例题

1. $\int_a^b(x-a)(x-b)dx=\frac{1}{6}(a-b)^3$. [分部积分]

2. $\int_a^b(x-a)^m(x-b)dx=-\frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$,
(m 是自然数). [分部积分]

3. $I_{m,n}=\int_a^b(x-a)^m(x-b)^n dx=-\frac{n}{(m+1)(m+2)}I_{m+1,n-1}$,
(m, n 是自然数). [分部积分]

4. 设 $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, 则

$$\int_{-1}^{1}x^kP_n(x)dx=\begin{cases}0 & 0\leqslant k<n,\\ \frac{2.n!}{1.3.5\cdots(2n+1)}, & k=n.\end{cases}$$ [分部积分]

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \frac{2}{2n+1} & (m=n).\end{cases}$$ [分部积分]

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx=\pi-2$. [分部积分]

6. $\int_0^{\frac{1}{a}}x^3e^{ax}dx=\frac{2}{a^4}(3-e)$, $(a\neq 0)$. [分部积分]

7. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$(n 是大于 1 的自然数)

---

* 显然 $I=\Big[\mathrm{tg}^{-1}x\Big]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$. 用换元法的条件检查, 代换 $x=\frac{1}{t}$ 在[−1, 1]中的 $t=0$ 无定义, 更不是单调函数, 故不能这样换元. ——译注

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1}{n(n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & (n\text{ 是偶数}),\\[2ex] \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots4\cdot2}{n(n-2)\cdots5\cdot3}, & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

[分部积分]

8. $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x dx$

$=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$

$=\dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$,

(m,n 是大于 1 的自然数). [分部积分]

注意 3,7,8 是递推式.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\dfrac{\pi}{2}$. [分部积分]

10. $\int_0^1(\ln x)^n dx=(-1)^n n!$, ($n$ 是自然数). [分部积分]

11. $\int_0^1 x^n\ln x dx=-\dfrac{1}{(n+1)^2}$ (n 是自然数). [分部积分]

12. $\int_0^{\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=0$. $\left[\text{分部积分或}\int_0^{\infty}=\int_0^1+\int_1^{\infty}\text{, 设 }x=\dfrac{1}{t}\right]$.

13. $\int_0^1\dfrac{x^2dx}{x^6+1}=\dfrac{\pi}{12}$, ($x^3=t$).

14. $\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx=\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$, ($a<b$).

[$x-a=(b-a)\sin^2\theta$]

15. $\int_a^b\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}\,dx=\dfrac{\pi(b-a)}{2}$, ($a<b$).

[$x-a=(b-a)\sin^2\theta$]

16. $\int_a^b\dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\pi$, ($a<b$). [$x-a=(b-a)\sin^2\theta$]

17. $\int_a^b\sqrt{\dfrac{x^2}{(x-a)(b-x)}}\,dx$

$=\frac{\pi(3a^2+2ab+3b^2)}{8}$, $(a<b)$. $[x-a=(b-a)\sin^2\theta]$

18. $\int_0^1\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}=\frac{4}{3}$. $\left[x-\frac{1}{2}=t,\ t=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\theta\right]$

19. $\int_0^{2a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}=3(\sqrt[3]{3}+1)\ a^{2/3}$. $[\sqrt[3]{x^2-a^2}=t]$

20. $\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx=\pi a$. $[x=2a\sin^2\theta]$

21. $\int_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{4}$. $[x=\sin\theta]$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$. $\left[x+\frac{\pi}{4}=\theta\right]$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=1$. $\left[\text{半角公式,}\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\right]$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\begin{cases}\frac{\pi}{2ab}, & (ab>0),\\ -\frac{\pi}{2ab}, & (ab<0).\end{cases}$ $[\operatorname{tg}x=t]$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2x+3\cos x+2}dx=\ln\frac{9}{8}$. $[\cos x=t]$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x\cos 2x}=\sqrt{2}\ \ln(\sqrt{2}+1)\ -\frac{1}{2}\ln 3$.

$[\sin x=t]$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\ln 3$. $[\sin x-\cos x=t]$

28. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\operatorname{tg}^{-1}e-\frac{\pi}{4}$. $[e^x=t]$

29. $\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})dx=\frac{1}{2}$. $[\sqrt{x}=t$, 分部积分$]$

30. $\int_1^4\frac{1+3x}{x+2x^2+x^3}\,dx=\ln\frac{8}{5}+\frac{3}{5}$. [部分分式]

31. $\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx dx=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx dx$

$=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx dx=0$,（$m\neq n$，积化和差）

$\int_0^{2\pi}\sin^2 mx dx=\pi \quad (m\neq 0)$.

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 mx dx=\begin{cases}2\pi, & m=0\\ \pi, & m\neq 0.\end{cases}$$

（m，n 是自然数）.［倍角公式］

32. $\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{a}{b}$ $(0<b<a)$.

［部分分式］

33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ $\left[\frac{\pi}{2}-x=\theta\right]$

34. $\int_0^{\pi}x\ln\sin x dx=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$ $(\pi-x=\theta)$

解 1. $\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

$$=\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)\Big|_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^2}{2}dx$$

$$=-\frac{(x-a)^3}{6}\Big|_a^b=\frac{1}{6}(a-b)^3.$$

2. $\int_a^b(x-a)^m(x-b)dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}(x-b)\right]\Big|_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}dx$$

$$=-\frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\Big|_a^b=-\frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)(m+2)}.$$

3. $I_{m,n}=\int_a^b(x-a)^m(x-b)^n dx$

$$=\left[\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}(x-b)^n\right]\Big|_a^b-\int_a^b\frac{(x-a)^{m+1}}{m+1}n(x-b)^{n-1}dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,\,n-1}.$$

4. $I=\int_{-1}^1 x^k p_n(x)dx$

$$=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^1 x^k\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$=\frac{1}{2^n n!}\left[x^k\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]\Big|_{-1}^1$$

$$-\frac{k}{2^n n!}\int_{-1}^1 x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx.$$

$$\because\quad\left[x^k\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]\Big|_{-1}^1=0.$$

重复地进行这种运算，得

$$I=(-1)^k\frac{k(k-1)\cdots\cdots2\cdot1}{2^n n!}\int_{-1}^1\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n dx.$$

若 $k<n$，则

$$I=(-1)^k\frac{k!}{2^n n!}\left[\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^1=0.$$

若 $k=n$，则

$$I=\frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^1(x^2-1)^n dx=\frac{(-1)^n}{2^n}\int_{-1}^1(-1)^n(1-x^2)^n$$

令 $x=\cos\theta$，则

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^{2n}\theta(-\sin\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2\cdot(2n)(2n-2)\cdots2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3}\text{(对照 7)}$$

$$=\frac{2^{n+1}\cdot n!}{1\cdot3\cdots(2n+1)},$$

$\therefore \quad I=\dfrac{2\cdot n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

为了得出第二个等式，令 $p_m(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$.

则 $\int_{-1}^{1} p_m(x)\, p_n(x)dx =\sum_{k=0}^{m} a^k\int_{-1}^{1} x^k\, p_n(x)dx=0 \quad (m<n)$.

当 $m>n$ 时，将 m，n 交换，可得

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx=0.$$

当 $m=n$ 时 $\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx =\sum_{k=0}^{n} a_k\int_{-1}^{1} x^k\, p_n(x)dx$

$$=a_n\int_{-1}^{1} x^n\, p_n(x)dx=a_n\cdot\frac{2\cdot n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}. \qquad ①$$

其中 a_n 是 $p_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 的最高次项的系数。故 $a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，代入①式得

$$\int_{-1}^{1} p_m(x)p_n(x)dx =\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\cdot\frac{2\cdot n!}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}=\frac{2}{2n+1}.$$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx=x^2(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$

$$=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx=\pi-2.$$

6. $\int_0^{\frac{1}{a}} x^3 e^{ax} dx=x^3\cdot \dfrac{1}{a}e^{ax}\Big|_0^{\frac{1}{a}}-\int_0^{\frac{1}{a}}\dfrac{1}{a}e^{ax}\cdot 3x^2 dx$

$$=\frac{e}{a^4}-\frac{3}{a}\left\{\left[\frac{1}{a}e^{ax}x^2\right]_0^{\frac{1}{a}}-\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{e^{ax}}{a}\cdot 2x dx\right\}$$

$$=\frac{e}{a^4}-\frac{3}{a^4}e+\frac{6}{a^2}\left\{\left[\frac{e^{ax}}{a}\cdot x\right]\Big|_0^{\frac{1}{a}}-\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{e^{ax}}{a}dx\right\}$$

$$=\frac{-2e}{a^4}+\frac{6}{a^2}\left\{\frac{e}{a^2}-\left[\frac{e^{ax}}{a^2}\right]\Big|_0^{\frac{1}{a}}\right\}$$

$$=\frac{2}{a^4}(3-e).$$

7. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n-1}xdx$

$$=-[\cos x\cdot\sin^{n-1}x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cos xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx$$

$$=(n-1)(I_{n-2}-I_n),$$

$$\therefore\quad I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}. \qquad ①$$

当n为偶数时，把①中的n分别代成$n-2$，$n-4$，…，2，再把所得等式左边、右边各自相乘，整理后得

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0,\quad I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot dx=\frac{\pi}{2}.$$

当n为奇数时，把①中的n分别代成$n-2$，$n-4$，…，3，再把所得等式左边、右边各自相乘，整理后得

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1,\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1.$$

8. 由第十二章 1.6 方法 4，

$$I_{m,n}=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$$

因m，n是不小于 1 的自然数，从而右边第一项为零，

故 $I_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}.$

同样有 $I_{m,n}=\frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx.$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sec^2\frac{x}{2}dx-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx+\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

10. $I_n=\int_0^1(\ln x)^n dx=x(\ln x)^n\Big|_0^1-\int_0^1 x\,n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx$

$$=-n\int_0^1(\ln x)^{n-1}dx=-n\,I_{n-1}.$$

重复运用这个递推式可得 $I_n=(-1)^n n!$（这里利用了 $\lim\limits_{x\to+0}x(\ln x)^n=0$。可仿照第十一章 8.3 例题 1 得证）。

11. $\int_0^1 x^n\ln x dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}dx$

$$=-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n dx=-\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

12. $I=\int_0^\infty\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx+\int_1^\infty\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx.$

令 $x=\frac{1}{t}$，则

第二项 $\int_1^\infty\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=\int_1^0\frac{-\ln t}{(1+\frac{1}{t})^2}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$

$$=-\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}dt=-\int_0^1\frac{\ln t}{(1+x)^2}dx,$$

$\therefore\ \int_0^\infty\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=0.$

13. 设 $x^3=t$，则

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{x^6+1}=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\left(\frac{1}{3}dt\right)=\frac{1}{3}\cdot\mathrm{tg}^{-1}t\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}.$$

14. 设 $x-a=(b-a)\sin^2\theta$，则 $dx=2(b-a)\sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta$，

$$\int_a^b\sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(b-a)\sin^2\theta(b-a)\cos^2\theta}$$

$$\times 2(b-a)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=2(b-a)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta=2(b-a)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta-\sin^4\theta)d\theta$$

$$=2(b-a)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}\quad\text{(由公式 7)}$$

$$=\frac{\pi(b-a)^2}{8}.$$

15. 设 $x-a=(b-a)\sin^2\theta$，同上题一样，可得

$$\int_a^b\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{(b-a)\sin^2\theta}{(b-a)\cos^2\theta}}\,2(b-a)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$=2(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta=2(b-a)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi(b-a)}{2}.$$

16. 令 $x-a=(b-a)\sin^2\theta$，则

$$\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(b-a)\sin^2\theta\cdot(b-a)\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\pi.$$

17. 如前题，得

$$\int_a^b\frac{x^2}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a\cos^2\theta+b\sin^2\theta)^2 2(b-a)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(b-a)\sin^2\theta\cdot(b-a)\cos^2\theta}}d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^4\theta+2ab\cos^2\theta\sin^2\theta+b^2\sin^4\theta)d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[a^2\cos^4\theta+2ab\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+b^2\sin^4\theta]d\theta$$

$$=2\Big[(a^2-2ab)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\, d\theta+2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$+b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta\Big]$$

$$=2\left[(a^2-2ab)\frac{3}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}+2ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+b^2\frac{3}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}(3a^2+2ab+3b^2).$$

18. 设 $x-\frac{1}{2}=t$，则

$$I=\int_0^1\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\left(t^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}}.$$ 再令 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\,\theta$，

则 $$I=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\cdot(\sin\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{4}{3}.$$

19. 令 $\sqrt[3]{x^2-a^2}=t$，则 $x^2-a^2=t^3$，$2x\,dx=3t^2dt$.

$$\int_0^{2a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}=\int_{-a^{2/3}}^{\sqrt[3]{3}a^{2/3}}\frac{3t^2}{t^2}dt=3(\sqrt[3]{3}+1)a^{2/3}.$$

20. 令 $x=2a\sin^2\theta$，则 $dx=4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$.

$$\int_0^{2a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2a\cos^2\theta}{2a\sin^2\theta}}\cdot4a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=4a\cdot\frac{\pi}{4}=a\pi.$$

21. 令 $x=\sin\theta$，则

$$\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

22. 令 $x+\frac{\pi}{4}=\theta$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\left(\text{因 }\sin\theta\text{在}\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\right]\text{关于 }\theta=\frac{\pi}{2}\text{ 对称}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\sqrt{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=-\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}-1)$$

$$=\sqrt{2}\ln\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

23. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$

另解　令 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则用第十二章 1.6 的方法 3，

可得 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_0^1\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int_0^1 dt=1.$

24. 令 $\operatorname{tg}x=t$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{ab}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{bt}{a}\right)\Big|_0^{\infty}.$$

当 $ab>0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{tg}^{-1}\frac{bt}{a}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\quad I=\frac{\pi}{2ab}$.

当 $ab<0$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{bt}{a}\right)=-\frac{\pi}{2}$，$\therefore\quad I=-\frac{\pi}{2ab}$.

25. 令　$\cos x=t$，则 $-\sin x dx=dt$.

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x dx}{\cos^2x+3\cos x+2}=\int_1^0\frac{t(-dt)}{t^2+3t+2}=\int_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\ln\left|\frac{(t+2)^2}{t+1}\right|\Big|_0^1=\ln\frac{9}{8}.$$

26. 令　$\sin x=t$，则　$\cos x dx=dt$.

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x\cos 2x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x dx}{\cos^2x(1-2\sin^2x)}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{2t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right]dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\ln 3.$$

27. 令 $\sin x-\cos x=t$，则 $(\cos x+\sin x)dx=dt$.

又 $t^2=1-\sin 2x$，$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{3+\sin 2x}dx=\int_{-1}^0\frac{dt}{4-t^2}$

$$=-\frac{1}{4}\int_{-1}^0\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_{-1}^0=\frac{1}{4}\ln 3.$$

28. 设 $e^x=t$，则

$$\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int_1^e\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t}=\operatorname{tg}^{-1}t\Big|_1^e=\operatorname{tg}^{-1}e-\frac{\pi}{4}.$$

29. 令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2\,tdt$.

$$\therefore\int_0^1\ln(1+\sqrt{x})\,dx=\int_0^1\ln(1+t)2\,tdt=t^2\ln(1+t)\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1 t^2\frac{1}{1+t}dt=\ln 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\ln 2-\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|1+t|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

30. $\int_1^4\frac{1+3x}{x+2x^2+x^3}dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$=\left(\ln|x|-\frac{2}{x+1}-\ln|x+1|\right)\Big|_1^4=\ln\frac{8}{5}+\frac{3}{5}.$$

31. $I=\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_0^{2\pi}=0,\quad (m\neq n).$$

又 $\int_0^{2\pi}\sin^2 mxdx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2mx)dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2mx}{4m}\right)\Big|_0^{2\pi}$

$=\pi\quad (m\neq 0).$

类似可导出要证明的最后一个等式.

32. $\int_0^{\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2-b^2}\left(\frac{x}{x^2+b^2}-\frac{x}{x^2+a^2}\right)dx$

$$=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\frac{a}{b},\quad (a>b>0).$$

33. 令$\frac{\pi}{2}-x=\theta$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\ln\cos\theta\,(-d\theta)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx.$$

$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln 2+\ln\sin x+\ln\cos x)dx$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I.$$

另一方面，若设 $2x=\theta$，则

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\theta\,d\theta$

$=I.$

$\therefore\quad I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\ I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$

34. 令 $\pi-x=\theta$，则

$$I=\int_0^{\pi}x\ln\sin x\,dx=\int_{\pi}^0(\pi-\theta)\ln\sin\theta(-d\theta)$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-\theta)\ln\sin\theta\,d\theta=\pi\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\,d\theta-\int_0^{\pi}\theta\ln\sin\theta\,d\theta$$

$$=\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\cdot 2-I,$$

$$\therefore\quad I=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

2·7 有关定积分的不等式的例题

下面设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

例题 1. 当 $p>1$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. 当 $p\geqslant 1$ 时，

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. $\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx$，$(f(x)>0)$.

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}<1$ $(n>0)$，$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\leqslant 1\right]$.

5. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{\pi}{2}$.

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

6. $\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. $\left[1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}\leqslant\sqrt{2}\right]$

7. $\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{\pi}{6}$，$(n>2)$. $\left[1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

8. $0.78<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<1.08$ $\cdot\left[1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right]$

9. $1<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{3}$.

$$\left[1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}<\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\right]$$

10. $\frac{1}{2(n+1)}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^n x dx<\frac{1}{2(n-1)}$, $(n>2)$.

$$[\mathrm{tg}^{n+2}x\leqslant\mathrm{tg}^n x\leqslant\mathrm{tg}^{n-2}x]$$

11. $\frac{\pi}{7}<\int_0^1\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{3}}dx<\frac{\pi}{4}$.

$$\left[(1-\sqrt{x})^{2/3}\leqslant\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/3}\leqslant(1-\sqrt{x})^{1/3}\right]$$

12. $1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{2}{\pi}\leqslant\frac{\sin x}{x}<1\right]$

13. $\frac{1}{2}<\int_0^1 x^x dx<1$. $[x\leqslant x^x\leqslant 1]$

14. $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx<1+\frac{1}{e}$. $\left[\int_0^{\infty}=\int_0^1+\int_1^{\infty},\ \int_1^{\infty}e^{-x^2}dx<\int_1^{\infty}e^{-x}dx\right]$

解 1. 令$U(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{x^{-q}}{q}$，由$U(x)$的图象易知，在$x>0$内$U(x)\geqslant$ 1. 把$x=\frac{y^{1/q}}{z^{1/p}}$代入$\frac{x^p}{p}+\frac{x^{-q}}{q}\geqslant 1$中，得 $yz\leqslant\frac{y^p}{p}+\frac{z^q}{q}$…… ①

令 $A=\int_a^b|f(x)|^p dx$，$B=\int_a^b|g(x)|^q dx$，并把$y=\frac{|f(x)|}{A^{1/p}}$ $z=\frac{|g(x)|}{B^{1/q}}$代入①，然后两边各自积分，得

$$\frac{\int_a^b|f(x)g(x)|dx}{A^{1/p}B^{1/q}}\leqslant\int_a^b\left(\frac{1}{p}\cdot\frac{f(x)^p}{A}+\frac{1}{q}\cdot\frac{g(x)^q}{B}\right)dx\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

去分母得$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)g(x)|dx$

$$\leqslant A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)^q|dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2．当 $p=1$ 时

$$\int_a^b|f(x)+g(x)|dx\leqslant\int_a^b(|f(x)|+|g(x)|)dx=\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|g(x)|dx.$$

当 $p>1$ 时，只须证明 $f(x)\geqslant0$，$g(x)\geqslant0$ 时的情形即可．由前题结果有

$$\int_a^b(f(x)+g(x))^p dx=\int_a^b[f(x)+g(x)][f(x)+g(x)]^{p-1}dx$$

$$=\int_a^b f(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}dx+\int_a^b g(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}dx$$

$$\leqslant\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_a^b g(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\left(\int_a^b[f(x)+g(x)]^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$(p-1)q=p$．因此上式最后两项的第二个因式成为 $\left(\int_a^b\right.$ $\left.[f(x)+g(x)]^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$．用它除上面不等式的两端得

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]^p dx\leqslant\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b g(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3．令 $\frac{b-a}{n}=h$，由关于算术平均与几何平均的不等式得

$$\frac{f(a)+f(a+b)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)}{n}$$

$$\geqslant\sqrt[n]{f(a)f(a+h)f(a+2h)\cdots f(a+(n-1)h)}.$$

取对数得

$$\ln\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a+kh)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln f(a+kh).$$

利用 $\frac{1}{n}=\frac{h}{b-a}$ 得

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}h\sum_{k=0}^{n-1}f(a+kh)\right)\geqslant\frac{1}{b-a}h\sum_{k=0}^{n-1}\ln f(a+kh).$$

因 $\ln x$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，其定积分都存在，故让 $n\to\infty$，得

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

4. 因 $0\leqslant x\leqslant 1$，故 $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\leqslant 1$，由此对 x 积分，得

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}}dx\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}dx\leqslant\int_0^1 1\cdot dx.$$

即 $$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}dx\leqslant 1.$$

5. 因 $0<x<1$，故

$$2(1-x^2)>(1+x^2)(1-x^2)=1-x^4>1-x^2.$$

从而 $$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

利用 $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2},$$

对上面的不等式积分得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即 $$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx<\frac{\pi}{2}.$$

6. 在 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 内，$1<\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\sqrt{2}$，两边积分得

$$\frac{\pi}{2}<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

7. 在 $0<x<\frac{1}{2}$内，注意到 $n>2$，有$1>1-x^n>1-x^2$，故 $1<\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

由此积分得.

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}1\cdot dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\sin^{-1}x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}.$$

8. 当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\sin x<x$，故

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

由此积分得

$$0.78<\frac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=2-2\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}<1.08.$$

9. 当 $0<x<1$ 时，$0<\sin^2 x<x^2$，故.

$$1<\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}<\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}.$$

由此积分得

$$1<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}}<\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}=2\sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

10. 对于 $0<x<\frac{\pi}{4}$，有 $\operatorname{tg}^{n+2}x<\operatorname{tg}^n x<\operatorname{tg}^{n-2}x$，

$$\therefore\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{n+2}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,dx=I. \qquad ①$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^n x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx=J. \qquad ②$$

由① $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^n x(\sec^2 x-1)dx<I$，$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^n x\sec^2 x\,dx-I<I$，

$\frac{1}{n+1}\operatorname{tg}^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}<2I.\quad \therefore\quad \frac{1}{2(n+1)}<I.$

其次由②，有 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{n-2}x\sec^2 x\,dx-I$$

$$<\frac{1}{n-1}\operatorname{tg}^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I.$$

$$\therefore\quad 2I<\frac{1}{n-1},\quad I<\frac{1}{2(n-1)}.$$

总起来 $\dfrac{1}{2(n+1)}<I<\dfrac{1}{2(n-1)}.$

11. 对于 $0<x<1$，有

$$(1-\sqrt{x})^{2/3}<\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/3}<(1-\sqrt{x})^{1/3}.$$

由此积分，得

$$\int_0^1(1-\sqrt{x})^{2/3}dx<\int_0^1\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/3}dx<\int_0^1(1-\sqrt{x})^{1/3}dx.$$

又 $(1-\sqrt{x})^{1/3}<1-\frac{1}{3}\sqrt{x}$，

$$\therefore\quad \int_0^1(1-\sqrt{x})^{1/3}dx,\quad <\int_0^1\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{x}\right)dx=\left(x-\frac{2}{9}x^{3/2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{7}{9}<\frac{\pi}{4}.$$

令 $1-\sqrt{x}=t$，则 $x=(1-t)^2$，从而，

$$\int_0^1(1-\sqrt{x})^{2/3}dx=\int_0^1 t^{2/3}\cdot 2(1-t)dt$$

$$=2\left(\frac{3}{5}t^{5/3}-\frac{3}{8}t^{8/3}\right)\Big|_0^1=\frac{9}{20}=0.45<\frac{\pi}{7}.$$

综上可得 $\dfrac{\pi}{7}<\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/3}dx<\frac{\pi}{4}.$

12. 对于 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，有 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1.$

由此积分得 $1<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{\pi}{2}.$

注意 要证 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}\left(\text{当 }0<x<\dfrac{\pi}{2}\text{ 时}\right)$，只须画出 $f(x)=\sin x$

$\frac{2}{\pi}x$ 的图象即可.

13. 对于 $0<x<1$，有 $x<x^x<1$. 由此积分得 $\frac{1}{2}<\int_0^1 x^x dx<1$.

14. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^\infty e^{-x^2}dx$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1 1\cdot dx=1.$$

又，对于 $x>1$ 有 $x^2>x$，　∴　$e^{-x^2}<e^{-x}$.

$$\therefore\quad \int_1^\infty e^{-x^2}dx<\int_1^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_1^\infty=e^{-1}.$$

$$\therefore\quad \int_1^\infty e^{-x^2}dx<1+e^{-1}.$$

2·8 由定积分表示的函数

【定理】 12. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，则可把 $\int_a^x f(t)dt$ 看作上限 x 的函数.

令 $\int_a^x f(t)dt=F(x)$，则由 2.3【定理】10 知，$F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，且

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$.

例1. 设 $g(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}\Big/\int_1^a \frac{dt}{t}$，则可证明 $g(x)$ 与 $\log_a x$ 具有完全相同的性质(诸如，$g(1)=0$，$g(xy)=g(x)+g(y)$ 等.)

因此可定义　$\log_a x=\int_1^x \frac{dt}{t}\Big/\int_1^a \frac{dt}{t}$.　　①

显然，若选取 a 使 $\int_1^a \frac{dt}{t}=1$，则①更为简便. 把这个 a 特别用 e 表示，并称为自然对数的底，于是①成为 $\log_e x=\int_1^x \frac{dt}{t}$.　　②

并将 $\log_e x$ 简写为 $\ln x$，称为 x 的自然对数. $\ln x$ 的反函数定义为 e^x. 因此

$\ln e^x \equiv x$, $e^{\ln x} \equiv x$.

又由②，$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$，故

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}}$$

$$= e^{\frac{d}{dx}\ln(1+x)\left.\right|_{x=0}} = e^{\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0}} = e.$$

特别地，取 $x=\frac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$，故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$ 这与 e 的通常的定义一致，

例2. 同样，$f(x) = -\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$* 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上表示 x 的连续函数，并可证明它与 $\cos^{-1}x$ 具有完全相同的性质，故可定义 $\cos^{-1}x = -\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$，其反函数定义为 $\cos x$，进一步定义 $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. 于是 $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

今令 $y = \text{sco}\, x$，则 $x = \cos^{-1}(\cos x) = \cos^{-1}y$. 对 x 求导得

$$1 = \frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}\cos^{-1}(\cos x) = \frac{d}{dy}(\cos^{-1}y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1-y^2}$，即 $\frac{d}{dx}\cos x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sin x$.

而 $$\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\cos x$$

$$= \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sqrt{1-\cos^2 x}) = \cos x.$$

---

* 注意，此为广义定积分，可仿照本章 2.5 例 1 的办法，证明此积分是存在的。——译注

从例 1、例 2 可见，利用具有变动上限的定积分可以定义某些函数（包括已知的和新的函数）.

2·9 定积分的近似计算

【公式】1.（梯形公式）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，分割 $[a,b]$ 为 $2n$ 等份，其分点依次为：$a_0=x_0$，x_1，x_2，…，x_{2n-1}，$x_{2n}=b$. 令 $y_k=f(x_k)$（$k=0, 1, 2, \cdots, 2n$），$h=\frac{b-a}{2n}$，则

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\left[\frac{1}{2}(y_0+y_{2n})+(y_1+y_2+\cdots+y_{2n-1})\right].$$

此公式对于计算精度要求不太高的场合适用. 若要求误差更小，则使用

【公式】2.（辛卜生公式） 沿用【公式】1 中使用的记号，有

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})].$$

证明 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^{a+2h} f(x)dx=F(a+2h)-F(a).$$

由泰勒定理展开 $F(a+2h)$ 后，可得

$$右边=2hF'(a)+\frac{(2h)^2}{2!}F''(a)+\frac{(2h)^3}{3!}F'''(a)+\frac{(2h)^4}{4!}F^{(4)}(a)+$$
$$+\frac{(2h)^5}{5!}F^{(5)}(a)+\cdots$$
$$=2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)+$$
$$+\frac{4}{15}h^5f^{(}\ (a)+\cdots$$
$$=2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{4}{3}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)$$
$$+\frac{4}{15}h^5f^{(4)}(a)+\cdots$$

而 $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f'''(a)+\frac{h^4}{24}f^{(4)}(a)+$

$+\cdots$

$f(a+2h)=f(a)+2hf'(a)+2h^2f''(a)+\frac{4}{3}h^3f'''(a)+\frac{2}{3}h^4f^{(4)}(a)$

$+\cdots$

$\therefore\quad \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)]$

$=2hf(a)+2h^2f'(a)+\frac{3}{4}h^3f''(a)+\frac{2}{3}h^4f'''(a)+$

$+\frac{5}{18}h^5f^{(4)}(a)+\cdots$　　②

因此，如果 h 充分小由①和②得

$$\int_a^{a+2h}f(x)dx\approx\frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)]=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2),$$

(h 充分小)。

类似地可得

$$\int_{a+2h}^{a+4h}f(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4),$$

……………………

$$\int_{b-2h}^{b}f(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}),$$

(h 充分小)。

把以上所有近似式相加，得

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})].$$

如果 $f(x)$ 有四阶导数 $f^{(4)}(x)$ 存在，且 M 是 $|f^{(4)}(x)|$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，则其相应截断误差 E_n 的绝对值 $|E_n|\leqslant\frac{M(b-a)^5}{2880n^4}$. □

§3. 定积分的应用

3.1 利用定积分导出级数和的例题

例题 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)=\ln 2.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right]=\frac{7}{3}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})=\frac{2}{3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right]=2(\sqrt{2}-1).$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}\right]$
$=\ln(1+\sqrt{2}).$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]=\frac{\pi}{2}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right]=\frac{\pi}{4}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}(1^\alpha+2^\alpha+3^\alpha+\cdots+n^\alpha)=\frac{1}{1+\alpha}$, $(\alpha>0)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+3\sqrt{n^2-3^2}+\cdots$
$+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2})=\frac{1}{3}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{-1}.$

解 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\ln(1+x)\Big]_0^1=\ln 2.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right]$

$$=\int_0^1(1+x)^2dx=\frac{(1+x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{7}{3}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}\right.$

$$\left.+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}.$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2(\sqrt{2}-1).$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\Big[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big]_1^2=\ln(1+\sqrt{2}).$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

7. $$\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{tg}^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

8. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+1}}(1^a+2^a+\cdots+n^a)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^a+\left(\frac{2}{n}\right)^a+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right]$$

$$=\int_0^1 x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_0^1=\frac{1}{a+1},\quad (a>0).$$

9. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left[\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+3\sqrt{n^2-3^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{2}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\frac{3}{n}\sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{n-1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left[\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)\right]$

$=\exp\left(\int_0^1\ln x dx\right)=\exp\left[x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx\right]$

$=e^{-1}$. (利用 $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0$.)

3·2 平面图形的面积

【定义】1. 面积 设平面上两条曲线的方程为 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$，$f_1(x)\geqslant f_2(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，则它们与直线 $x=a$，$x=b$ 围成的面积 S 定义为

$$S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]dx.\quad(\text{直角坐标.})$$

例题 1. 试证明抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 围成的面积为 $\frac{9}{2}$.

解 如图 12—1，$f_1(x)=x+2$，$f_2(x)=x^2$，

$$\therefore\quad S=\int_{-1}^2(x+2-x^2)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^2=\frac{9}{2}.$$

例题 2. 试证明三次曲线 $y=x^3-2x$ 与直线 $y=x+2$ 围成的面积为 $\frac{27}{4}$.

解 如图 12—2，曲线与直线的切点、交点的横坐标分别为 −1、2. 故

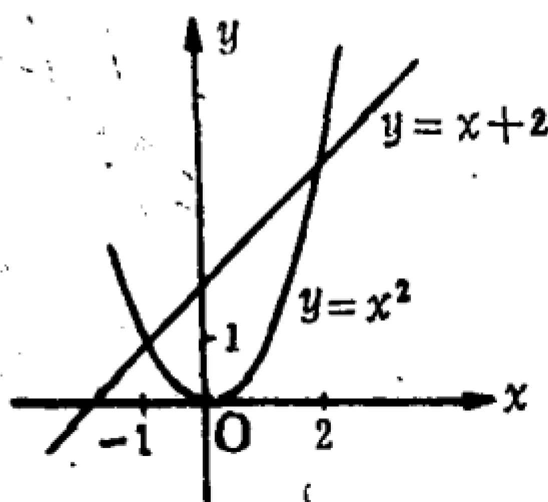


图 12-1

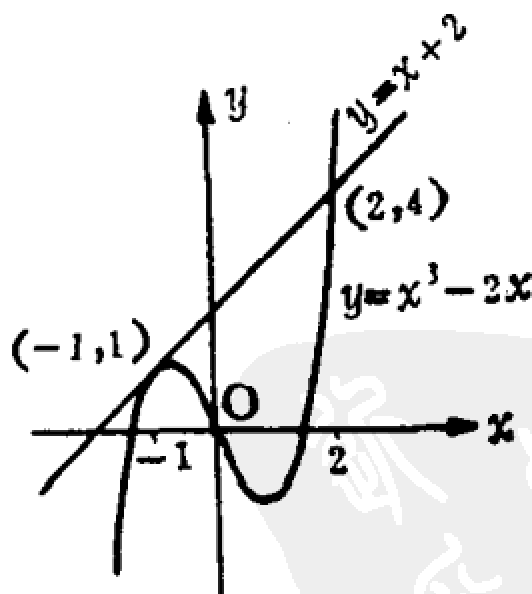


图 12-2

$$S=\int_{-1}^2[x+2-(x^3-2x)]dx=\left(2x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^2=\frac{27}{4}.$$

例题 3. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a, b>0)$内的面积为πab.

解 由于此椭圆关于两坐标轴对称，故只须计算图 12—3 中 $0ab$ 的面积，然后再四倍，ab 弧的方程为 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，所以

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{4b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a$$
$$=\pi ab.$$

例题 4. 两抛物线 $y^2=4px$ 与 $x^2=4py(p>0)$围成的面积为$\frac{16}{3}p^2$.

解 如图 12—4，两抛物线的两个交点的坐标为 $(0, 0)$和 $(4p, 4p)$. 故所求面积为

$$S=\int_0^{4p}\left(2\sqrt{px}-\frac{x^2}{4p}\right)dx=\left(2\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{12p}\right)\Big|_0^{4}$$
$$=\frac{16}{3}p^2.$$

例题 5. 四条抛物线

$x^2=a_1y$, $x^2=a_2y$, $y^2=b_1x$, $y^2=b_2x$ $(a_2>a_1>0$, $b_2>b_1>0)$ 围成的面积为$\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1)$.

解 如图 12-5，容易算出，$x^2=a_iy$ 与 $y^2=b_kx$ 的交点（不是原点的那个交点）的横坐标为$\sqrt[3]{a_i^2b_k}$，故它们围成的面积 $S_{i,k}$ 为

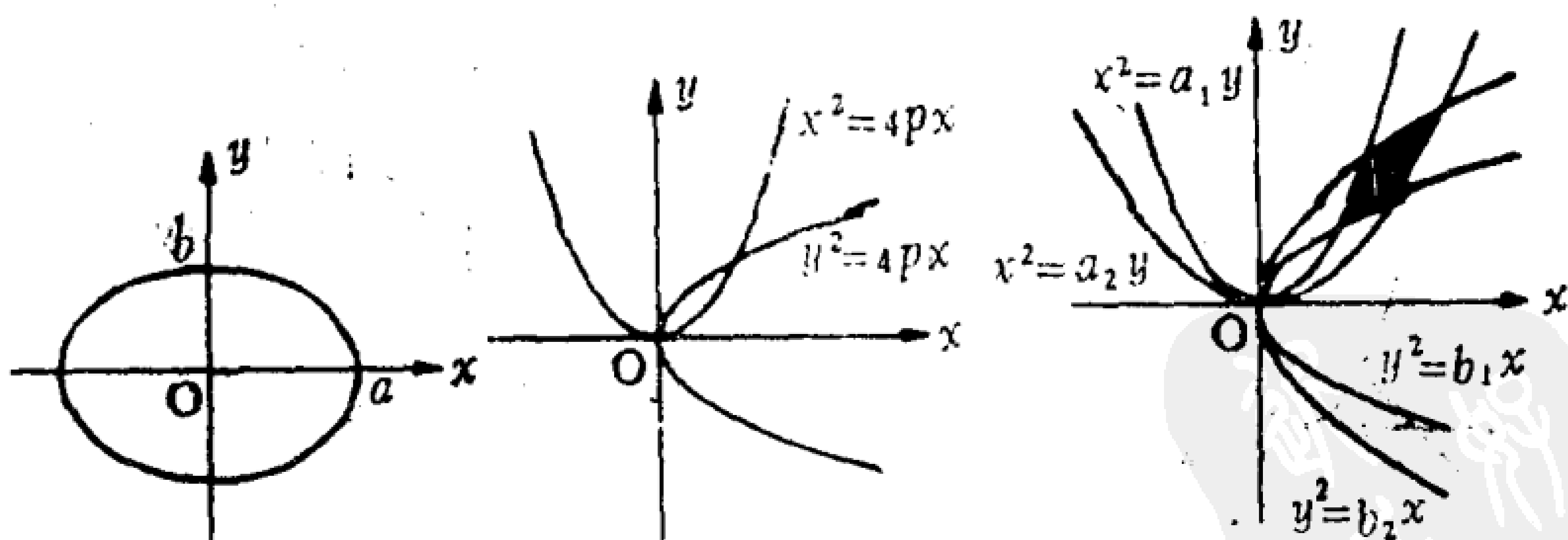


图12-3　　图12-4　　图12-5

$$S_{i,k}=\int_0^{\sqrt[3]{a_i^2b_k}}\left(\sqrt{b_kx}-\frac{x^2}{a_i}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{b_k}\,x^{3/2}-\frac{x^3}{3a_i}\Bigg]_0^{\sqrt[3]{a_ib_k}}=\frac{a_ib_k}{3}.$$

从而，所求面积$=S_{2,2}-S_{1,2}-S_{2,1}+S_{1,1}$

$$=\frac{1}{3}(a_2b_2-a_1b_2-a_2b_1+a_1b_1)=\frac{1}{3}(a_2-a_1)(b_2-b_1).$$

例题 6. 曲线$y^2=x^2(1-x)$自身围成的面积为$\frac{8}{15}$.

解 如图12—6，由于曲线关于x轴对称，故所求面积S为

$$S=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\left\{\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,x\right]\Bigg|_0^1+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx\right\}=2\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1-x)^{5/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{15}.$$

例题 7. 曲线$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(a>0)$围成的面积为$\frac{3}{8}\pi a^2$

解 如图12—7，曲线关于两坐标轴对称，故所求面积

$$S=4\int_0^a(a^{2/3}-x^{2/3})^{\frac{3}{2}}dx.$$

令$x=a\sin^3\theta$，则$dx=3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$，所以

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos^3\theta\,3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$=12a^2\left(\frac{3}{4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

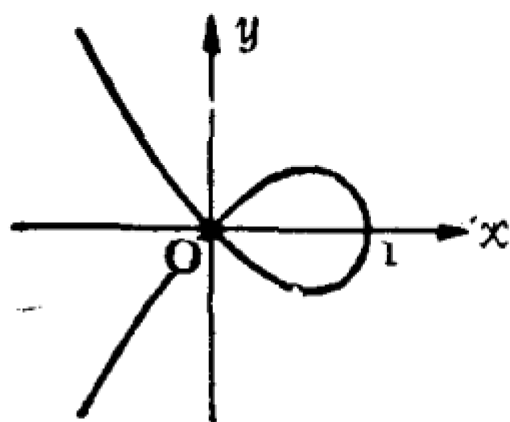


图12-6

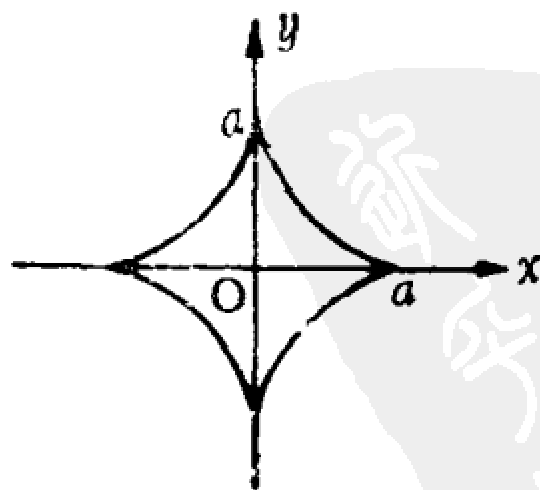


图12-7

例题 8. 两椭圆$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\leqslant1$，$\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2\leqslant1$公共部分的面积为

$S=4ab\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}$.

解 利用两椭圆关于直线$y=x$的对称性，可求出两椭圆在第一象限的交点为$x=y=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$(令为c)．如图12—8，又由椭圆关于两轴的对称性，得所求面积为

$$4\left[2\int_0^c\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-c^2\right]=\frac{4b}{a}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^c$$

$$-4c^2=4ab\sin^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=4ab\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{a}.$$

例题 9. 曲线$y^4-axy^2+x^4=0$ $(a>0)$在第一象限围成的面积为

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi a^2}{32}.$$

解 就y解曲线方程得

$$y^2=\frac{x}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4x^2}),\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2}\right).$$

如图12—9，若用y_1，y_2 $(y_2\geqslant y_1)$代表曲线对应于同一x的两个y坐标，则

$$y_2^2=\frac{x}{2}(a+\sqrt{a^2-4x^2}),\ y_1^2=\frac{x}{2}(a-\sqrt{a^2-4x^2}),$$

$$y_2-y_1=(y_2^2+y_1^2-2y_1y_2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ax-2x^2}.$$

故所求面积 $S=\int_0^{\frac{a}{2}}(y_2-y_1)dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{ax-2x^2}\,dx$

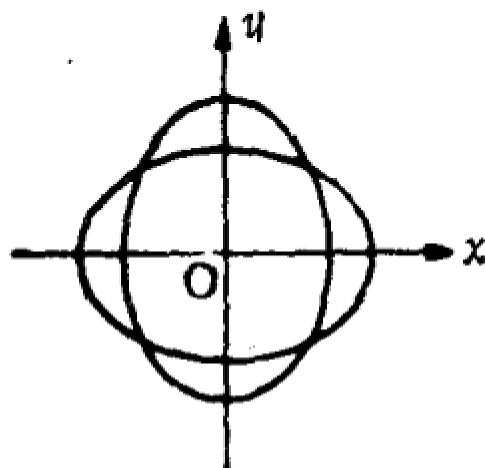


图12–8

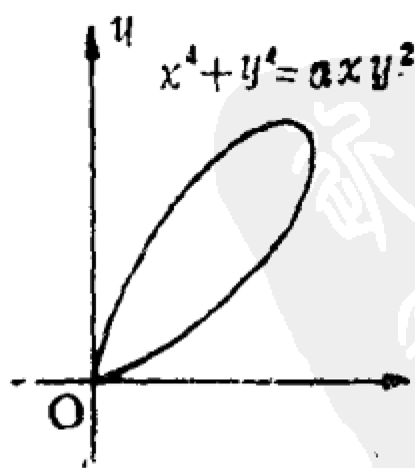


图12–9

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}-x\right)^2}\quad dx.$$

令 $x-\frac{a}{4}=t$，则 $S=\sqrt{2}\int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}}\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-t^2}\ dt=$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-t^2}\ dt=2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a}{4}\right)^2\sin^{-1}\left(t\Big/\frac{a}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}t\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2-t^2}\ \right]\Bigg|_0^{\frac{a}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{32}\pi a^2.$$

例题10. 曲线 $y^2(a-x)=x^2\ (a+x)\ (a>0)$ 围成的面积 S_1 为 $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$，又与其渐近线“围成”的面积 S_2 为 $2a^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$.

解 就 y 解曲线方程得

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}},\ (-a\leqslant x\leqslant a).$$

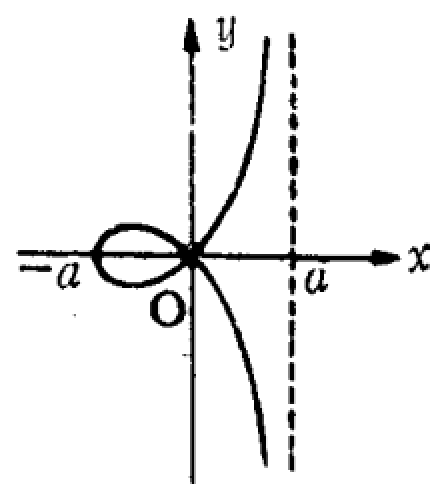


图12-10

如图 12—10，$S_1=-2\int_{-a}^{0}x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

在此令 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=t$，则 $x=\frac{a(t^2-1)}{1+t^2}$，

$$dx=\frac{4at}{(1+t^2)^2}dt.$$

$$S_1=-8a^2\int_0^1\frac{t^2(t^2-1)dt}{(1+t^2)^3}=-8a^2\left\{\left[\frac{-t(t^2-1)}{4(1+t^2)^2}\right]\Bigg|_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{3t^2-1}{(1+t^2)^2}dt\right\}$$

$$=-8a^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left\{3\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-4\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$=-2a^2\left\{3\left[\mathrm{tg}^{-1}t\right]\Bigg|_0^1-4\left[\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}t\right]\Bigg|_0^1\right\}$$

$$=-2a^2\left(\frac{3}{4}\pi-1-\frac{\pi}{2}\right)=2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$ (参照§1. 1.4.)

其次，$S_2=2\int_0^a x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\ dx=8a^2\int_1^{\infty}\frac{t^2(t^2-1)}{(1+t^2)^3}$

$$=8a^2\left\{\left[-\frac{t(t^2-1)}{4(1+t^2)^2}\right]\Big|_0^\infty+\frac{1}{4}\int_1^\infty\frac{3t^2-1}{(1+t^2)^2}dt\right]$$

$$=2a^2\left\{3\Big|_1^\infty\frac{1}{1+t^2}dt-4\int_1^\infty\frac{1}{(1+t^2)^2}dt\right\}$$

$$=2a^2\left\{3\left[\operatorname{tg}^{-1}x\right]\Big|_1^\infty-4\left[\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-1}t\right]\Big|_1^\infty\right\}$$

$$=2a^2\left\{3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-4\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}$$

$$=2a^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

例题11． 如果二次曲线 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ 表示椭圆，则其内部的面积 S 为

$$S=\frac{\pi(af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc)}{(ab-h^2)^{3/2}}.$$

解 将已知方程看作y的二次方程，解出 y，如图 12—11．设其两根为 y_1，y_2（不妨设 $y_2\geqslant y_1$），则

$$y_2=\frac{-hx-f+\sqrt{D}}{b},\quad y_1=\frac{-hx-f-\sqrt{D}}{b}.$$

其中 $D=(hx+f)^2-b(ax^2+2gx+c)$

$$=(h^2-ab)x^2+2(hf-bg)x+f-bc.$$

设方程 $D=0$ 有二实根 α，$\beta(\alpha<\beta)$，则当 $x=\alpha$ 及 $x=\beta$ 时都有 $y_1=y_2$，这意味着椭圆的最左点的横坐标为 α，其最右点的横坐标为 β，再则，当 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 时，为了使所给方程表示椭圆(实曲线)，必须 $D\geqslant0$，从而，必须 $h^2-ab<0$．这样，所求面积 $S=\int_\alpha^\beta(y_2-y_1)dx=\int_\alpha^\beta\frac{2\sqrt{D}}{b}dx$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{2\sqrt{(ab-h^2)(x-\alpha)(\beta-x)}}{b}dx.$$ 由本章 2.6 例题 14，

$$S=\frac{2\sqrt{ab-h^2}}{4b}[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta].$$

利用方程 $D=0$ 根与系数的关系，由此式得

$$S=\frac{\pi\sqrt{ab-h^2}}{4b}\left[\frac{4(hf-bg)^2}{(h^2-ab)^2}-4\frac{f^2-bc}{h^2-ab}\right]$$

$$=\frac{\pi\sqrt{ab-h^2}}{4b}\frac{b(af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc)}{(ab-h^2)^2}$$

$$=\frac{\pi(af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc)}{(ab-h^2)^{3/2}}.$$

定理 1. 如图 12—12，设曲线的极坐标方程为 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$. ($f(\theta)$连续). 则 $\overset{\frown}{AB}$, OA, OB 围成的面积 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)d\theta$.

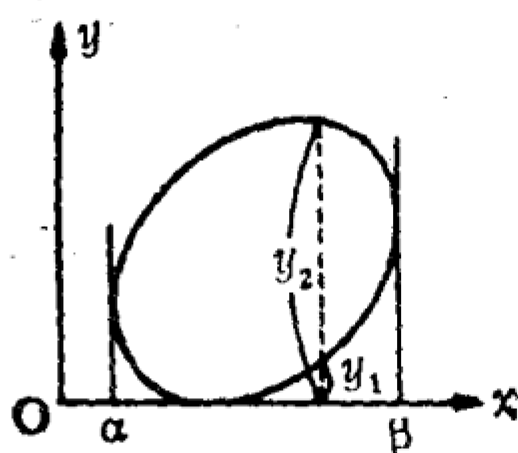


图12-11

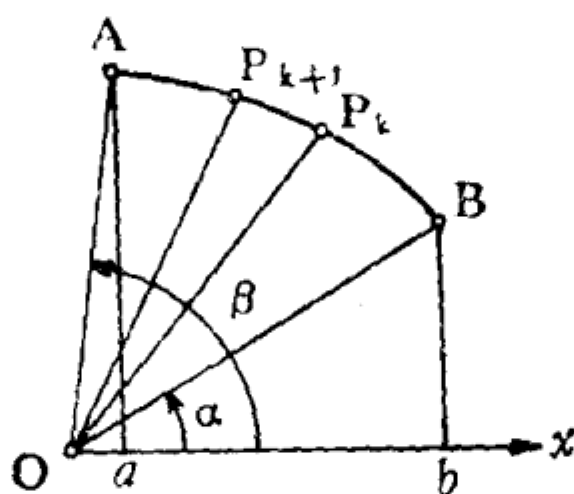


图12-12

证明 (曲线上)同一点的直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 之间有下列关系：$x=\bar{r}\cos\theta$, $y=\bar{r}\sin\theta$ ($\bar{r}$ 是 θ 的函数).

由图可得

$S=$图形 $AabB$ 面积$+\Delta OaA$ 面积$-\Delta ObB$ 面积

$$=\int_a^b ydx+\frac{1}{2}r^2(\beta)\sin\beta\cos\beta-\frac{1}{2}r^2(\alpha)\sin\alpha\cos\alpha$$

其第一项 $=\int_\beta^\alpha r\sin\theta(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta=\frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta\Big|_\beta^\alpha$

$$-\int_\beta^\alpha\frac{r^2}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta-\int_\beta^\alpha r^2\sin^2\theta d\theta,$$

$$\therefore\quad S=-\int_\beta^\alpha\frac{r^2}{2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2d\theta.$$ □

例题 1. 曲线 $r^2=a^2\cos2\theta$ $(a>0)$ 围成的面积是 a^2.

解　曲线关于 x 轴及 y 轴都对称，如图 12—13．在原点切线斜率为 1．故所求面积 $S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta=2a^2\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2$.

例题 2． 曲线 $r=a\sin n\theta$（$n\geqslant 2$ 为自然数）的一叶内的面积是 $\frac{\pi a^2}{4n}$.

解　如图 12—14，所求面积 $=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}(a\sin n\theta)^2 d\theta$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{1-\cos 2n\theta}{2}d\theta=\frac{a^2}{4}\left(\theta-\frac{\sin 2n\theta}{2n}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi a^2}{4n}.$$

$r=a\sin n\theta$ 称为玫瑰线，当 $n=2$ 时，$r=a\sin 2\theta$ 称为四叶玫瑰线，图中只画出其中一叶$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$．当 $n=3$ 时，$r=a\sin 3\theta$ 称为三叶玫瑰线，它在第一象限的一叶对应于 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$.

例题 3． 曲线 $r=a\cos\theta+b$（$a>b>0$），如图 12—15 的两个圈之间的面积S为

$$S=(a^2+2b^2)\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{b}{a}\right)+3b\sqrt{a^2-b^2}.$$

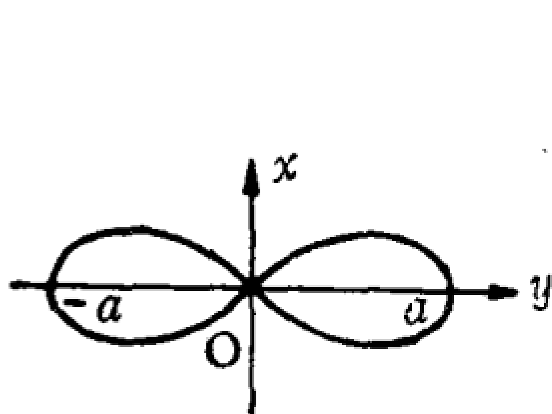


图12–13

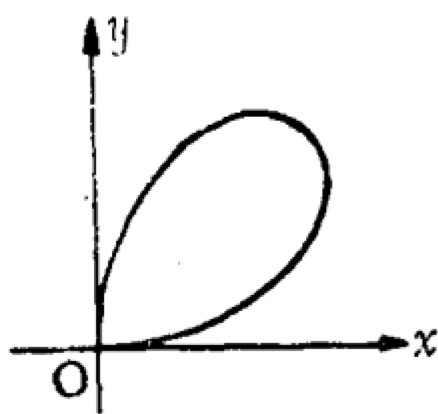


图12–14

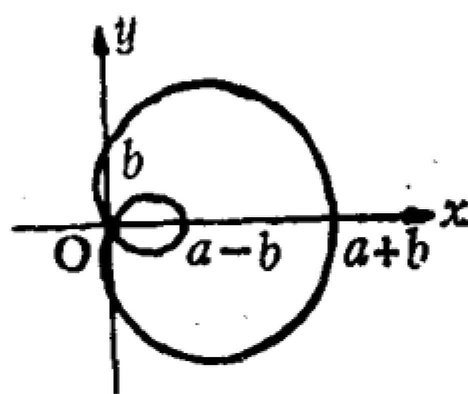


图12–15

解　因为曲线在极点 O 的切线的极角是使 $r=0$ 的 θ，故由 $a\cos\theta+b=0$ 解得 $\theta_0=\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$．当 θ 经过 θ_0 变到 π 时，曲线上相应的点从原点沿小圈下半部移动到点（π，$b-a$）．设大圈围成的面积为 A，小圈围成的面积为 B，利用曲线关于极轴的对称性，有

$$A=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\theta_0}(a\cos\theta+b)^2 d\theta=\int_0^{\theta_0}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2)d\theta$$

$$=\left[\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)+2ab\sin\theta+b^2\theta\right]\Big|_0^{\theta_0}$$

$$=\frac{a^2}{2}(\theta_0+\sin\theta_0\cos\theta_0)+2ab\sin\theta_0+b^2\theta_0$$

$$=\frac{a^2+2b^2}{2}\cdot\theta_0+\left(\frac{a^2}{2}\cos\theta_0+2ab\right)\sin\theta_0$$

$$=\frac{a^2+2b^2}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{3}{2}b\sqrt{a^2-b^2}. \qquad ①$$

又，$B=2\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi}(a\cos\theta+b)^2d\theta=\int_0^{\pi}(a\cos\theta+b)^2d\theta-\int_0^{\theta_0}(a\cos\theta$

$+b)^2d\theta=\int_0^{\pi}(a\cos\theta+b)^2d\theta-A=\frac{a^2+2b^2}{2}\pi-A.$

故所求面积 $S=A-B=\frac{a^2+2b^2}{2}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{b}{b}\right)-\pi\right]$，利用①，把 A 代入上式，再利用 $\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)=\pi$，得

$$S=\frac{a^2+2b^2}{2}\left[2\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)-\pi\right]+3b\sqrt{a^2-b^2}$$

$$=(a^2+2b^2)\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{b}{a}\right)+3b\sqrt{a^2-b^2}.$$

【定理】2. 设两曲线的方程用参数 t 表示：$x=g(t)$，$y=f_1(t)$ 及 $x=g(t)$，$y=f_2(t)$，$(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$．并且设 $g'(t)$，$f_1(t)$，$f_2(t)$ 连续，又 $f_1(t)\geqslant f_2(t)$，则这两曲线与直线 $x=f_1(t)$ 及 $x=f_2(t)$ 围成的面积

$$S=\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t]-f_2(t)]g'(t)dt.$$

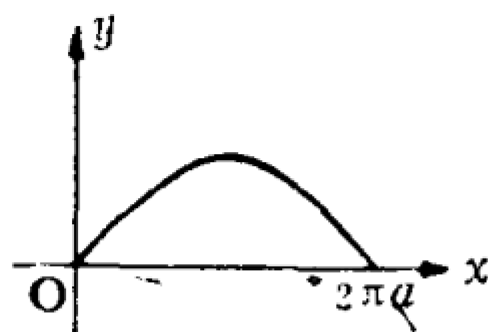
证明 在本章3.2【定义】1的公式中，把积分变数 x 看作 t 的函数 $g(t)$，取 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 为 $f_1(t)$，$f_2(t)$，便得 $S=\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t)-f_2(t)]\frac{dx}{dt}dt$

$$=\int_{t_1}^{t_2}[f_1(t)-f_2(t)]g'(t)dt. \qquad \square$$

例题 如图12—16，曲线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的面积为 $3\pi a^2$．

解 在此，【定理】2中的 $f_1(t)=a(1-\cos t)$，$f_2(t)=0$，$g(t)=a(t-$

$\sin t$)，如图 12—16，故



$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt$$

$$=2\int_0^{\pi} a^2\cdot 4\sin 4\frac{t}{2}dt.$$

令 $\theta=\frac{t}{2}$并利用 2.7 例题 6 的结果，得

图12-16

$$S=16\,a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=16\,a^2\left(\frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=3\,\pi\,a^2.$$

3·3 平面曲线的长

【定义】2. 曲线的长 如果曲线用直角坐标方程 $y=f(x)$ ($a\leqslant x\leqslant b$) 给定，且 $f'(x)$连续，则把定积分 $L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ 的值称为此曲线的长.

例题 1. 圆 $x^2+y^2=a^2$ 的周长 L 为 $2\pi a$.

解 由题设方程可得 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (仅考虑第一象限的部分)，对 x 求导，得 $y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 故

$$L=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx=4\int_0^a\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=4a\left(\sin^{-2}\frac{x}{a}\right)\Big|_{-1}^{1}=2\,\pi\,a.$$

例题 2. 抛物线 $y^2=4\,px(p>0)$上自顶点到点 $(a,\ 2\sqrt{pa})$ $(a>0)$的弧长为

$$L=\sqrt{a(a+p)}+p\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+p}}{\sqrt{p}}.$$

解 由 $y^2=4\,px$ 可得抛物线在第一象限内的部分的方程为 $y=2\sqrt{p}\sqrt{x}$.

$\therefore\ y'=\sqrt{\frac{p}{x}}$，$\therefore\ L=\int_0^a\sqrt{1+\frac{p}{x}}\,dx$. 利用本章 1.5 方法 1 的 例题 2，得

$$L=\left[\sqrt{x}\sqrt{x+p}+p\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+p})\right]\Big|_0^a$$

$$=\sqrt{a(a+p)}+p\ln\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+p}}{\sqrt{p}}.$$

例题 3. 曲线 $3ay^2=x(a-x)^2$ ($a>0$) 围成的一圈的长，如图 12—17，$L=\frac{4\sqrt{3}}{3}a$.

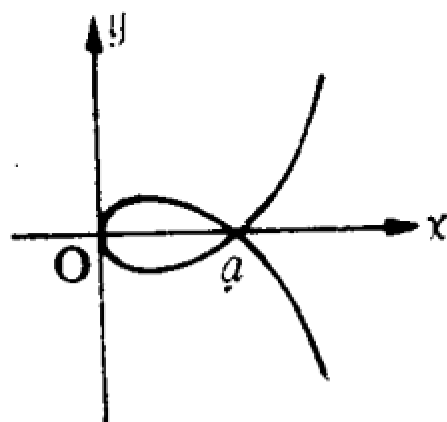


图12–17

解 由题设方程求得

$$y=\frac{1}{\sqrt{3a}}\sqrt{x}(a-x)$$ （在第一象限），

$\therefore\ y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{3a}\sqrt{x}}$. 又因曲线对 x 轴对称，故

$$L=2\int_0^a\sqrt{1+\frac{(a-3x)^2}{12ax}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3a}}\int_0^a\frac{a+3x}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3a}}\left[2a\sqrt{x}+2x\sqrt{x}\right]\Big|_0^a=\frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

【定理】 3. 设曲线用极坐标方程 $r=f(\theta)$ ($\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$) 给定，且 $f'(\theta)$ 连续，则此曲线长 L 为

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

证明 （曲线上）同一点的直角坐标 (x, y) 和极坐标 (r, θ) 的关系是：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（r 看作 θ 的函数 $f(\theta)$，于是 x, y 都是 θ 的函数）.

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta},\ \left(r'=\frac{dr}{d\theta}\right)$$

把【定义】2 公式中的积分变数 x 看作 θ 的函数，则得

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{r'\sin\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\sin\theta}\right)^2}\cdot(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$$ □

例题　曲线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$，如图 12—18 的全长 L 是 $8a$

解　$r'=-a\sin\theta$，又因曲线在原点的切线的极角是使 $r=a(1+\cos\theta)=0$ 的 $\theta\left(\theta>\frac{\pi}{2}\right)$，即 $\theta=\pi$. 利用曲线关于极轴的对称性，得

$$L=2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+(-a\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2a\int_0^\pi\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=2a\int_0^\pi\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=4a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a.$$

【定理】 4. 以参数 t 的方程 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 给出的曲线的长 L 为

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt.$$

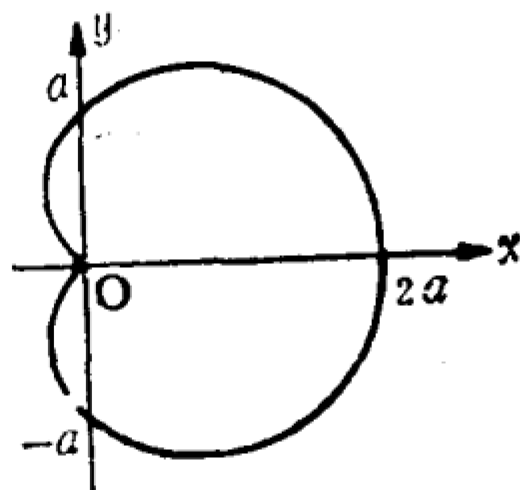


图12–18

证明　把【定义】2 的公式作如下的变形：

$$\because\quad f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{g'(t)}{f'(t)},\quad dx=f'(t)dt,$$

$$\therefore\quad L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+[g'(t)/f'(t)]^2}\,f'(t)dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt.$$

□

例题　曲线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的全长 $L=8a$.

解　$x'=a(1-\cos t)$，$y'=a\sin t$，由 3.2【定理】2 例题得

$$L=2a\int_0^\pi\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=4a\int_0^\pi\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=4a\int_0^\pi\sin\frac{t}{2}dt=4a\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^\pi=8a.$$

3·4　旋转体体积

【定义】 3. **体积**　平面曲线 $y=f(x)$ (连续函数)与直线 $x=a, x=b$ $(b>a)$，

$y=0$ 围成一块平面图形.将此图形(有时也直接说曲线 $f(x)$)绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积V可用下面的公式给出，$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

例题 1．圆 $x^2+y^2=a^2$ 绕 x 轴旋转一周所成的球的体积$V=\frac{4\pi a^3}{3}$.

解 从题设方程得 $y^2=a^2-x^2$，故

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx=\pi\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-a}^{a}=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

例题 2．圆 $x^2+(y-b)^2=a^2(b>a>0)$绕 x 轴旋转一周所成圆环体的体积 $V=2\pi^2a^2b$.

解 由题设方程就 y 解得

$$y_1=b+\sqrt{a^2-x^2},\quad y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$\therefore\quad V=\pi\int_{-a}^{a}y_1^2\,dx-\pi\int_{-a}^{a}y_2^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\pi b\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]_{-a}^{a}=2\pi^2a^2b.$$

【定理】 5．用极坐标方程给出的曲线 $r=f(\theta)$(连续函数)与半直线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta(\beta>\alpha)$围成一平面图形，则此图形绕 x 轴旋转一周所成立体的体积 V 为 $V=\frac{2\cdot\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta$.

证明 如图 12—19，若用$V_{\overset{\frown}{AB}}$，$V_{\overline{OA}}$，$V_{\overline{OB}}$ 分别表示由$\overset{\frown}{AB}$，$\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 绕 OX 轴旋转一周所成立体的体积，则 所求体积 $V=V_{\overset{\frown}{AB}}+V_{\overline{OA}}-V_{\overline{OB}}$

$$=\pi\int_a^b y^2dx+\frac{1}{3}\pi\overline{aA}^2\cdot\overline{Oa}$$

$$-\frac{1}{3}\pi\overline{Bb}^2\cdot\overline{Ob}\qquad ①$$

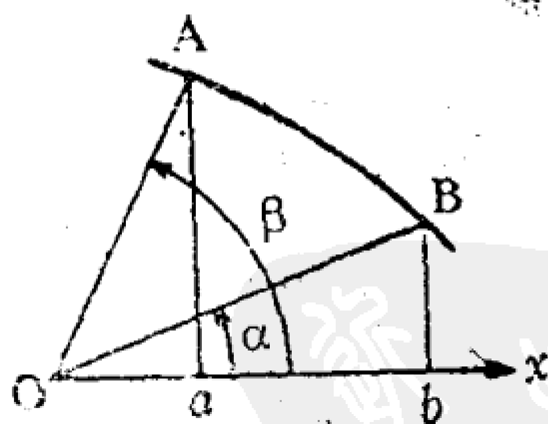


图12-19

仿照【定理】1 的办法，把右边第一项变成极坐标表示式，则得

$$\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_\beta^\alpha(r\sin\theta)^2(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta$$

$$=\pi\int_\beta^\alpha r^2r'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta-\pi\int_\beta^\alpha r^3\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=\pi\left(\frac{r^3}{3}\sin^2\theta\cos\theta\right)\Big|_\beta^\alpha-\pi\int_\beta^\alpha\frac{r^3}{3}(2\sin\theta\cos^2\theta-\sin^3\theta)d\theta$$

$$-\pi\int_\beta^\alpha r^3\sin^3\theta\,d\theta=\pi\frac{r^3(\alpha)}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha-\pi\frac{r^3(\beta)}{3}\sin^2\beta\cos\beta$$

$$-\frac{\pi}{3}\int_\beta^\alpha 2r^3(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\sin\theta d\theta=\frac{1}{3}\pi\ \overline{bB}^2\cdot\overline{Ob}$$

$$-\frac{1}{3}\pi\overline{aA}^2\cdot\overline{Oa}+\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta.$$

把此式代入①，得 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\,d\theta.$ □

例题 3. 半圆 $r=a$ $(a>0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 绕极轴旋转一周所成球的体积 $V=\frac{4\pi a^3}{3}$.

解 从刚才得到的公式

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3\sin\theta\,d\theta=\frac{2\pi}{3}a^3(-\cos\theta)\Big|_0^\pi=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

【定理】 6. 当曲线用参数方程 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 表示时，它绕 x 轴旋转一周所成立体的体积 V 为 $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}g(t)^2f'(t)dt.$

证明 按【定义】3, $V=\pi\int_a^b y^2dx$, 现令 $x=f(t)$, 则 $y(f(t))=g(t)$, $dx=f'(t)dt$, 故 $V=\pi\int_{t_1}^{t_2}g(t)^2f'(t)dt.$ □

例题 4. 曲线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴旋转一周所成立体的体积 V 为 $V=5\pi^2a^3$.

解 由刚才得的公式，

$$V=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt$$

$$=2\pi a^3\int_0^\pi\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3dt$$

令 $\frac{t}{2}=\theta$ 并利用本章 2.6 例题 7 的结果得

$$V=16\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\cdot 2\,d\theta=32\pi a^3\left(\frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=5\pi^2a^3.$$

例题 5. 曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(a>0)$ 绕 x 轴旋转一周所成立体的体积 V 为 $V=\frac{32}{105}\pi a^3$.

解 由本章3.2[定义]1例题7，该曲线的参数方程为 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$，而且它关于 y 轴对称，故

$$V=-2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}3a^3\sin^7 t(1-\sin^2 t)dt$$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)dt$$

$$=6\pi a^3\left(\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}-\frac{8\cdot6\cdot4\cdot2}{9\cdot7\cdot5\cdot3}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

例题 6. 求线段 $x=at$,, $y=bt$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant1)$ 绕 x 轴旋转一周所成圆锥的体积 V.

解 $V=\pi\int_0^1(bt)^2 a dt=\frac{1}{3}\pi b^2\cdot a=\frac{1}{3}$底×面积×高.

3·5 旋转曲面的面积

[定义] 4. 表面积 曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转一周所成曲面面积 S 定义为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

例题 1. 半径为 a 的球的表面积是 $4\pi a^2$.

解 从圆的方程 $x^2+y^2=a^2$，解出 y，得

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\ (\text{在第一、二象限}),$$

$$\therefore\quad y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad S=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx$$

$$=2\pi a\int_{-a}^{a}dx=4\pi a^2.$$

例题 2. 直线段，$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(x\geqslant0,\ y\geqslant0,\ a>0,\ b>0)$，如图12—20如图12-20，绕 x 轴旋转一周所成圆锥体的侧面积 .

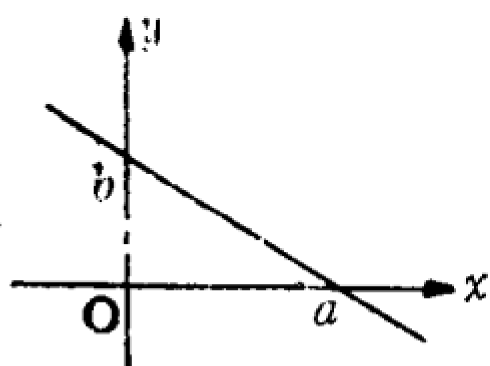


图12—20

$$S=\pi b\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi b\cdot\sqrt{a^2+b^2}.$$

这是以 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为半径，$2\pi b$ 为弧长的扇形面积.

解 就y解方程$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，得

$$y=b\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$\therefore\quad S=2\pi\int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\,dx=\frac{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)\Big|_0^a=\pi b\sqrt{a^2+b^2}.$$

参考 用同样的办法可得，在极坐标的情形，对于曲线$r=f(\theta)$ ($\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$)，所求表面积$S=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta$. 在参数表示的情形，对于曲线$x=f(t)$，$y=g(t)$ ($t_1\leqslant t\leqslant t_2$) 所求旋转体的表面积是$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2}g(t)\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt$. (证明从略).

3·6 平 均 值

【定义】 5 平均值 设$f(x)$在$[a,b]$连续，则称$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$为$f(x)$为在$[a,b]$的平均值.

例题 1. 从半径为a、圆心在原点的上半圆周上所有点向其水平直径引垂线，则其平均值为$\frac{\pi a}{4}$.

解 所说上半圆的方程为$y=\sqrt{a^2-x^2}$. 故所求平均值为

$$\frac{1}{2a}\int_{-a}^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2a}\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_{-a}^a=\frac{\pi a}{4}.$$

注意 问题若采用极坐标，则上半圆的方程为$r=a$ ($0\leqslant\theta\leqslant\pi$)，平均值为$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi a\sin\theta\,d\theta=\frac{2a}{\pi}$. 与上面的$\frac{\pi a}{4}$不同，这说明函数的平均值，因变数选取的不同而不同.

例题 2．把一个正数 a 任意分成两个非负的数的和，则这两个数的积的平均值是 $\frac{a^2}{6}$．

解 所求平均值是函数 $x(a-x)$ 在 $[0,a]$ 的平均值，即 $\frac{1}{a}\int_0^a x(a-x)\,dx=\frac{1}{a}\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^2}{6}$．

3·7 积分法在物理学上的应用

以下各种图形可看作密度均匀的薄板或金属丝。

【定义】6．重心(平面图形) 在 xy 平面上有一平面图形．若用平行于 y(或 x)轴的直线截此图形，所得截痕之长为 $f(x)(g(y))$，则此图形重心的坐标 $(\overline{x},\ \overline{y})$ 定义为

$$(1)\quad \overline{x}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},\qquad \overline{y}=\frac{\int_c^d yg(y)dy}{\int_c^d g(y)dy}.$$

其中 a、b 各是图形上点的最小、最大横坐标，c、d 各是图形上点的最小、最大纵坐标．

其次，曲线 $y=h(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的重心坐标 $(\overline{x},\ \overline{y})$ 定义为

$$(2)\quad \overline{x}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx},\qquad \overline{y}=\frac{\int_a^b h(x)\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+h'(x)^2}\,dx}.$$

注意 图形的重心对此图形的相对位置与坐标系的选取方式无关．(证明从略.)

例题 1．三角形的重心与其几何学重心(即三中线交点)重合．

解 如图 12—21，设三角形诸顶点的坐标分别为 $A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$，$C(c,\ 0)$．则直线 AB、BC 的方程各为

$$AB:\ y=b\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$BC:\ y=b\left(1-\frac{x}{c}\right).$$

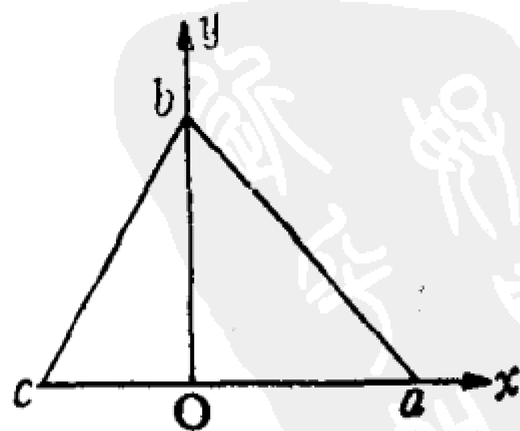


图12-21

∴ 由上面的公式(1)，

$$\bar{x}=\frac{\int_c^0 xb\left(1-\frac{x}{c}\right)dx+\int_0^a xb\left(1-\frac{x}{a}\right)dx}{\int_c^0 b\left(1-\frac{x}{c}\right)dx+\int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)dx}$$

$$=\frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3e}\right)\Big|_c^0+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3a}\right)\Big|_0^a}{\left(x-\frac{x^2}{2c}\right)\Big|_c^0+\left(x-\frac{x^2}{2a}\right)\Big|_0^a}$$

$$=\left(-\frac{c^2}{6}+\frac{a^2}{6}\right)\Big/\left(-\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{3}(a+c).$$

又，$g(y)=\frac{b-y}{b}(a-c)$，∴ $\bar{y}=\frac{\int_0^b y\cdot\frac{b-y}{b}(a-c)dy}{\int_0^b\frac{b-y}{b}(a-c)dy}$

$$=\frac{\left(\frac{b}{2}y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b}{\left(by-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^b}=\frac{b}{3}.$$

因此，重心 $(\bar{x},\bar{y})$ 与几何重心 $\left(\frac{a+0+c}{3},\ \frac{0+b+0}{3}\right)$ 重合。

例题 2. 半圆板 $x^2+y^2=a^2(a>0,\ x\geqslant 0)$ 的重心坐标为 $\left(\frac{4a}{3\pi},\ 0\right)$.

解 在此，如图12—22，公式(1)中的 $f(x)=2\sqrt{a^2-x^2}$，$g(y)=\sqrt{a^2-y^2}$，∴ $\bar{x}=\frac{\int_0^a x\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{\int_0^a 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx}=\frac{\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^a}{\left(\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a}$

$=\frac{4a}{3\pi}$.

其次 $\int_{-a}^a y\sqrt{a^2-y^2}\,dy=0$（被积函数是 $[-a,\ a]$ 上的奇函数），

∴ $\bar{y}=0$.（从图形对 x 轴对称，也可直接得到 $\bar{y}=0$）.

【定理】7. 设两个不相交的图形 A、B 的重心各为 $(X_1,\ Y_1)$、$(X_2,\ Y_2)$，

并集 $A\cup B$ 的重心为 $(\overline{X},\ \overline{Y})$，则它们有如下关系：$\overline{X}=\dfrac{AX_1+BX_2}{A+B}$，$\overline{Y}=\dfrac{AY_1+BY_2}{A+B}$（这里 A、B 又表示图形 A、B 的面积）.

证明 当动点 (x,y) 在图形 A、B（图 12—23）上移动时，设其横坐标 x 的变化域分别为 I_1，I_2，纵坐标 y 的变化域分别为 J_1，J_2. 因已设 $A\cap B=\phi$，故在适当的坐标系下可使 $I_1\cap I_2=\phi(J_1\cap J_2=\phi$，$\phi$ 为空集). 在【定义】6 中的 $f(x)$ 对于 A 为 $f_1(x)$，对于 B 为 $f_2(x)$，故

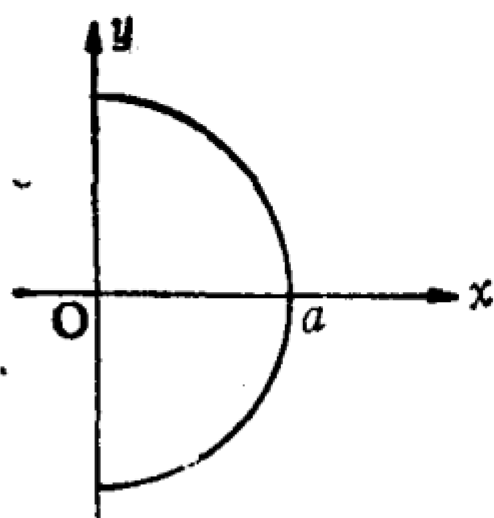


图12-22

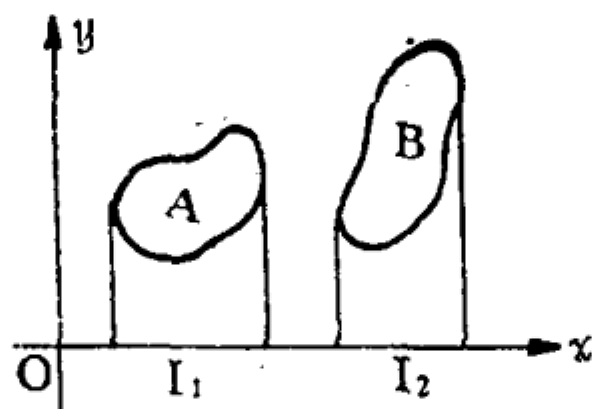


图12-23

$$\overline{x}=\int_{I_1\cup I_2}x[f_1(x)+f_2(x)dx\Big/\int_{I_1\cup I_2}[f_1(x)+f_2(x)]dx$$

$$=\left[\int_{I_1}xf_1(x)dx+\int_{I_1}xf_2(x)dx+\int_{I_2}xf_1(x)dx+\int_{I_2}xf_2(x)dx\right]$$

$$\left[\int_{I_1}f_1(x)dx+\int_{I_1}f_2(x)dx+\int_{I_2}f_1(x)dx+\int_{I_2}f_2(x)dx\right].$$

而在 I_k 上 $f_i(x)=0$ $(i\neq k,\ i,\ k=1,\ 2)$，所以

$$\overline{x}=\left[\int_{I_1}xf_1(x)dx+\int_{I_2}xf_2(x)dx\right]\Big/\left[\int_{I_1}f_1(x)dx+\int_{I_2}f_2(x)dx\right].\quad ①$$

对于图形 A 的重心，有

$$x_1=\int_{I_2}xf_1(x)dx\Big/\int_{I_1}f_1(x)dx,$$

其中 $\int_{I_1}f_1(x)dx=A$(面积). $\therefore\ \int_{I_1}xf_1(x)dx=AX_1$.

同样有 $\int_{I_2}xf_2(x)dx=BX_2$，将这三个式子同时代入①，得 $\overline{X}=$

$\dfrac{AX_1+BX_2}{A+B}$. 同样，$\overline{Y}=\dfrac{AY_1+BY_2}{A+B}$. □

注意 1. 即使是 $I_1\cap I_2\neq\phi$，只要把上述积分 $\int_{I_1\cup I_2}x[f_1(x)+f_2(x)]\,dx$ 定义为 $\int_{I_1}xf_1(x)dx+\int_{I_2}xf_2(x)dx$，也可以推得同样的结果.

2. 当两个图形 A，B 都是曲线时，【定理】7 的结果仍然正确，只是原来表示面积的 A，B 在此时表示曲线长.

例题 1. 弓形薄板 $x^2+y^2=a^2$ $(a\cos\beta\leqslant x\leqslant a)$ 重心的坐标是

$$\left(\frac{2a\sin^3\beta}{3(\beta-\sin\beta\cos\beta)},\ 0\right)$$

解 从题设方程解得 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，如图 12—24，由【定义】6，有

$$\overline{x}=\int_{a\cos\beta}^{a}2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx\bigg/\int_{a\cos\beta}^{a}2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right]_{a\cos\beta}^{a}\bigg/\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]\bigg|_{a\cos\beta}^{a}$$

利用 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{\pi}{2}-\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$，得

$$\overline{x}=\frac{1}{3}a^3\sin^3\beta\bigg/\left[\frac{\pi}{4}a^2-\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\frac{a^2}{2}\sin\beta\cos\beta\right]$$

$$=\frac{2a\sin^3\beta}{3(\beta-\sin\beta\cos\beta)}.$$

又由弓形该对 x 轴对称，$\overline{Y}=0$.

例题 2. 扇形 $x^2+y^2=a^2$ $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant|y|\leqslant a\sin\beta)$ 的重心是

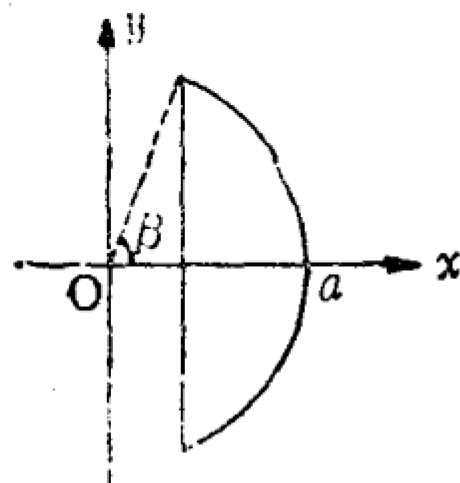


图12-24

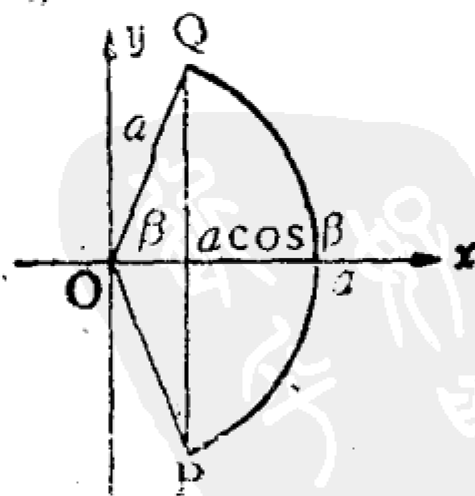


图12-25

$\left(\frac{2a}{3\beta}\sin\beta,\ 0\right)$.

解 应用【定理】6，见图12—25，这里ΔOPQ是图形A，弓形PaQ是图形B.

$$A=a^2\sin\beta\cos\beta,\ x=\frac{2}{3}a\cos\beta,\ B=2\int_{a\cos\beta}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=2\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right]\Bigg|_{a\cos\beta}^{a}$$

$$=a^2(\beta-\sin\beta\cos\beta).$$

由例题 1，$x_2=\dfrac{2a\sin^3\beta}{3(\beta-\cos\beta\sin\beta)}$,

$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{Ax_1+Bx_2}{A+B}$$

$$=\left[(a^2\cos\beta\sin\beta)\frac{2}{3}a\cos\beta+a^2(\beta-\cos\beta\sin\beta)\right.$$

$$\left.\frac{2a\sin^3\beta}{3(\beta-\cos\beta\sin\beta)}\right]\Big/[(a^2\cos\beta\sin\beta$$

$$+a^2(\beta-\cos\beta\sin\beta)]=\frac{2a}{3\beta}\sin\beta.$$

因图形对x轴对称，故$\bar{Y}=0$.

例题 3. 半径为a，圆心角为2β的圆弧(参看例题2的图)的重心为$\left(\frac{a}{\beta}\sin\beta,\ 0\right)$.

解 在此，[定义] 6(2)中的$h(x)=\sqrt{a^2-x^2}$,

$$\therefore\quad \bar{x}=2\int_{a\cos\beta}^{a}x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx\Bigg/2\int_{a\cos\beta}^{a}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx=a\left[-(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{a\cos\beta}^{a}\Bigg/a$$

$$\left[\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{a\cos\beta}^{a}=\frac{a\sin\beta}{\beta}.$$

又由于图形关于x轴对称，$\bar{Y}=0$

例题 4. 例题2中扇形周界的重心是$\left(\dfrac{a(\cos\beta+2\sin\beta)}{2(1+\beta)},\ 0\right)$.

解 应用【定理】7 注意 2，把例题 2 图中的 $\overline{OP}\cup\overline{OQ}$ 作为图形 A，把弓形弧 paQ 作为图形 B，则 A、B 的长各为 $2a$、$2\beta a$.

因 $X_1=\frac{1}{2}a\cos\beta$，$X_2=\frac{a\sin\beta}{\beta}$，所以 $\overline{X}=\frac{AX_1+BX_2}{A+B}=\left[(2a)\cdot\frac{a}{2}\right.$

$\left.\cos\beta+2a\beta\frac{a\cos\beta}{\beta}\right]\Big/(2a+2a\beta)=\frac{a(\cos\beta+2\sin\beta)}{2(1+\beta)}$.

例题 5. 设 $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，三边长分别为 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，则 $\triangle ABC$ 周边的重心为

$$\left(\frac{a(x_2+x_3)+b(x_3+x_1)+c(x_1+x_2)}{2(a+b+c)},\right.$$

$$\left.\frac{a(y_2+y_3)+b(y_3+y_1)+c(y_1+y_2)}{2(a+b+c)}\right).$$

解 如图 12—26，把 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 分别取作【定理】7 注意 2 的图形 A、B，则图形 $\overline{AB}\cup\overline{AC}$ 的重心 S 的坐标为

$$\overline{x}=\frac{b\frac{x_1+x_3}{2}+c\,\frac{x_1+x_2}{2}}{b+c}$$

$$=\frac{b(x_1+x_2)+c(x_1+x_2)}{2(b+c)}.$$

为了求 $\overline{Y}$，只须把 $\overline{x}$ 中的 x_i 改为 y_i $(i=1, 2, 3)$ 就行了.

再把点 S 看作长为 $b+c$ 的线段的中心，设它与 $\overline{BC}$ 合在一起的重心为 $(\overline{X}', \overline{Y})$，则有

$$\overline{X}'=\frac{(b+c)\overline{X}+a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{(b+c)+a}$$

$$=\frac{(b+c)\frac{b(x_1+x_3)+c(x_1+x_2)}{2(b+c)}+a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{a+b+c}$$

$$=\frac{a(x_2+x_3)+b(x_3+x_1)+c(x_1+x_2)}{2(a+b+c)}.$$

同样可求得 $\overline{Y}'$.

例题 6. 以 a 为半径，原点为中心的半圆的全部边界（连直径在内）的重

心是$\left(\frac{2a}{\pi+2}, 0\right)$.

解 如图 12—27，利用【定理】7 注意 2，$\overline{PQ}$ 为图形 A，半圆弧 $\overparen{PaQ}$ 为图形 B，则 $\overparen{PQ}$ 的重心的 x 坐标 $X_1=0$，$\overparen{PaQ}$ 的重心的 x 坐标 $X_2=\frac{2a}{\pi}$ $\left(\text{由例题 3，令 } \beta=\frac{\pi}{2}\right)$. 由此，所求重心的 x 坐标 $\overline{X}$ 为

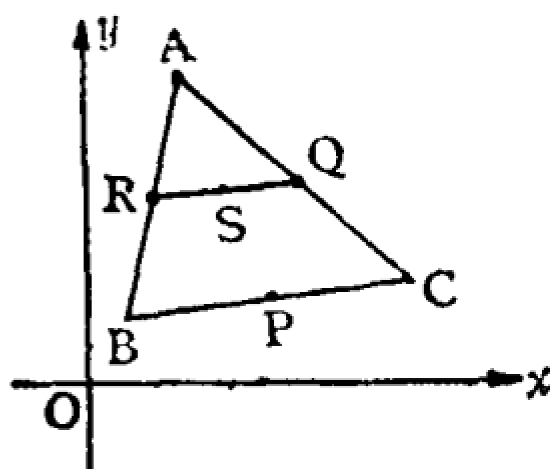


图12-26

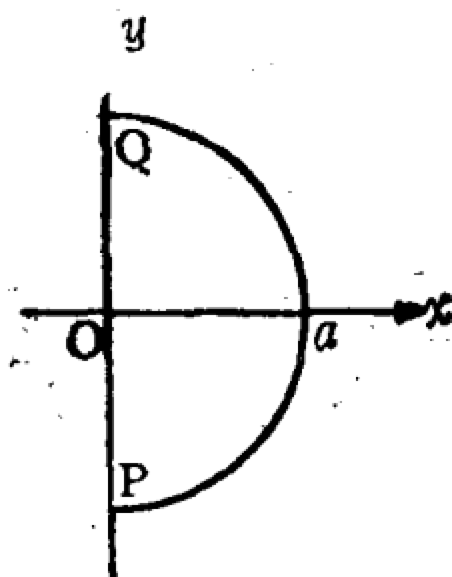


图12-27

$$\overline{X}=\frac{AX_1+BX_2}{A+B}=\frac{2a\cdot 0+\pi a\cdot\frac{2a}{\pi}}{2a+\pi a}=\frac{2a}{\pi+2}.$$

参考 设平面图形 A 的重心为 G，直线 l 在 A 所在的平面上但不与 A 相交，将 A 绕 l 旋转一周形成的旋转体 V 的体积等于 G 所经过的圆周长 L 与 A 的面积之积，又 V 的表面(旋转面)面积等于 A 的边界长与该边界线的重心所经过的圆周长之积，以上两个论断，称为古尔金定理或巴普斯定理.(证明从略.)

例题 7. 圆 $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2(b>a>0)$ 绕 x 轴旋转一周所成圆环体的体积和表面积各为 $2\pi^2a^2b$，$4\pi^2ab$.

解 圆面 A 的重心 G 是圆心 (o, b)，又因为 $L=2\pi b$，面积 $A=\pi a^2$，故由古尔金定理，圆环体的体积为 $2\pi bx\cdot\pi a^2=2\pi^2a^2b$ (这与 3.4 例题 2 结果一致).

圆周长(即 A 的边界线长)为 $2\pi a$，圆周的重心仍为 (o, b)，故由古尔金定理，圆环体的表面积为 $2\pi a\cdot 2\pi b=4\pi^2ab$.

【定义】7. 速度与加速度(平面运动) 在一平面上适当选定坐标轴，设在此平面上运动的点 $P(x, y)$ 关于所选坐标轴的位置向量为 $\boldsymbol{r}(t)$ (还设

$r(t)$关于t二次可微）．$r(t)$的一阶、二阶导函数记作$\dot{r}(t)$，$\ddot{r}(t)$，分别称为点P的速度，加速度、作直线运动时，r，$\dot{r}$，$\ddot{r}$不必看作向量，而可作为一般函数$r(t)$，$\dot{r}(t)$，$\ddot{r}(t)$对待．

注意 地球的重力加速度$g=980$（cm/s^2）．

例题 1．点P从静止状态开始作直线运动，在时刻t秒产生加速度$f(t)$（cm/s^2），则T秒后的速度为$\int_0^T f(t)dt(cm/s)$．

解 把P点运动的直线取作x轴，运动开始位置取作原点．设在t秒时P点的坐标为$x(t)$．则按题意得$\ddot{x}=f(t)$，由此积分得$\dot{x}=\int_0^T f(t)\,dt$，这就是说$T$秒后的速度为$\int_0^T f(t)dt$（$cm/s$）．

例题 2．如果在x轴上一动点P的速度为$V(t)$，在时刻t_1，t_2，P的位置分别为x_1，x_2，则

$$x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2} V(t)dt.$$

解 设在运动开始后t秒，点p的坐标为$x(t)$，则此时的速度为$\dot{x}(t)$，且由题意有$\dot{x}=V(t)$

$$\therefore\quad \int_{t_1}^{t_2}\dot{x}dt=\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt.$$

$$但左边=x(t)\Big|_{t_1}^{t_2}=x_2-x_1,$$

$$\therefore\quad x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2}V(t)dt.$$

例题 3．设点P作匀加速直线运动．如果运动开始时刻是$t=0$且在时刻t_1，t_2，t_3(秒)的前一秒时间内P点通过的距离各为s_1，s_2，s_3（cm），则有下列关系式成立：

$$s_1(t_2-t_3)+s_2(t_3-t_1)+s_3(t_1-t_2)=0.$$

解 设点p的开始位置为原点，运动方向为x轴，在时刻t，点p的坐标为$x(t)$，加速度为常数a．则$\ddot{x}=a$，当初速度为V_0时，由$\ddot{x}=a$对t积分得$\dot{x}=at+V_0$，再从t_i-1到t_i积分，得

$$s_i=x(t_i)-x(t_i-1)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}(a_0t+v_0)dt=\left(v_0t+\frac{at^2}{2}\right)\Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$$

$$=v_0-\frac{a}{2}+at_i\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

$\therefore \quad \frac{s_1-s_2}{t_1-t_2}=\frac{s_2-s_3}{t_2-t_3}$.

去分母，并整理得

$$s_1(t_2-t_3)+s_2(t_3-t_1)+s_3(t_1-t_2)=0.$$

例题 4. 作直线运动的点 P 离出发点 x cm 处产生的速度为 $f(x)$ (cm/s)。则从出发点前进 a (cm) 所用时间为 $\int_0^a \frac{1}{f(x)}dx$.

解 取出发点为原点，在时刻 t 点 P 的坐标为 $x(t)$，由题意，$\frac{dx}{dt}=f(x)$，

$\therefore \quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{f(x)}$ (t 看作 x 的函数)，由此对 x 从 0 到 a 积分得 $t(a)-t(0)=\int_0^a \frac{1}{f(x)}dx$.

例题 5. 设在 x 轴上有两点．$A(a,0)$，$B(b,0)$ 设点 P 从 A 开始以匀加速度 $\frac{1}{ab}$ 向 B 运动，在 A、B 的速度各为 v_1、v_2，则有下列关系成立

$v_2^2-v_1^2=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

解 设在时刻 t，点 P 的坐标为 $x(t)$，速度为 $V(t)$，在 $t=0$ 时 P 在 A 点，在 $t=t_0$ 时 P 在 B 点则按题意 $\frac{dv}{dt}=\frac{1}{ab}$，将此式两边与 $v=\frac{dx}{dt}$ 两边各自相乘再对 t 积分，得 $\int_0^{t_0} v\frac{dv}{dt}dt=\frac{1}{ab}\int_0^{t_0}\frac{dx}{dt}dt$. 左边取 v 作积分变量，右边取 x 作积分变量，则

$$\int_{v_1}^{v_2} vdv=\frac{1}{ab}\int_a^b dx, \quad \therefore \quad \frac{1}{2}v^2\Big|_{v_1}^{v_2}=\frac{1}{ab}x\Big|_a^b,$$

$$\therefore \quad v_2^2-v_1^2=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

例题 6. 点 P 以匀加速度 a 作直线运动，通过 A 点时速度为 v_0，通点 B 点时速度为 v，从 A 到 B，距离为 S，所用时间为 T，于是，有关系 $V^2-V_0^2=2as$，$\frac{S}{T}=\frac{1}{2}(V_0+V)$ 成立，且通过 $\overline{AB}$ 中点的速度为 $\sqrt{\frac{V^2+V_0^2}{2}}$

解 设 A 为原点，点 P 在通过 A 后 t 秒时前进距离 x，速度为 u，则按题意得 $\frac{du}{dt}=a$. ① 将此式与 $u=\frac{dx}{dt}$ 左右两边分别相乘，再对 t 积分，得 $\int_0^T u\frac{du}{dt}dt=\int_0^T a\frac{dx}{dt}dt$. 左边积分变数改为 u，右边积分变数

改为 x，则有 $\int_{v_0}^{v} udu=\int_0^s adx$， ②∴ $\left.\frac{u^2}{2}\right|_{v_0}^{v}=ax\Big|_0^s$，即 $v^2-v_0^2=2as$

③其次，由①对 t 积分，$\int_0^T\frac{du}{dt}dt=\int_0^T adt$. 把左边变数改为 u，则有 $\int_{v_0}^{v}du$ $=aT$，∴ $v-v_0=aT$. ④ 由④÷③得 $\frac{1}{2}(v+v_0)=\frac{s}{T}$.

最后，在②中令 $v=v_m$（P 在 $\overline{AB}$ 中点的速度），s 改为 $\frac{s}{2}$，则有

$$\int_{v_0}^{v_m}udu=\int_0^{\frac{s}{2}}adx,\qquad \therefore\quad \left.\frac{u^2}{2}\right|_{v_0}^{v_m}=a\cdot\frac{s}{2}$$

∴ $v_m^2-v_0^2=as$，代入③并解出 v_m 得

$$v_m=\sqrt{\frac{v^2+v_0^2}{2}}.$$

例题 7. 设质点 P 沿 x 轴运动，开始时 P 在原点处于静止状态，如果其速度与重力成反比例，则 P 所通过的距离与所用时间的立方的平方根成比例.

解 设点 P 在时刻 t 离原点的距离为 $x(t)$. 则 $x(0)=0$. 又设点 P 的质量为 m，则重力表示为 $m\ddot{x}$，按题意得 $m\frac{d^2x}{dt^2}=k_0\Big/\frac{dx}{dt}$（$k_0$ 是比例常数）①. 令 $\frac{dx}{dt}=v$，$\frac{k_0}{m}=k$，则由①，$\frac{dv}{dt}=\frac{k}{v}$，$v\frac{dv}{dt}=k$，由此积分得 $\int_0^t v\frac{dv}{dt}dt=\int_0^t kdt$，左边积分变量改为 v，则 $\int_0^v vdv=kt$，∴ $\frac{v^2}{2}=\frac{k_0}{m}t$②. 由②，$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2kt$，$\frac{dx}{dt}=\sqrt{2kt}$，由此积分得 $\int_0^t\frac{dx}{dt}dt=\int_0^t\sqrt{2kt}\,dt$. 把左边积分变量改为 x，则 $\int_0^x dx=\sqrt{2k}\,\frac{2}{3}t^{3/2}$，由此 $x=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2k_0}{m}t^3}$，即在时刻 t，P 点通过的距离与 t 的立方的平方根成比例.

例题 8. 设质点 P 自铅直面内圆周的最高点以初速度 0 沿任意一条弦滑动到圆周上. 试证所经过的时间与弦的位置无关.

证 如图 12—28，设 AC 为圆的直径，并铅直向下，弦 AB 与 AC 成 θ

角，质点 P 沿弦 AB 下滑·取 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，设 P 在下滑 t 秒后的坐标为 x，则 P 的运动方程为 $m\ddot{x}=mg\cos\theta$。两边约去 m 后，对 t 积分得 $\dot{x}=g\cos\theta t$（注意 $\dot{x}(0)=0$），再积分得 $x(t)=\frac{1}{2}g(\cos\theta))t^2$（注意 $x(0)=0$）．为了求点 P 沿 PB 弦滑到点 B 所经过的时间 T，令 $x(T)=PB=2r\cos\theta$（r 为圆 0 的半径），即 $2r\cos\theta=\frac{1}{2}g(\cos\theta)T^2$，由此解出 $T=2\sqrt{\frac{r}{g}}$．因 T 与 θ 无关，故 T 与弦 AB 的位置无关．

例题 9．雨点从平滑的人字形房盖的屋脊(如图12—29)以初速 v_0 流下．设房盖的水平射影长为定值 a．则使雨点以最短时间下落的房盖的倾角 θ_0 满足下列方程：$ag(1-tg^2\theta_0)^2=2v_0^2\,tg\,\theta_0$．

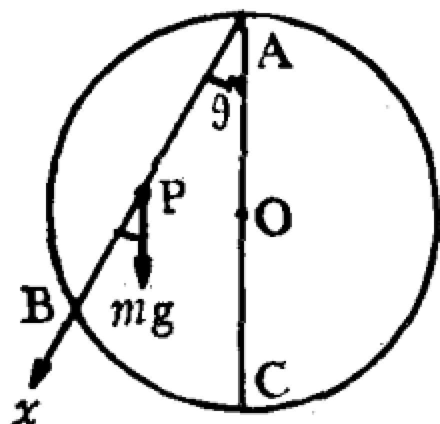


图12-28

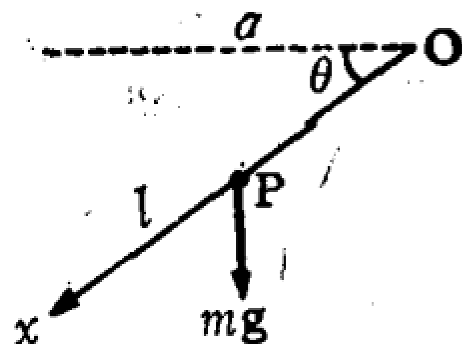


图12-29

解 取屋脊上一点 O 为原点，把雨点自 O 点起在倾角为 θ 的房盖上经过的半直线取作 x 轴，则质量为 m 的雨点 P 的运动方程为

$$m\ddot{x}=mg\sin\theta,\quad \ddot{x}=g\sin\theta. \qquad ①$$

由此对 t 积分得 $(\dot{x})\Big|_0^t=t\cdot g\sin\theta$，由 $\dot{x}(o)=v_0$，有

$$\dot{x}=v_0+tg\sin\theta. \qquad ②$$

注意到 $x(0)=0$，再积分得 $x=v_0t+\frac{1}{2}t^2g\sin\theta$． ③

设房盖长为 l，则 $l=\frac{a}{\cos\theta}$．因雨点沿长 l 的房盖下落的时间是满足 $x(t)=l$ 的 t，故 t 满足

$$a=l\cos\theta=x(t)\cos\theta=\left(v_0t+\frac{1}{2}t^2g\sin\theta\right)\cos\theta$$

$$=v_0t\cos\theta+\frac{1}{4}t^2g\sin2\theta. \qquad ④$$

把 t 看作 θ 的函数，由④对 θ 求导得：

$$0=\frac{dt}{d\theta}\left(v_0\cos\theta+\frac{1}{2}tg\sin 2\theta\right)-\left(v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\cos 2\theta\right).$$

为了求 t 的最小值，令 $\frac{dt}{d\theta}=0$，得

$$0=v_0t\sin\theta_0-\frac{1}{2}gt^2\cos 2\theta_0.$$ （θ_0 是与 t 的最小值相对应的 θ 值）

$$\therefore\quad t=\frac{2v_0\sin\theta_0}{g\cos 2\theta_0}=\frac{2v_0\sin\theta_0}{g(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)}.$$

代入④得

$$a=v_0\cos\theta_0\frac{2v_0\sin\theta_0}{g(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)}+\frac{1}{2}g\sin\theta_0\cos\theta_0\cdot\frac{4v_0^2\sin^2\theta_0}{g^2(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0)^2}.$$

去分母后用 $\cos^4\theta_0$ 除两边，得

$$ag(1-tg^2\theta_0)^2=2v_0^2\,tg\,\theta_0.$$

例题10. 设 A、B 两点相距为1，甲以 $u=\frac{\pi}{2}\sin\pi t$ 的速度由 A 向 B 运动，同时乙以速度 $V=\pi\sin 2\pi t$ 由 B 向 A 运动，如果甲、乙到达目的地后立即返回并继续运动下去，则甲乙相遇的所有时刻依次组成首项为 $\frac{1}{3}$，公差为 $\frac{2}{3}$ 的等差数列.

解　设甲乙相遇时刻为 t，按题意有

$$\int_0^t u\,dt+\int_0^t v\,dt=1,$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^t\sin\pi t\,dt+\pi\int_0^t\sin 2\pi t\,dt=1.$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2}(1-\cos\pi t)+\frac{1}{2}(1-\cos 2\pi t)=1,$$

$$\cos 2\pi t+\cos\pi t=0,\quad 2\cos^2\pi t+\cos\pi t-1=0,$$

$$(\cos\pi t+1)(2\cos\pi t-1)=0.$$

$\therefore$　由 $\cos\pi t=-1$，　得解 $\pi t=(2n+1)\pi$　$\therefore$　$t=2n+1$.　①

由　$\cos\pi t=\frac{1}{2}$，得解 $t=(2n+1)-\frac{2}{3}$ 及 $t=(2n+1)+\frac{2}{3}$　②

由①，②得所求相遇时刻是

$(2n+1)-\frac{2}{3}$，$2n+1$，$(2n+1)+\frac{2}{3}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$，此即首项为$\frac{1}{3}$，公差为$\frac{2}{3}$的等差数列。

§4. 微分方程

4·1 n 阶微分方程的解法

【定义】1. n 阶微分方程 联系(一个)变数及它的(一个)函数及其一阶至 n 阶的导函数之间关系的方程，称为该函数的 n 阶微分方程。

故微分方程的一般形式是 $f(x, y, y', \cdots y^{(n)})=0$，其中 y 是 x 的函数，y'，y''，…，$y^{(n)}$ 是 y 关于 x 的一阶，二阶，…，n 阶导函数。

例 1. $(x^2-y^2)y'-2xy=0$ 这个微分方程被适合 $x^2+y^2=cy$ (c 常数) 的 y 所满足。

例 2. $y''+a^2y=0$ 这个微分方程被 $y=A\sin(ax+b)$ (a，b 是常数) 所满足。

【定义】2. 微分方程的解及解微分方程

满足已知微分方程的函数(即将此函数代入此方程，成为恒等式)，称为该微分方程的解，这种解的一般形式称为方程的通解，求通解的过程称为解微分方程。

4·2 一阶微分方程常用的解法

一阶微分方程常用的解法及举例。

解法 1. 变数分离型 $\frac{dy}{dx}=p(x)Q(y)$，$p(x)$仅是 x 的函数，$Q(y)$仅是 y 的函数。若把已知方程变形为$\int\frac{dy}{Q(y)}=\int p(x)dx$ $(Q(y)\neq 0)$，则剩下的问题只是求出原函数。

例题 1. 解微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+1}{x^2+1}=0$。

解 用解法 1，原方程变形为

$$\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{dy}{y^2+1}=0,$$

$\therefore\quad tg^{-1}x+tg^{-1}y=C_1.$

两边取正切，得 $\dfrac{x+y}{1-xy}=c$，($c=tg\,c_1$ 为任意常数)．

例题 2．设在平面上有一动点 P 和一定点 O，如果 P 的运动方向始终与直线 OP 垂直，则 P 的运动轨道是圆周．

解　取以 O 为原点的坐标系，设动点 P 的坐标为 (x, y)，则 P 的运动方向的斜率为 $\dfrac{dy}{dx}$，OP 的斜率为 $\dfrac{y}{x}$，由题意得 $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{y}{x}=-1$．即 $ydy+xdx=0$，积分得 $\int ydy+\int xdx=c$，即 $x^2+y^2=2c$．此即圆周．

解法 2．齐次型　形如 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的微分方程，若令 $y=ux$（u 为新的未知函数）代入方程，则 $u'x+u=f(u)$，即 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}\Big[f(u)-u\Big]$，由此化为解法 1．

例题 1　解微分方程 $(x^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}-2xy=0$．

解　由原方程得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=2\left(\dfrac{y}{x}\right)\Big/\left[1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]$．

令 $y=ux$，则 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2u}{1-u^2}$，$x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{u+u^3}{1-u^2}$，$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1-u^2}{u(1+u^2)}$．

$$du=\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du.$$

两边积分得 $\ln|x|=\ln\left|\dfrac{u}{1+u^2}\right|+c_1$．

$$\therefore\quad |x|=|c|\frac{|u|}{1+u^2}=|c|\frac{|xy|}{x^2+y^2},\quad (|c|=e^{c_1}).$$

若适当选取 c 的符号，则得 $x^2+y^2=cy$．

例题 2．从定点 O（坐标原点）向曲线 $y=f(x)$ 上任意点 P 处的切线引垂线，此垂线长等于点 P 的横坐标，求此曲线．

解　如图 12—30，PQB 为切线，$OQ\perp PQ$，BP 的斜率 $tg\,\theta=\dfrac{dy}{dx}=$

y'. 先求 OQ 的长:

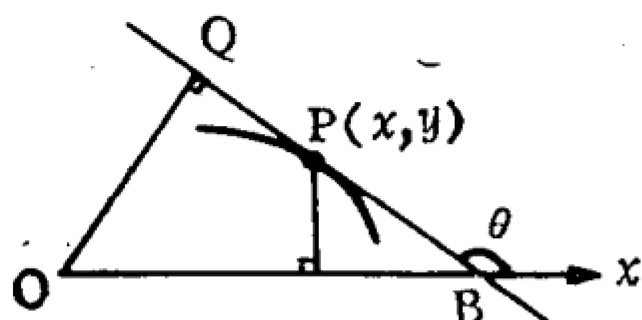


图12-30

$OQ=(OA+AB)\sin\theta$, $OA=|x|$,

$AB=|PA||\text{ctg}\,\theta|=\left|\dfrac{y}{y'}\right|$,

$$\sin\theta=\left|\frac{\text{tg}\,\theta}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}}\right|=\left|\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|.$$

由图可见, x 与 $\dfrac{y}{y'}$ 是反号的, 故

$$OQ=\left|x-\frac{y}{y'}\right|\cdot\frac{|y'|}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{|xy'-y|}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

按题意, $OQ=x$, 两边平方得

$$\frac{(xy'-y)^2}{1+y'^2}=x^2, \text{ 即 } y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

这是齐次型, 用解法 2. 令 $y=ux$, 则

$$u'x+u=\frac{u^2-1}{2u}, \text{ 即 } \frac{2udu}{u^2+1}+\frac{dx}{x}=0.$$

积分得 $x^2+y^2=cx$ (c 为任意常数), 因此所求曲线是圆.

解法 3. 线性型 形如 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的微分方程. 先求 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)=0$ 的解 $y_1(x)$, 这可用解法 1 求得. 然后令 $y=y_1u$, 则原方程变成

$$y_1'u+y_1u'+P(x)y_1u=Q(x),$$

即 $$u(y_1'+P(x)y_1)+y_1u'=Q(x).$$

因 $y_1'+P(x)y_1=0$, 故它成为 $y_1u'=Q(x)$, 这是解法 1 的形式. 在实际求解时, 从 $\dfrac{dy}{y}+P(x)dx=0$

得 $\ln|y_1|=-\int p(x)dx$, $\therefore$ $y_1=e^{-\int p(x)dx}$, (可设 $y_1\geqslant0$).

又从 $y_1u'=Q(x)$ 得

$$u=\int\frac{Q(x)}{y_1}dx+c=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c,$$

$\therefore$ 所求解为 $y=y_1u=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+c\right)$. ①

(c是任意常数).

例题 1. 解微分方程　$xy'=ay+x+1$,　$(a\neq 1)$.

解 对比上述线性型的一般方程得 $P(x)=-\frac{a}{x}$, $Q(x)=1+\frac{1}{x}$.

$\therefore\ \int P(x)dx=-a\ln|x|$.

$\therefore\ \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-a\ln|x|}dx=\int\left(1+\frac{1}{x}\right)x^{-a}dx$

$=\frac{x^{1-a}}{1-a}+\frac{x^{-a}}{-a}$,　$(x>0)$.

$\therefore\ y=e^{a\ln|x|}\left(\frac{x^{1-a}}{1-a}+\frac{x^{-a}}{-a}+c\right)$

$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{a}cx^{a}$, $(x>0)$.

当 $x<0$ 时，设 $|x|=-x$ 即可.

例题 2. 解微分方程　$(x^2y^3+xy)\frac{dy}{dx}=1$.

解 把 y 看作自变数，则原方程变形为

$$\frac{dx}{dy}=xy+x^2y^3,$$

引入新未知函数 $z=-\frac{1}{x}$，则

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dy}.$$

代入①得线性方程　$\frac{dz}{dy}+yz=y^3$,

其中　$y=P(y)$, $y^3=Q(y)$　$\therefore\ \int P(y)dy=\int ydy=y^3$.

$$\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy=\int y^3e^{\frac{y^2}{2}}dy.$$

令　$\frac{y^2}{2}=t$，则 左边$=\int 2te^tdt=2(e^tt-e^t)=e^{\frac{y^2}{2}}(y^2-2)$.

$\therefore\ Z=e^{-\frac{y^2}{2}}\left[e^{\frac{y^2}{2}}(y^2-2)+c\right]$.

将$z=-\frac{1}{x}$代入上式，得$e^{\frac{y^2}{2}}=-x\left[\left(y^2-2\right)e^{\frac{y^2}{2}}+c\right]$，

(c是任意常数)．

4·3 二阶微分方程的解法

解法 1．常系数齐次线性型

$$y''+by'+cy=0,\ (b,\ c\text{是常系数})． \quad ①$$

对于这个方程，可作二次方程$z^2+bz+c=0$． ②

②称为①的**特征方程**，②的根称为①的**特征根**．根据②有实根或虚根，可分以下三种情形讨论：

1° $b^2-4c>0$，②有两相异实根α，β，①的通解为 $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$，($A$，$B$是任意常数)．

2° $b^2-4c=0$．②有一个二重实根α，①的通解为 $y=(A+Bx)e^{\alpha x}$，(A，B是任意常数)．

3° $b^2-4c<0$．②有共轭复数根$a\pm bi$，①的通解为 $y=(A\sin bx+B\cos bx)e^{ax}$，($A$，$B$是任意常数)．

证明 把以上各种情形下的y的表达式代入方程①，便可知它们都是①的解，又因y中含有两个任意常数，故y是通解． □

解法 2．常系数非齐次线性型

$$y''+by'+cy=f(x),\ (b,\ c\text{是常系数})． \quad ③$$

先求出③的一个特解，设为$y_2(x)$．如果又得到方程①的通解$y_1(x)$，则③的通解为$y=y_1(y)+y_2(x)$，

证明 把$y=y_1(x)+y_2(x)$代入③的左边，得

$$y_1''+y_2''+b(y_1'+y_2')+c(y_1+y_2)． \quad ①$$

因y_2是③的解，故 $y_2''+by_2'+cy_2=f(x)$．又因y_1是①的解，故

$y_1''+by_1'+cy_1=0$．因此由①

得 $(y_1+y_2)''+b(y_1+y_2)'+c(y_1+y_2)=f(x)$，

$\therefore$ $y=y_1+y_2$是③的通解． □

例题 1． 解方程$y''+n^2y=x$．

解 由观察法立即得：$y_2=\frac{x}{n^2}$是已知方程的一个特解．又因$y_1=A\sin nx+B\cos nx$是对应齐次方程$y''+n^2y=0$的通解，故原方程的通解为

$$y=A\sin nx+B\cos nx+\frac{x}{n^2}．$$

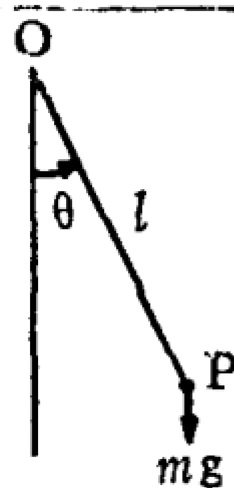


图12-31

例题2. 设单摆柄长为l，摆球质量为m，单摆柄在时刻t与铅垂线夹角为$\theta(t)$，重力加速度为g，求单摆周期T.

解 如图12—31考虑在P点的摆球所受的作用力. 因P作圆周运动（圆心为O，半径为l），所以在点P的切线方向的加速度为$l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$. 另一方面，重力加速度g在切线方向的分量为$g\sin\theta$，故点P的运动方程为$ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$①.

$\because$ $\sin\theta\approx\theta$（$|\theta|$充分小时），$\therefore$ 若令$\dfrac{g}{l}=a^2$，则上面的方程化为$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+a^2\theta=0$. 如例题1那样，其通解为$\theta=A\sin at+B\cos at$或写成$\theta=\alpha\sin(at+\beta)$，因单摆周期$T$满足$a(t+T)=at+2\pi$，故

$$T=\frac{2\pi}{a}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

注意 若把表示P点初始位置的θ设为θ_0（即$\theta(0)=\theta_0$），P的初速度为v_0（即$\dot\theta(0)=v_0$），则从$\theta_0=\alpha\sin(a\cdot0+\beta)$，$v_0=\dot\theta(0)=a\alpha\cos(a\cdot0+\beta)$可确定$\alpha$，$\beta$，这样的条件$\theta(0)=\theta_0$，$\dot\theta(0)=v_0$称为微分方程$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}+a^2\theta=0$的初始条件.②

例题3. 一质量m的物体以初速v_0自由下落，设其运动速度与空气摩擦阻力成正比例，取物体开始下落的位置为原点O，物体下落的铅直路径为y轴，向下方向为y轴正方向，试求在开始下落t秒时的速度v、加速度a及距离y.

解 按题意，物体运动方程为$m\ddot y=mg-k\dot y$，① 其中$k>0$为比例常数. 令$\dot y=v$，$\dfrac{k}{m}=h$，则由①有$\dot v=g-hv$. ② 分离变数得$\dfrac{dv}{g-hv}=dt$，由此积分并代入初始条件（$v\Big|_{t=0}=v_0$），得

$$\frac{1}{h}\ln\frac{g-hv_0}{g-hv}=t,\qquad\therefore\quad\frac{g-hv_0}{g-hv}=e^{ht}.$$

---

① 右端负号是由于重力在切线方向的分力与位移$l\theta$的正方向相反.——译注

②这种条件在3.7［定义3］后各例中早遇到. 一般地说，一阶方程有一个初始条件，二阶方程有两个初始条件.——译注

$\therefore\quad v=\frac{g}{h}(1-e^{-ht})+v_0e^{-ht}$. 把 $h=\frac{K}{m}$ 代入，得所求速度 $v=$

$$\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}.\qquad ③$$

由③对 t 求导，得所求加速度

$$a=\dot{v}=ge^{-\frac{k}{m}t}-\frac{k}{m}v_0e^{-\frac{k}{m}t}=\left(g-\frac{k}{m}v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

由③对 t 积分并代入初始条件 $\left(y\Big|_{t=0}=0\right)$，得

$$y\Big|_0^y=\left[\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)-v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]\Bigg|_0^t.$$

$\therefore$ 所求距离 $y=\frac{mg}{k}t-\frac{m}{k}\left(\frac{mg}{k}-v_0\right)\left(e^{-\frac{k}{m}t}-1\right)$.

例题 4. 质量 m 的物体从静止状态自由下落．设其所受空气阻力与下落速度的平方成正比，取物体（看作质点）开始下落的位置为原点 O，过 O 的铅直直线为 y 轴，向下为 y 轴正向．在开始下落后的时刻 t，质点的坐标为 $y(t)$．则在任意时刻 t 的速度 v 为

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(1-e^{-2\frac{k}{m}y}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

解 按题意，质点运动方程为

$$m\dot{v}=mg-kv^2,\ (k\text{ 是比例常数}).\qquad ①$$

分离变数，$\frac{dv}{g-h^2v^2}=dt$，$\left(h^2=\frac{k}{m}\right)$.　　②

由此积分并代入初始条件 $\left(v\Big|_{t=0}=0\right)$，得

$$\frac{1}{2h\sqrt{g}}\ln\frac{e^{2ht\sqrt{g}}-1}{e^{2ht\sqrt{g}}+1}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\cdot e\frac{e^{2t\sqrt{kg/m}}-1}{e^{2t\sqrt{kg/m}}+1}.\qquad ③$$

其次，把②的两边与 $v=\frac{dy}{dt}$ 的两边分别相乘，得 $\frac{vdv}{g-h^2v^2}=dy$，由此积分并代入初始条件 $\left(v\Big|_{y=0}=0\right)$，得

$$y=\frac{1}{2h^2}\ln\frac{g}{g-h^2v^2},\ \left(\frac{dv}{dy}>0,\ \therefore\ g-h^2v^2>0\right).$$

由此解出 v，得

$$v=\frac{\sqrt{g}}{h}\left(1-e^{-2h^2 y}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(1-e^{-\frac{k}{m}y}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

例题 5. 地球半径 $R=6.38\times10^6\ m$，地球中心到月球（看作质点）的距离是 $60R$，从地面向月球发射物体时，设空气阻力和月球引力忽略不计，而且月球对于地球是相对静止的．在这些假设下，为了使物体能到达月球且本速度为零，必须使物体大约具有初速度 $v_0\approx1.1\ km/s$.

解 取地心为原点，地球向月球的方向为 x 轴正向，地球、物体质量各为 M、m. 设物体在发射后在时刻 t 的坐标为 $x(t)$，则物体的运动方程为 $m\ddot{x}=-kMm/x^2$（k 是万有引力的比例常数）．两边乘以 $2\dot{x}$ 后对 t 积分，并代入条件 $\dot{x}\Big|_{x=60R}=0$，得

$$\dot{x}^2=\frac{2gR^2}{x}+c\left(g=\frac{kM}{R^2}\right),\quad 0=\frac{2gR^2}{60R}+c,$$

$$\therefore\quad c=-\frac{2gR}{60},\ \text{即}\ v^2=\frac{2gR^2}{x}-\frac{2gR}{60}.$$

为了求初速度 v_0，令 $x=R$，有

$$v_0^2=gR\cdot\frac{59}{30}\approx9.8\times6.38\times10^6\times1.96$$

$$\approx122.54604\times10^6.$$

$\therefore$ 物体的初速度 $v_0\approx\sqrt{122.54604}\times10^3\approx11.1$ (km/s).



第十三章　概率·统计

§1. 概　　率

1.1　概率的定义

【定义】1. 试验　即使在相同的条件下，在作某个重复实验时，由于受偶然性因素的影响，实验的结果也可能不相同，我们把这样的实验叫做试验。比如掷骰子、抽签等就是这样的试验.

【定义】2. 事件　作为试验结果的每一个事物以及若干个这样的事物所组成的组，都叫做这个试验中的事件。例如，掷骰子时掷出奇数点，或者抽签时中签等都叫做事件.

【定义】3. 数学概率(先验概率)　若一次试验中可能发生的结果总共有n个，都是等可能的，而且其中任何两个都不可能同时发生，又设使事件E发生的次数为$r(r\leqslant n)$，则把$\frac{r}{n}$叫做事件E发生的数学概率(先验概率).例如掷骰子时，掷出1点的数学概率为$\frac{1}{6}$.

【定义】4. 统计概率(经验概率)　在某种条件下，设试验的总次数为n，事件E出现的次数为r，这时把比值$p=\frac{r}{n}$叫做在这n次试验中事件E发生的相对频率。当其n充分大时，可以认为该相对频率差不多等于一个定值p，那末就把该值p叫做事件E发生的统计概率(经验概率).例如，在日本出生的全部婴儿中，每年观察其男婴的数目，得出男婴出生的概率为0.51，这个概率就是统计概率.

【定义】5. 全事件(必然事件)Ω　在一个试验中，把试验的所有可能的结果合在一起看作一个事件，叫做这个试验的全事件(或必然事件)，一般记为Ω，全事件发生的概率为$p(\Omega)=1$。从集合观点看它对应于全集合.

【定义】6. 空事件(不可能事件)ϕ　与全事件相反，把任何一个结果都不发生的情况视为一个事件，叫做空事件(不可能事件)，记为ϕ. 空事件发

生的概率为 $p(\phi)=0$. 空事件对应于空集合.

【定义】7. 和事件 对于两个事件 E, F, 把"E, F 中至少有一个发生"的事件叫做 E, F 的和事件, 记为 $E\cup F$. 这自然可推广到两个以上的事件, 把事件 E_1, E_2, E_3, …, E_k 中至少有一个发生的事件叫做 E_1, E_2, E_3…, E_k 的和事件, 记为 $E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots\cup E_k$.

【定义】8. 积事件 对于两个事件 E, F, 称"E 和 F 都发生"的事件为 E 和 F 的积事件, 记为 $E\cap F$. 推广到两个以上的事件, 则把"E_1, E_2, …, E_k 都发生"的事件叫做 E_1, E_2, …, E_k 的积事件, 记为 $E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_k$.

【定义】9. 余事件 对于事件 E, 把"E 不发生"的事件叫做 E 的余事件, 记为 $\overline{E}$ 或 E^c. (c 是"Complement"(余)一词的第一个字母).

【定义】10. 互斥事件 对于两个事件 E, F, 当 $E\cap F=\phi$ 时, 即当事件 E 和事件 F 绝不会同时发生时, 把它们叫做互斥事件. 任意事件 E 和它的余事件 E^c 就是互斥事件. 事件 E_1, E_2, …, E_k 中两两都是互斥事件时, 事件 E_1, E_2, …, E_k 称做互斥事件组.

【定义】11. 独立事件 对于两个以上的事件, 不管其中的某一个事件发生与否, 其它事件或其各种积事件发生的概率都不变, 这时, 我们把这样的一些事件叫做互相独立的事件.

两个事件 E, F, 它们都发生的概率为 $P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F)$.

【定义】12. 相关事件 对于两个事件 E, F, 若 F 发生的概率随着 E 的发生与否而改变, 则把 F 叫做是依赖于事件 E 的事件, 或说 F 是事件 E 的相关事件.

【定义】13. 条件概率 对于两个事件 E, F, 设 $P(E)>0$, 则把 $\frac{P(E\cap F)}{P(E)}$ 叫做 E 发生的条件下 F 的条件概率. 写成 $P_E(F)$ 或 $P(F/E)$. 当 $P(E)=0$ 时, $P_E(F)$ 没有定义. 又当事件 E, F 相互独立时, 则有 $P_E(F)=P(F)$.

1·2 概率计算的基本定理

【定理】1. 对于事件 E, F, G 的和事件、积事件、余事件等, 有如下的交换律、结合律、分配律以及其它一些性质:

(1) $E\cup F=F\cup E$ (交换律);

(2) $E\cap F=F\cap E$ (交换律);

(3) $(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$ (结合律);

(4) $(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)$ (结合律);

(5) $(E\cup F)\cap G=(E\cap G)\cup(F\cap G)$ （分配律）；

(6) $(E\cap F)\cup G=(E\cup G)\cap(F\cup G)$ （分配律）；

(7) $\overline{E\cup F}=\bar{E}\cap\bar{F}$；

(8) $\overline{E\cap F}=\bar{E}\cup\bar{F}$；

(9) $\bar{\Omega}=\phi$；

(10) $\bar{\phi}=\Omega$；

(11) $E\cap\bar{E}=\phi$；

(12) $E\cup\bar{E}=\Omega$；

(13) $E=\bar{\bar{E}}$.

证明 (1)，(2)，(3)，(4)显然，又由全事件、空事件、余事件的定义，(9)，(10)，(11)也显然．再由$\bar{E}=\Omega\setminus E$，故$\bar{\bar{E}}=\overline{\Omega\setminus E}=E$，(13)得证．

(5)的左端可叙述为"E或F发生时，G也发生"，也可以叙述为"E发生时G也发生，或者F发生时G也发生"，这正是右端的事件．(5)即得证．同理(6)也可得证．

(7)的左端是"E和F一个都不发生"的事件，换言之，就是"$\bar{E}$和$\bar{F}$都不发生"的事件．这正是右端的事件，于是(7)得证．至于(8)，只要在(7)中把E，F换为$\bar{E}$，$\bar{F}$，然后再利用(13)的关系式$\bar{\bar{E}}=E$，即有$\overline{\bar{E}\cup\bar{F}}=\bar{\bar{E}}\cap\bar{\bar{F}}=E\cap F$．再在两端取余事件，并交换左右两端的位置即有$\overline{E\cap F}=\bar{E}\cup\bar{F}$. □

【定理】 2. $P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$，$0\leqslant P(E)\leqslant 1$.

证明 由概率的定义，$P(E)=\frac{r}{n}$，$0\leqslant r\leqslant n$，因而有$0\leqslant P(E)\leqslant 1$．当$E$为全事件时，$r=n$；$E$为空事件时，$r=0$．所以$P(\Omega)=1$，$P(\phi)=0$. □

【定理】3.（互斥事件的加法定理） 若$E\cap F=\phi$，则$P(E\cup F)=P(E)+P(F)$.

证明 设全事件发生的次数为$n(\Omega)=n$，事件E，F发生的次数分别为$n(E)=r_1$，$n(F)=r_2$，由于$E\cap F=\phi$，所以事件E和F不可能都发生，因此事件$E\cup F$发生的次数应为$n(E\cup F)=r_1+r_2$．从而

$$P(E\cup F)=\frac{r_1+r_2}{n}=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}=P(E)+P(F).$$ □

【定理】 3'. 设m个事件E_1，E_2，…，E_m是互斥事件（参见【定义】10）．

则 $P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m)=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_m)$.

证明 设全事件发生的次数为 $n(\Omega)=n$，其中事件 E_1，E_2，…，E_m 发生的次数分别为 r_1，r_2，…，r_m. 由于 E_1，E_2，…，E_m 是互斥事件，所以这 r_1，r_2，…，r_m 个结果之中不会有重复. 因而 E_1，E_2，…，E_m 诸事件中任何一个发生的总数为 $r_1+r_2+\cdots+r_m$.

$$\therefore\quad P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m)=\frac{r_1+r_2+\cdots+r_m}{n}$$

$$=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}+\cdots+\frac{r_m}{n}$$

$$=P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_m).$$ □

【定理】 4. 对于两个事件 E，F，下式成立：

$$P(E\cup F)+P(E\cap F)=P(E)+P(F),$$

$$\therefore\quad P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F).$$

证明 设全事件 Ω 发生的次数为 $n(\Omega)=n$，使 E 和 F 都发生的数目为 $n(E\cap F)=a$，E 发生而 F 不发生的数目为 $n(E\cap\bar{F})=b$，使 E 不发生而 F 发生的数目为 $n(\bar{E}\cap F)=c$. E 和 F 都不发生的数目为 $n(\bar{E}\cap\bar{F})=d$. 于是有

$$a+b+c+d=n.$$

而 E 发生的次数为 $n[(E\cap F)\cup(E\cap\bar{F})]=a+b$，

而 F 发生的次数为 $n[(E\cap F)\cup(\bar{E}\cap F)]=a+c$，

而使 E 或者 F 发生的次数为 $a+b+c$，

E 及 F 都发生的次数为 a.

$$\therefore\quad P(E\cup F)+P(E\cap F)=\frac{a+b+c}{n}+\frac{a}{n}$$

$$=\frac{a+b}{n}+\frac{a+c}{n}=P(E)+P(F).$$

移项即得 $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$. □

另证 由于 E 和 $\bar{E}$，F 和 $\bar{F}$ 是互斥事件，$E\cap F$，$E\cap\bar{F}$，$\bar{E}\cap F$，$\bar{E}\cap\bar{F}$ 相互为互斥事件，并且

$$E=(E\cap F)\cup(E\cap\bar{F}),\quad F=(E\cap F)\cup(\bar{E}\cap F).$$

由上两式有 $E\cup F=(E\cap F)\cup(E\cap\bar{F})\cup(\bar{E}\cap F)$，因而由这三个式子和互斥事件的加法定理，有

$$P(E)=P(E\cap F)+P(E\cap\bar{F}).$$

$P(F)=P(E\cap F)+P(\bar{E}\cap F)$[①],

$P(E\cup F)=P(E\cap F)+P(E\cap\bar{F})+P(\bar{E}\cap F)$.

把前两式代入第三式即得

$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$. □

【定理】5. $P(E)=1-P(\bar{E})$.

证明　由【定理】1 中的(11)，有 $E\cap\bar{E}=\phi$,

$\therefore\ P(E\cap\bar{E})=0$　①

另由【定理】1 中的(12)，有$E\cup\bar{E}=\Omega$，$\therefore\ P(E\cup\bar{E})=1$. 而由 ①及【定理】4，有

$P(E\cup\bar{E})=P(E)+P(\bar{E})$，$\therefore\ P(E)+P(\bar{E})=1$.

亦即　$P(E)=1-P(\bar{E})$. □

【定理】6. $P(E\cap F)\leqslant P(E)\leqslant P(E\cup F)$.

证明　由于对事件 $E\cap F$，E，$E\cup F$，有包含关系[②]：$(E\cap F)\subseteq E\subseteq(E\cup F)$，故对于它们发生的次数有

$n(E\cap F)\leqslant n(E)\leqslant n(E\cup F)$.

设全事件发生的次数为 $n(\Omega)=n$，则有　①

$$P(E\cap F)=\frac{n(E\cap F)}{n},\quad P(E)=\frac{n(E)}{n},$$

$$P(E\cup F)=\frac{n(E\cup F)}{n}.$$

因此由①的关系即得

$P(E\cap F)\leqslant P(E)\leqslant P(E\cup F)$. □

【定理】7.（相关事件的乘法定理）　当 $P(E)>0$ 时，有

$$P_E(F)=\frac{P(E\cap F)}{P(E)}\quad(见【定义】13).$$

$P(E\cap F)=P(E)P_E(F)\quad(P(E)>0)$.

证明　因使全事件 Ω 发生的次数为 $n(\Omega)=n$，且事件 $E\cap F$，$E\cap\bar{F}$，$\bar{E}\cap F$，$\bar{E}\cap\bar{F}$ 是互斥事件，致使它们发生的次数分别为

$n(E\cap F)=a$，$n(E\cap\bar{F})=b$，$n(\bar{E}\cap F)=c$，$n(\bar{E}\cap\bar{F})=d$. 而这四

① 此式的证明见后面[定理]9.——译注

② 若事件 A 发生，则必有事件 B 发生，就称事件 A 含于事件 B，记为$A\subset B$或$B\supset A$. 如果 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$.——译注

个事件可用来表示全事件，故 $n=n(\Omega)=a+b+c+d$.

再由 $E=(E\cap F)\cup(E\cap\bar{F})$，故 $n(E)=n(E\cap F)+\cap(E\bar{\cap}F)=a+b$，因而 E 发生的概率为

$$P(E)=\frac{n(E)}{n}=\frac{a+b}{a+b+c+d}.$$

E，F 都发生的概率为

$$P(E\cap F)=\frac{n(E\cap F)}{n}=\frac{a}{a+b+c+d}.$$

若在事件 E 发生的条件下来考察事件 F，这时的全事件，即事件 E，使之发生的次数为 $a+b$，因此事件 E 发生的条件下 F 发生的概率为

$$P_E(F)=\frac{a}{a+b}.$$

$$\therefore\ P(E\cap F)=\frac{a}{a+b+c+d}=\frac{a+b}{a+b+c+d}\cdot\frac{a}{a+b}$$
$$=P(E)\cdot PE(F).$$

□

【定理】7′.（相关事件的乘法定理） 没有 m 个事件 E_1，E_2，…，E_m，若 $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{m-1})>0$，则

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots E\cap_m)=P(E_1)P_{E_1}(E_2)P_{E_1\cap E_2}(E_3)\cdots P_{E1\cap E_2\cap\cdots\cap Em-1}(E_m).$$

证明 当 $m=2$ 时，设 $P(E_1)>0$，由【定理】7，有

$$P(E_1\cap E_2)=P(E_1)P_{E_1}(E_2).$$

现假设对于 m 个事件定理成立，我们来证明它对 $m+1$ 个事件也成立.

首先，给出事件 $E_1,E_2,\cdots,E_m,E_{m+1}$，并设 $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)>0$，运用【定理】7 即有

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{m+1})=P\{(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)\cap E_{m+1}\}$$
$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)\cdot P_{E_1\cap E_2\cap\cdots Em}(E_{m+1}).$$

由于 $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)>0$，则 $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{m-1})>0$.

而对 $P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)$，已假设定理成立，即有

$$E(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)=P(E_1)P_{E_1}(E_2)\cdots P_{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E\ m-1}(E_m).$$

把这个等式代入上式，就证明定理对 $m+1$ 成立. 于是由数学归纳法，定理得证.

□

【定理】8. 若 $P_E(F)=P(F)$，则事件 E 和 F 称为独立事件(见【定义】11)，这时

$$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F).$$

证明 据【定理】7，有$P(E\cap F)=P(E)P_E(F)$，又由假定条件$P_E(F)=P(F)$，所以

$$P(E\cap F)=P(E)\cdot P(F).$$ □

另证 设关于事件E，试验的结果的总数为n_E，其中使事件E发生的次数为a，关于事件F，试验的结果的总数为n_F，其中事件F发生的次数为b，则

$$P(E)=\frac{a}{n_E},\quad P(F)=\frac{b}{nF}.$$

另一方面，根据乘积原则，关于事件E和F，试验的结果的总数应为$n_E\times n_F$. 使E和F都发生的次数应为$a\times b$.

$$\therefore\quad P(E\cap F)=\frac{a\cdot b}{n_E\cdot n_F}=\frac{a}{n_E}\times\frac{b}{n_F}=P(E)\cdot P(F).$$ □

【定理】8′. 若m个事件$E_1, E_2, \cdots, E_m$中任一个事件都与其余的$(m-1)$个事件中的任意多个事件的积事件相互独立，则称这m个事件是全体独立的，这时有

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)=P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_m).$$

证明 在定理的假设条件下，有

$$P_{E_1}(E_2)=P(E_2),P_{E_1\cap E_2}(E_3)=P(E_3),\cdots,\ P_{E_1\cap E_2\cdots\cap E_{m-1}}(E_m)=P(E_m).$$

再根据【定理】7′，即得

$$P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_m)=P(E_1)\cdot P(E_2)\cdots P(E_m).$$ □

【定理】9′. $P(F)=P(E\cap F)+P(\bar{E}\cap F)$.

证明 $\because\quad (E\cap F)\cap(\bar{E}\cap F)=E\cap\bar{E}\cap F=\phi,$

且$(E\cap F)\cup(\bar{E}\cap F)=F$，于是由互斥事件的加法定理即得

$$P(F)=P((E\cap F)\cup(\bar{E}\cap F))=P(E\cap F)+P(\bar{E}\cap F).$$ □

注意 当然，事件F本身发生的概率可以说与事件E的发生与否无关，稍加考虑这也是自然的事情，下面也一样.

【定理】10. 当F是任意的事件时，有

$$P(F)=P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F),$$ （这里$P(E)>0$，且$P(\bar{E})\neq 0$）.

证明 由【定理】9，有$P(F)=P(E\cap F)+P(\bar{E}\cap F)$，

再根据【定理】7，有$P(E\cap F)=P(E)P_E(F)$，

$$P(\bar{E}\cap F)=P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F).$$

$\therefore\quad P(F)=P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F).$ □

【定理】10′. 若在 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中，任意两个都不同时发生，但必定有一个发生，且 $P(E_i)\neq 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，则对任意的事件 F，有

$$P(F)=P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F).$$

证明 由于 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中某一个必产生，而任意两个不同时产生，所以

$$E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n=\Omega,\quad E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n=\phi.$$

因此

$$(E_1\cap F)\cap(E_2\cap F)\cap(E_3\cap F)\cap\cdots\cap(E_n\cap F)=E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_n\cap F=\phi.$$

据分配律

$F=F\cap\Omega=F\cap(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=(F\cap E_1)\cup(F\cap E_2)\cup\cdots\cup(F\cap E_n)$，其中 $F\cap E_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 互为互斥事件，由于它们的和事件等于事件 F，根据互斥事件的加法定理，有

$$\begin{aligned}P(F)&=P(E_1\cap F)+P(E_2\cap F)+\cdots+P(E_n\cap F)\\&=P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F).\end{aligned}$$

(根据【定理】7) □

【定理】11.（贝叶斯定理） 设 $P(E)\neq 0$，$P(\bar{E})\neq 0$，则当 $P(F)>0$ 时，有

$$P_F(E)=\frac{P(E)P_E(F)}{P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F)}.$$

证明 由【定理】10，有 $P(F)=P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F)$.

又由【定理】7，有 $P(E\cap F)=P(E)P_E(F)$，

$$\therefore\quad \frac{P(E)P_E(F)}{P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F)}=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}.$$

另一方面，由【定理】7（【定义】13），有 $P_F(E)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$.

故
$$P_F(E)=\frac{P(E)P_E(F)}{P(E)P_E(F)+P(\bar{E})P_{\bar{E}}(F)}.$$ □

【定理】11′. 设 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 中任意两个都不同时发生，但必有一个发生．且 $P(E_i)\neq 0$，$i=1, 2\cdots, n$.

则
$$P_F(E_k)=\frac{P(E_k)P_{E_k}(F)}{P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F)}.$$

证明 由【定理】10，有

$$P(F)=P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F).$$

又根据【定理】7．有　$P(E_k\cap F)=P(E_k)P_{E_k}(F)$．

$$\therefore \quad \frac{P(E_k)P_{E_k}(F)}{P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F)}$$

$$=\frac{P(E_k\cap F)}{P(F)}.$$

而由【定义】13（【定理】7），有 $\dfrac{P(E_k\cap F)}{P(F)}=P_F(E_k)$，

因此　$$P_F(E_k)=\frac{P(E_k)P_{E_k}(F)}{P(E_1)P_{E_1}(F)+P(E_2)P_{E_2}(F)+\cdots+P(E_n)P_{E_n}(F)}.\ \square$$

注意　在一般中专课本里，未收入贝叶斯定理、近来对该定理有了新的认识，而且如这里所讲的，补充一些预备知识后，可以用初等方法来证明，因此贝叶斯定理是否适合中专程度自然就明白了．

【定理】12．（二项式概率）　假设在一次试验中，事件 E 发生的概率为 p，E 不发生的概率为 $q(=1-p)$，则在 n 次独立试验中，事件 E 发生 r 次的概率为 $c_n^r\ p^rq^{n-r}$．

证明　由于 E 发生的概率为 p，不发生的概率为 q，故在 n 次独立试验中事件 E 在指定的 r 次试验中发生，而在其余 $n-r$ 次试验中不发生的概率为 p^rg^{n-r}．

又在 n 次试验中，选出 r 次的方式有 c_n^r 种，且这 c_n^r 个事件之间是互相排斥的．据互斥事件的加法定理，所要求的概率即是 c_n^r 个 p^rq^{n-r} 的和．因此是 $c_n^rp^rq^{n-r}$．　$\square$

注意　由二项式定理

$$(p+q)^n=p^n+c_n^1p^{n-1}q+c_n^2p^{n-2}q^2+\cdots+c_n^rp^{n-r}q^r+\cdots+q^n$$

看出，在这个展开式中，从首项开始依次表出了 n 次试验中 E 发生 n 次，$n-1$ 次，$n-2$ 次，…，$n-r$ 次…，0 次的概率，这就是二项式概率这个名称的由来．

又因 $p+q=1$，由互斥事件的定理，右端当然表明了在这 $n+1$ 个事件中，某一事件必定发生的概率．

再则，n 次试验中，由于事件 E 发生 r 次，$r+1$ 次，…，n 次等事件之间是互相排斥的，所以 n 次试验中事件 E 至少发生 r 次的概率为

$p^n+c_n^1p^{n-1}q+c_n^2p^{n-2}q^2+\cdots+c_n^rp^rq^{n-r}$（这里用到 $c_n^r=c_n^{n-r}$）．二项式概率也叫做**重复试验的概率**

例题　掷骰子10次，求出1点至少出现2次的概率.

解　注意到它是1点完全不出现和只出现一次的余事件，再根据【定理】12，即有

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}-c_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{9}=1-\frac{9765625}{60466176}-\frac{19531250}{60466176}$$

$$=\frac{31169301}{60466176}\approx 0.515.$$

§2．统　计

2·1　频数分布及频数分布图

【定义】1．均值　n个数据x_1，x_2，…，x_n的算术平均值叫做均值，记为$\bar{x}$，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

【定理】1．设变量取x_1，x_2，…，x_k等值的次数分别为f_1，f_2，…，f_k，于是当$\sum_{i=1}^{k}f_i=n$时，　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_ix_i$.

证明　在【定义】1的x_1，x_2，…，x_n中将相等的数据合并在一起，结论即明.　□

【定义】2．频数分布表　把若干数据按大小分类作出的表，叫做频数分布表.一般是在最大数据和最小数据之间用一些数字作分点，把它分成相等的小段，使各数据分别落入某一小段中，把这样的数据段叫做级或组.把每个组的宽度叫做组幅或组距，各组的中点叫做组心，把组心的大小叫做组值，并且把分入各组的数据个数叫做组的频数.

【定义】3．频数分布图　把数据的大小作为横轴，把频数作为纵轴而成的一个图，一般叫做频数分布图，以各个组距为底，以各组的频数为高分别作出矩形，这些并列的矩形构成的柱形图是最常用的．把各组的组心取作x坐标，把其频数取作y坐标，再用线段联接各点而成的频数多边形（或叫做频数折线）也是常用的.

【定义】4．用频数分布表计算均值　有n个数据，被分成K个组，各数据的太小不清楚，设各组的组值为x_1，x_2，…，x_k，各组的频数为f_1，f_2，…，f_k（当然，$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），则其均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i.$$

注意　由频数分布表计算均值，用【定理】1 这样的公式，在各组内数据均匀分布的情况下是精确的，可是在多数情况下却不一定精确，即与【定义】1 算出来的均值有差异，只不过这个差异极小，以至可以忽略不计罢了，然而有差异是一个事实，所以应当特别加以定义.

【定理】2. 设组幅(组距)为 c，接近均值的适当值(叫做伪均值)为 $\bar{x}'$，若设

$$u_i=\frac{x_i-\bar{x}'}{c}\text{，则}$$

$$\bar{x}=\bar{x}'+\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\ \left(\text{但是}\sum_{i=1}^{k} f_i=n\right).$$ 若设 u_i 的均值为 $\bar{u}$，则

$$\bar{x}=\bar{x}'+c\bar{u}.$$

证明　由 $u_i=\dfrac{x_i-\bar{x}'}{c}$，因此

$$c\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x}')=\sum_{i=1}^{k} f_i x_i-n\bar{x}'.$$

$$\therefore\quad \bar{x}'+\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i=\bar{x}'+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i-\bar{x}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i=\bar{x}.$$

又由于 $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i=\bar{u}$，故后半部分也显然得证.　□

注意　为了说明本定理中"伪均值"一词，用了"接近均值的适当值"的说法，实际上，$\bar{x}'$ 距均值近也可以，远也可以，取任意的值，上述定理都成立，但应用该定理于实际计算均值时，取 $\bar{x}'$ 为接近均值的适当的(便于计算 $x_i-\bar{x}'$ 的)值，对以后的计算方便一些.

【定义】5. 中位数　n 个数据 x_1，x_2，…，x_n，依大小顺序（由小到大或由大到小都可以）排列时，把位于它的中央的值叫做中位数. 因为它是位于中央位置的数，所以又叫做中心值. n 个数据的大小不必完全不同，但要依大小顺序排列. 通常当 n 为奇数时，取第 $\dfrac{n+1}{2}$ 个数据为中位数，当 n 是偶数时，取第 $\dfrac{n}{2}$ 个和第 $\dfrac{n}{2}+1$ 个数据之平均值作为中位数.

【定义】6. 众数　把频数最大的数据叫做众数，或叫做最频值，一般用频数分布图中最高峰所在的组的组值来表示.

注意　对于中位数和众数，当其数据是由频数分布表或频数分布图给出的时候，一般是用它们所在组的组值来表示．实际上，这是有偏离的．中位数应当表为该组的左端点值加上该组组幅 c 乘以一个比例因子之积，这个比例因子就是该组内到中位数之前的频数与该组的频数 f_i 之比，即设中位数为 M_e，该组的左端点为 X_i，到该组之前的频数为 f_i，总频数为 n，

则有　　$M_e=X_i+\frac{c}{f_i}\left(\frac{n}{2}-f_i\right)$.

又，对于最频值来说，也要用类似的方法处理．只是这里的比例因子由众数所在的组的频数，及前一组的频数和后一组的频数确定，即设众数为 M_0，它所在组的左端之值为 X_0，该组的组幅为 c，频数为 f_0，且前一组的频数为 f_{-1}，后一组的频数为 f_1 时，应当有

$$M_0=X_0+\frac{c(f_0-f_{-1})}{(f_0-f_{-1})+(f_0-f_1)}.$$

在中等专业学校中，通常就用组值，如图 13—1.



图13—1

在上面的两图中，虚线表众数的位置．(1) 图中众数位于所在区间中点之左．而在(2)图中，却在中点之右．

记方差为 s^2，标准差为 s，于是有

【定义】7. 方差·标准差(均方差或根方差)　均值与各数据之差的平方和的平均值叫做方差，把方差的正平方根叫做标准差(均方差或根方差)．

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2,\quad s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2},$$

其中　　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$.

注意　s 是 *Standard Deviation* (标准差)的第一个字母．也可用 D 表示标准差．也有人取 *Variance* (方差)的第一个字母 V 或 V^2 或 D^2 来表示方差．

【定理】3. 设变量的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，它们的频数分别为 $f_1, f_2, \cdots$，

f_k，则当 $\sum_{i=1}^{k} f_i=n$ 时，有　$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\ (x_i-\overline{x})^2}$ ，

其中　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i$.

证明　在【定义】7 中，把 f_i 个相同的 x_i 合并在一起即得.　□

【定义】8. 由频率分布表求方差和标准差　把n 个数据分成K个组，它们的组值分别为 x_1，x_2，…，x_k，当各组的频数分别为 f_1，f_2，…，f_k 时，方差 s^2 和标准差 s 分别为

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\overline{x})^2,\quad s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{x})^2}.$$

其中 $\sum_{i=1}^{k} f_i=n$，　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_ix_i$.

注意　这里的注意事项与【定义】4 的完全相同.

【定理】4. 各数据与均值的离差之总和必为 0，亦即有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=0.$$

证明　$\because\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\overline{x}$，　$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} x_i=n\overline{x}$.

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\overline{x}=n\overline{x}-n\overline{x}=0.$$ □

【定理】5.（方差的计算法）　若$\sum_{i=1}^{k} f_i=n$，则 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_ix_i^2-\overline{x}^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{k} f_ix_i$.

证明　$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i^2-2\overline{x}\sum_{i=1}^{k} f_ix_i+\overline{x}^2\sum_{i=1}^{k}f_i\right\}$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2\right\}=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i^2-n\overline{x}^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \bar{x}^2.$$ □

【定理】 6. 设频率分布表的组幅（组间隔）为 c，且设伪均值为 $\bar{x}'$，$u_i=\frac{x_i-\bar{x}'}{c}$.

即 $x_i=\bar{x}'+cu_i$，则当 $\sum_{i=1}^{k} f_i=n$，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i=\bar{u}$ 时，有

$$s^2=c^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i^2 - \bar{u}^2\right\}$$

证明 ∵ $cu_i=x_i-\bar{x}'$，

$$c\bar{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i c u_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x}')$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i-\bar{x}'=\bar{x}-\bar{x}',$$

$$\therefore\quad c^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i^2-\bar{u}^2\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(cu_i)^2-(c\bar{u})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x}')^2-(\bar{x}-\bar{x}')^2$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-2\bar{x}'\sum_{i=1}^{k} f_i x_i+\bar{x}'^2\sum_{i=1}^{k} f_i\right\}-(\bar{x}-\bar{x}')^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-2\bar{x}\,\bar{x}'+\bar{x}'^2-\bar{x}^2+2\bar{x}\,\bar{x}'-\bar{x}'^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2-\bar{x}^2=s^2.$$ （根据【定理】5） □

注意 利用上一定理，由频数分布表来计算均值和方差时，常常象下例那样，列表计算。

例题　由下表计算某年级男生 200 人的身高均值和标准差：

身高 (cm)	140—145	145—150	150—155	155—160	160—165	165—170	170—175	175—180
人数 (个)	2	4	28	53	66	32	8	2

(其中，比如 140—145 是 140 *cm* 以上，145 *cm* 以下的意义.)

组值 x_i	$x_i - x'$	$u_i = \frac{x_i - x'}{c}$	f_i	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
142.5	−20	−4	2	−8	32
147.5	−15	−3	4	−12	36
152.5	−10	−2	28	−56	112
157.5	−5	−1	58	−58	58
162.5	0	0	66	*0	0
167.5	5	1	32	32	32
172.5	10	2	8	16	32
177.5	15	3	2	6	18
		计	200	−80	320

伪均值为 $x' = 162.5$.

注意　由于 * 号所有项为 0，因而该栏内此项以上各项均为负，其总和为 −134，此项以下各项均为正，其总和为 54．于是该栏内各项的总和为 −134＋54＝−80．

解　由 $c=5$，$x'=162.5$ 得

$$\bar{x} = x' + \frac{c}{n}\sum_{i=1} f_i u_i = 162.5 + \frac{5}{200}(-80)$$

$$= 162.5 + 5(-0.4) = 160.5.$$

$$s^2 = c^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1} f_i u_i^2 - \bar{u}^2\right\} = 25\left\{\frac{1}{200}\times 320 - (-0.4)^2\right\}$$

$$= 25\times\frac{8}{5} - 25\times 0.16 = 36.$$

从而，$s=6$

【定理】 7．所有数据都加上同一数 a，则均值增加 a．若都减去 a，则均值减少 a．但方差和均方差不变．

证明　新数据表为 $x_i\pm a$，记原数据的均值和方差分别为 $\bar{x}$，s^2，则有

$$\text{新均值}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i\pm a)=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}x_1\pm na=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\pm a=\bar{x}\pm a,\right.$$

$$\text{新方差}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{(x_i\pm a)-(\bar{x}\pm a)\right\}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=s^2,$$

（加号，减号一致）

因而新标准差也当然不变．　□

【定理】 8．将每一数据都乘以常数 a，则均值变为原均值的 a 倍，方差变为原方差的 a^2 倍，标准差也变为原标准差的 a 倍(除以 a 的情形，可视为乘以$\frac{1}{a}$)．

证明　用前一定理中相同的记号，有

$$\text{新均值}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ax_i=a\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}=a\bar{x}.$$

$$\text{新方差}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i-a\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a^2(x_i-\bar{x})^2$$

$$=a^2\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}=a^2s^2.$$

据此，新标准差自然是 as，即原标准差的 a 倍．　□

【定理】 9．将各数据减去$\bar{x}$，以及将各数据除以 s 后，所得数据之均值为 0，而方差和均方差皆为 1．

证明　由【定理】7，各数据减去 $\bar{x}$ 后，其均值显然为 0，而且这时的方差也仍然为 s^2．

但若再对以上所得的各数据除以 s，则根据【定理】8，新数据的均值和方差分别为 0 和 1，从而标准差也是 1．　□

注意　象这样的具有均值为 0，方差为 1 的数据的分布，我们叫做标准分布．

2·2 相关分析

【定义】9. 相关 两个变量 x, y，当其中一个的值变化时，考察另一个的频数分布如何变化，称为考察 x, y 间的相关关系。如果当一个变量的值固定时，另一个的频数分布也将相应固定，则称两者间是相关的。

【定义】10. 相关图 在平面坐标系中，把两个变量 x, y 的数据对 (x_1, y_1), (x_2, y_2), ……描点所得到的图形叫做变量 x, y 的相关图或叫点图。

【定义】11. 相关表 把变量 x 分成 x_1, x_2, …, x_k 等 k 个组，把变量 y 分成 y_1, y_2, …, y_l 等 l 个组，相应于组 (x_i, y_j) 的频数记为 f_{ij}，所得到的表叫做相关表或叫做 $k\times l$ 列联表

【定义】12. 相关系数 观察某集合中的变量得到 n 组数据 (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) 时，把

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$\left(\text{其中}\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

叫做相关系数，一般都用符号 r 来表示相关系数。

【定理】10. 有公式

$$r=\frac{\sum^{n} x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2}}.$$

（这里的 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 与【定义】12 中的相同。）

证明 由【定理】5，当 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 时，有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$.

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2.$$

同理，有 $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2$.

又，$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}x_i+n\bar{x}\,\bar{y}$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}.$$

【系】1. 若令 $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，$s_y^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$，

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则有
$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{ns_xs_y}.$$

证明 由【定理】10，显然可知. □

【系】2.
$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}$$

证明 仍由【(定理)】10，明显可得. □

注意 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ 称为协方差，由上述结果，相关系数可视为协方差除以 x 和 y 的标准差之积而得.

【定理】11. 相关系数 r 与变量 x，y 的测量单位和坐标原点的位置无关.

证明 将原变量 x，y 换为新变量 x'，y'. 使得新原点平移到 (x_0, y_0) 点，且设新的单位长分别为原单位长的 p 倍，q 倍（x_0，y_0，p，q 为任意实数），于是有

$x_i^1=p(x_i-x_0)$，$y_i^1=q(y_i-y_0)$，$(i=1, 2, 3, \cdots, n)$. 根据【定理】7，8，新变量的均值和均方差分别

为　$\overline{x'}=p(\overline{x}-x_0)$，$\overline{y'}=q(\overline{y}-y_0)$.

$s_x'=ps_x$，　$s_y'=qs_y$.

因此新变量的相关系数 r' 为

$$r'=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i'y_i'-n\overline{x'}\,\overline{y'}}{ns_x's_y'}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}p(x_i-x_0)q(y_i-y_0)-np(\overline{x}-x_0)q(\overline{y}-y_0)}{nps_xqs_y}$$

$$=\frac{pq\left\{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-x_0\sum_{i=1}^{n}y_i-y_0\sum_{i=1}^{n}x_i+nx_0y_0-n(\overline{x}\,\overline{y}-x_0\overline{y}-\overline{x}y_0+x_0y_0)\right\}}{npqs_xs_y}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{ns_xs_y}=r\quad\left(\because\ \sum_{i=1}^{n}x_i=n\overline{x},\ \sum_{i=1}^{n}y_i=n\overline{y}\right).\qquad\square$$

注意　利用这个定理，只要把频数分布表的数据值看作分布于组值，和计算均值、方差一样，如下例所示可以计算相关系数表，

例题　下面的表是某中等专业学校三年级200名男生身高与体重的相关表，试由此来算出相关系数（表中的数据是以组值和频数表示的，单位取作cm和kg).

注意　下面的相关表中合计那一栏表出的分布叫做**边缘分布**．把数据的取法象普通直角坐标取点一样列于表中，排列形式如表所表出的形式叫做是正相关的．这时，相关系数 r 为正，且接近于1，若 r 接近于0，则叫不相关．反之，当排列形式是由左上到右下密集的情形，叫做是负相关，这时 r 接近于−1.

总之，把 r 的绝对值接近于1的情形叫做强相关.

身长 体重	152	155	158	161	164	167	170	173	176	合计
77								1		1
74						1				1
71							1			1
68		1			1		1	2	1	6
65					1	2	1	3	1	8
62				2	4	2	4	1	1	14
59				2	3	7	12	5	3	32
56		1	2	6	12	15	4			40
53	1	2	12	7	8	10	5	3		48
50	1	3	9	7	7	4	2			33
47	3	2	2	3	2					12
44		3				1				4
合计	5	12	25	27	38	42	30	15	6	200

解 按下列说明列表计算，其中伪均值分别取成164，56.

说明 (1) 适当地取定伪均值后，由组值 x，y 定出变换值 u，v（当然要除以组幅值）.

(2) 频数 f_{uv} 是表中 v 行 u 列交叉点的值，由各 v 行的 f_{uv} 相加得 f_v，各 u 列的 f_{uv} 相加得 f_u，总计数为 n.(2)所要计算的值已由上表给出.(3)、(4)、(5) 中各值见下页列表：

(3) 依次算出相应的 uf_u，u^2f_u，vf_v，v^2f_v 及其合计值.

(4) 再计算出 $\sum uf_{uv}$，$v\sum uf_{uv}$，$\sum vf_{uv}$，$u\sum vf_{uv}$ 及其合计值.

例如在 $v=4$ 这一行计算 $\sum uf_{uv}$，$v\sum uf_{uv}$：$(-3)\times1+0\times1+2\times1+3\times2+4\times1=9$，$4\times9=36$.

(5) 检查用"←↑"连结的两数是否相等，如果相等则作如下的计算：(续见下页表后)

x \ u	v	152 (−4)	155 (−3)	158 (−2)	161 (−1)	164 (0)	167 (1)	170 (2)	173 (3)	176 (4)	计 f_v	vf_v	v^2f_v	$\sum uf_{uv}$	$v\sum uf_{uv}$
77	7								1		1	7	49	3	21
74	6						1				1	6	36	1	6
71	5							1			1	5	25	2	10
68	4		1			1		1	2	1	6	24	96	9	36
65	3					1	2	1	3	1	8	24	72	17	51
62	2				2	4	2	4	1	1	14	28	56	15	30
59	1				2	3	7	12	5	3	32	32	32	56	56
56	0		1	2	6	12	15	4			40	0	0	10	0
53	−1	1	2	12	7	8	10	5	3		48	−48	48	−12	12
50	−2	1	3	9	7	7	4	2			33	−66	132	−30	60
47	−3	3	2	2	3	2					12	−36	108	−25	75
44	−4		3				1				4	−16	64	−8	32
计	f_u	5	12	25	27	38	42	30	15	6	200	−40	718	38	389
uf_u		−20	−36	−50	−27	0	42	60	45	24	38				
u^2f_u		80	108	100	27	0	42	120	135	96	708				
$\sum Vf_{uv}$		−12	−22	−36	−24	−10	1	23	28	12	−40				
$u\sum Vf_{uv}$		48	66	72	24	0	1	46	84	48	389				

$$S_{uu}=\sum u^2f_u-\frac{\left(\sum uf_u\right)^2}{n}=708-\frac{38^2}{200}=708-\frac{1444}{200}=700\cdot78.$$

$$S_{vv}=\sum v^2f_v-\frac{\left(\sum vf_v\right)^2}{n}=718-\frac{(-40)^2}{200}=718-\frac{1600}{200}=710.$$

$$S_{uv}=\sum\left(u\sum vf_{uv}\right)-\frac{\left(\sum uf_u\right)\left(\sum vf_v\right)}{n}=389-\frac{38\times(-40)}{200}$$
$$=396.6.$$

$$r=\frac{S_{uv}}{\sqrt{S_{uu}S_{vv}}}=\frac{396.6}{\sqrt{700\cdot78\times710}}=\frac{396.6}{\sqrt{497553\cdot8}}=\frac{396\cdot6}{705.4}=0.56.$$

【定理】12. 相关系数 r，必满足 $-1\leqslant r\leqslant1$.

证明 设 $x_i-\bar{x}=x_i'$，$y_i-\bar{y}=y_i'$，于是

$$r=\frac{\sum x_i'y_i'}{ns_xs_y}\text{（这里}\sum\text{是}\sum_{i=1}^{n}\text{的简写）}.$$

又因 $\left(\frac{x_i'}{s_x}\pm\frac{y_i'}{s_y}\right)^2=\frac{x_i'^2}{s_x^2}\pm2\frac{x_i'y_i'}{s_xs_y}+\frac{y_i'^2}{s_y^2}\geqslant0$，

所以有 $\frac{1}{n}\sum\left(\frac{x_i'}{s_x}+\frac{y_i'}{s_y}\right)^2=\frac{1}{s_x^2}\left(\frac{1}{n}\sum x_i'^2\right)+2\frac{\sum x_i'y_i'}{ns_xs_y}+$

$+\frac{1}{s_y^2}\left(\frac{1}{n}\sum y_i'^2\right)=\frac{s_x^2}{s_x^2}+2r+\frac{s_y^2}{s_y^2}=2+2r\geqslant0$，$\therefore\quad r\geqslant-1$.

同理可证 $\frac{1}{n}\sum\left(\frac{x_i'}{s_x}-\frac{y_i'}{s_y}\right)^2=2-2r\geqslant0$，从而 $r\leqslant1$.

$\therefore\quad -1\leqslant r\leqslant1$. □

2·3 总体与样本

【定义】13．总体 把考察对象的全体构成的集合叫做总体，当总体受时间地点的限制由有限个单位构成时，叫有限总体，由无限个单位构成时，叫无限总体．

【定义】14．样本 在总体中抽取一部分代表总体作实际考察时，这抽出部分的集合叫做样本，抽取的方法一般是随机的．为了特别强调这一点，有时称做随机样本或概率样本．

【定义】15．全数调查与样本调查 对无限总体要全部进行考察是不可能的，而对有限总体，则可以全部进行考察，这种全部考察叫做全数调查．全数调查的典型例子是：日本每隔五年进行一次的国情调查，这不仅要多花费金钱，时间和劳力，而且费了很多工夫得到结果后有时已经不适用了．所以在实践中，常常是只对样本进行考察，然后由所得到的结果来导出有关总体的信息（参数），我们称这样的方法叫做样本调查．

【定义】16．参数与统计量 表示总体特征的量，叫做参数，这里举出个有代表性的例子．总体全体的平均值，叫做总体均值，并用希腊字母 μ 表示，以区别于样本的均值．同样的也有总体方差 σ^2，标准差 σ 和总体相关系数 ρ 等等．与此相反，我们把由随机样本的数据计算出的特征量叫做统

计量，通常讨论的都是统计量．为了区别统计量与参数，在使用时特别标明样本均值，样本方差，样本标准差等等．而以后用到总体平均 μ，总体方差 σ^2 时，就不再一一注明总体字样了．

参数是总体集合固有的值，而统计量仅仅是由随机抽取的样本而得到的量．这些量将随所抽取的样本不同而不同．因而在实际考察中并不只取个数为 n 的一组样本．所以对每个样本组来说，就应求统计量有多大的分散（这叫做样本误差）．

在实际中参数常常是不能直接求到的，因此由样本的统计量来估计参数就成了统计学的任务之一，下表给出了参数和统计量的关系．

代表值	参数（总体）	统计量（样本）
（个数）	N（N 一般是 ∞）	n
（数据）	$X_1, X_2, \cdots, X_N$	$x_1, x_2, \cdots, x_n$
均　值	$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i$	$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$
方　差	$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i-\mu)^2$	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$
标准差	$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}$	$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

注意　截至前节，方差的计算都要除以 n，这只是求总体方差或 n 相当大时使用的方法（当 n 很大，例如在 100 以上时，除以 n 与除以 $n-1$ 其误差范围在 1% 以下，这已不算什么问题了）．但是可以证明，当 n 不很大时，除以 $n-1$ 而得到的是总体方差 σ^2 的无偏估计量（除以 n 反而偏小）．为了直观地理解这一点，在 n 个观测值没有别的任何约束时，只须求这 n 个观测值的均值，除以 n 即可，但对于 n 个偏差 $(x_i-\overline{x})$ 来说，根据【定理】4，其和为 0，这就是一个约束．所以给出 $(n-1)$ 个偏差后，剩下的一个偏差由这个约束条件来确定就行了．因此我们说自由变动的偏差个数（或自由度）是 $n-1$，亦即在求偏差平方和的均值时，要记住是在用自由度 $n-1$ 去除．

当然，也可以这样来解释，在确定数据的平均值 $\overline{x}$ 时，已使得自由度减少了一个．总之，不管怎样解释，离差的平方和除以自由度所得到的方差叫做无偏方差．

【定理】17. 随机抽样法　这是与有意抽样法对立的方法. 为了求得某个总体的信息,调查设计者利用已有的结果,抽取特定的样本进行考察,我们称此为有意抽样法. 反之,当被调查的对象是用公平的抽签法从总体中抽取时,这就叫做随机抽样法. 使用随机抽样法,可以用概率理论来估计样本误差的大小.

要使用随机抽样法,可以先按总体的数目作成签,从中抽出代表样本序号的签,从而决定标本,这是一种理想的方法. 但由于作签很麻烦,可用随机数表:先在总体集合中,由 1 到 N 依次编号,再利用随机数表,读出比 N 小的 n 个数,然后把相应于这些番号的个体作为样本就可以了(关于随机数表,参看【定义】20).

【定义】18. 系统抽样法　为了减少读随机数的次数,约定小数点以后的数四舍五入,且约定抽取间隔为 $d=\frac{N}{n}$. 在随机数表中,读出 d 以下的随机数 a. 自总体中取出号数为 a, $a+d$, $a+2d$, …, $a+(n-1)d$ 的个体作为样本的方法叫做系统抽样法.

由于定 d 时四舍五入,若 $a+nd$ 小于 N,则样本数不变. 但也可能出现 $a+(n-1)d$ 大于 N 的情形. 从而总样本数比预定的数字略有增减。此外当总体集合的排列次序有某种周期性时,特别当抽取间隔与这个周期或它的倍数一致时,统计量将随出发点的变动而有较大的变动. 从而成为样本误差甚大的方法,并且它还有一个很大的缺点,就是不能从样本来估计误差

【定义】19. 分层抽样法　比如在城市,农村,居民区或商业区作调查,事先以划分总体的情报为依据,把总体划分成若干组,然后在各组中抽取样本,这样抽取全部样本的方法叫做分层抽取法. 分组的工作叫做分层,分层后依组的大小. 按比例确定各组抽取样本的数目,然后从各组中独立地抽取样本. 这样的抽样法是常用的.

【定义】20. 随机数表　由 0 到 9 的 10 数字具有相同的出现概率,将其以随机的顺序列成表,此表叫做均匀分布型随机数表. 又因为这是最常用的随机数表,所以也叫做随机数表. 另外还有正态型随机数表(由正态分布的随机数而得),β 型随机数表(由 β 分布的随机数而得)等等.

同一种随机数表(均匀分布型随机数表)也有多种类型,比如附录109页,那是在多达 40 页的 40000 个随机数构成的所谓 *JIS* (日本工业规格)随机表中随机取出的两页(第 30 页和 31 页),但已基本上够用了.

要得到随机数,还可以在正 20 面体的各个面上把 0 到 9 的十个数字

各写两遍，这样就得到了一个可以应用的所谓"随机数骰子"了。近年来，也使用电子计算机产生随机数。

2.4 期 望 值

【定义】21. 期望值　变量 X 在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中取值，当取这些值的概率值分别为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 时，$(p_1+p_2+\cdots+p_n=1)$，把 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 叫做变量 X 的期望值，记为 E(X)。特别地，当 X 是货币时，把它叫做期望金额或叫做期待金额。

注意　E 是 Expectation，或者说是 Expected value 的第一个字母，若数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必定出现，且出现的概率是相等的，则它们都是 $\frac{1}{n}$，因而 $\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 满足上述条件，从而均值也是期望值，反之，也可以把期望值作为均值。

不过，我们看到，以上的定义只是在变量 X 的取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为有限个或者可数个的离散变量情形下作出的。出于以后讲正态分布的需要，下面还要补充连续变量情形下的定义。

【定义】22. 期望值(连续变量)　若有函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 0$ 及 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$，且有

$$P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

则把 $f(x)$ 叫做 X 的概率密度或密度函数。　当 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx$ 收敛时，我们把

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

叫做 x 的均值或期望值(连续变量)。

【定义】23. 概率分布　对于变量 X 可能取到的各值，将它们出现的概率的分布状况表示出来，所得到的就叫做 X 的概率分布。

【定义】24. 二项分布　设在一次试验中，事件 E 发生的概率为 P，而 n 次独立试验中，事件 E 正好发生 x 次的概率为 $P(x)$，且 $1-p=q$，根据本章 §1【定理】12，有

$$p(x)=c_n^x p^x q^{n-x}.$$

在 n 次试验中，设事件 E 发生的次数为 X，则 X 取值为 0，1，2，…，r，…，n 的概率分别为

$$q^n,\ c_n^1 pq^{n-1},\ c_n^2p^2q^{n-2},\ \cdots,\ c_n^r p^rq^{n-r},\ \cdots,\ p^n.$$

这正是二项式定理的展开式

$$(p+q)^n=p^n+c_n^1 pq^{n-1}+c_n^2p^2q^{n-2}+\cdots+c_n^rp^rq^{n-r}+\cdots+p^n$$ 中的各项，

所以把这样的概率分布叫做二项分布.

【定理】 13. 在二项分布中，均值为 $\mu=np$. 方差为 $\sigma^2=npq$，标准差为 $\sigma=\sqrt{npq}$.

证明 ∵ $\mu=E(X)=\sum_{x=0}^{n} xp(x)$

$$=0\cdot c_n^0 q^n+1\cdot c_n^1 pq^{n-1}+2\cdot c_n^2p^2q^{n-2}$$

$$+\cdots+r\cdot c_n^r p^rq^{n-r}+\cdots+n\cdot c_n^n p^n.$$

由于 $rc_n^r=\dfrac{r\cdot n!}{r!(n-r)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=nc_{n-1}^{r-1}$,

所以 $\mu=0+nc_{n-1}^0 pq^{n-1}+nc_{n-1}^1 p^2q^{n-2}+\cdots+nc_{n-1}^{r-1} p^rq^{n-r}$

$$+\cdots+nc_{n-1}^{n-1} p^n$$

$$=np(c_{n-1}^0 q^{n-1}+c_{n-1}^1 pq^{n-2}+\cdots+c_{n-1}^{r-1} p^{r-1}q^{n-r}+\cdots+c_{n-1}^{n-1}p^{n-1})$$

$$=np(q+p)^{n-1}=np(\because\ q+p=1).$$

$$\sigma^2=\sum_{x=0}^{n}c_n^x\ p^xq^{n-x}(x-\mu)^2$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\left\{c_n^x\ p^xq^{n-x}(x^2-2npx+n^2p^2)\right\}\quad(\because\ \mu=np)$$

$$=\sum_{x=0}^{n} x^2c_n^x\ q^{n-x}-2np\sum xc_n^x\ p^xq^{n-x}+n^2p^2\sum_{x=0}^{n}c_n^x\ p^xq^{n-x}.$$

又由 μ 的证明知

$$\sum_{x=0}^{n} xc_n^x\ p^xq^{n-x}=np,$$

又因 $\sum\limits_{x=0}^{n} c_n^x \; p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1$，

$$\therefore\quad \sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 c_n^x \; p^x q^{n-x} - n^2p^2 \quad (\text{表 } x^2 = x(x-1)+x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x c_n^x \; p^x q^{n-x} - n^2p^2$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np - n^2p^2$$

$$= n(n-1)p^2(q+p)^{n-2} + np - n^2p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

$$\therefore\quad \sigma = \sqrt{npq}\,. \qquad \square$$

另证　由 $\mu = \sum\limits_{x=0}^{n} xp(x) = \sum\limits_{x=0}^{n} x c_n^x \; p^x q^{n-x}$，根据二项式定理有

$$(q+pt)^n = \sum_{x=0}^{n} c_n^x \; p^x q^{n-x} t^x.$$

两端再对 t 求导数(视 x，p，q 为常数)，则有

$$np(q+pt)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n} c_n^x \; p^x q^{n-x} x t^{x-1}. \qquad (\bullet)$$

于其中取 $t=1$，由于

$p+q=1$，则 $\sum\limits_{x=0}^{n} x c_n^x \; p^x q^{n-x} = np$，

$$\therefore\quad \mu = np.$$

又，$\sigma^2 = \sum\limits_{x=0}^{n} c_n^x \; p^x q^{n-x}(x-\mu)^2$

$$= \sum_{x=0}^{n} x^2 c_n^x \; p^x q^{n-x} - 2np \sum_{x=0}^{n} x c_n^x \; p^x q^{n-x}$$

$$+ n^2p^2 \sum_{x=0}^{n} c_n^x \; p^x q^{n-x}.$$



由于 $\sum_{x=0}^{n} c_n^x \ p^x q^{n-x}=(p+q)^n=1$,

$$\sum_{x=0}^{n} x c_n^x \ p^x q^{n-x}=np,$$

$$\therefore \quad \sigma^2=\sum_{x=0}^{n} x^2 c_n^x \ p^x q^{n-x}-n^2p^2.$$

于(＊)式两端乘以 t，得 $npt(q+pt)^{n-1}=\sum_{x=0}^{n} c_n^x \ p^x q^{n-x} x t^x$，再对 t 求导，即有

$$np(q+pt)^{n-1}+n(n-1)p^2t(q+pt)^{n-2}$$

$=\sum_{x=0}^{n} c_n^x \ p^x q^{n-x} x^2 t^{x-1}$ （n, p, q, x 为常数），再令 $t=1$，由于 $p+q=1$，上式的右边 $=\sigma^2+n^2p^2$，

而　　左边 $=np+n(n-1)p^2=np(1-p)+n^2p^2=npq+n^2p^2$，

$\therefore \quad \sigma^2=npq.$ □

注意　实际上使用偏微分方法，勿需什么技巧即可以简单地作出证明.

【定义】25．泊松分布　在二项分布中，常见到这样的情形，事件 E 出现的概率 P 很小，而 n 却相当大，当视乘积 $np=m$ 为一定时，取 $n\to\infty$ 的极限，并把所得的概率分布记为

$$p(x)=e^{-m}\frac{m^x}{x!},$$

则称此分布为泊松分布.

注意　泊松分布，在研究事件发生得很稀少的情形时，用处特别大．例如，对熟练工人的操作失误或事故的统计等即是．要得到上述的概率分布函数，还可用下面的证明：因 $np=m$，有

$$c_n^x \ p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{m}{n}\right)^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!}$$

$$m^x\left(1-\frac{m}{n}\right)^n\left(1-\frac{m}{n}\right)^{-x}.$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=e^{-m}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)=1$,

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^x=1$.

故得 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n^x\ p^n q^{n-x}=\frac{e^{-m}m^x}{x!}$.

【定理】14 泊松分布的均值为 $\mu=m$，方差为 $\sigma^2=m$，标准差为 $\sigma=\sqrt{m}$.

证明 ∵ $\mu=E(X)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}xe^{-m}\frac{m^x}{x!}=e^{-m}\sum\limits_{x=1}^{\infty}\frac{m\cdot m^{x-1}}{(x-1)!}$

$$=me^{-m}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{m^{x-1}}{(x-1)!}.$$

但由指数函数 e^x 的展开式

$$e^m=1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\cdots=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{m^{x-1}}{(x-1)!}.$$

于是 $\mu=me^{-m}\cdot e^m=m$,

且 $\sigma^2=\sum\limits_{x=0}^{\infty}\left\{(x-\mu)^2e^{-m}\frac{m^x}{x!}\right\}$

$$=e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\left\{(x^2-2mx+m^2)\frac{m^x}{x!}\right\}\quad(\because\ \mu=m)$$

$$=e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{m^x}{x!}-2me^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{m^x}{x!}+m^2e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!}.$$

另有 $\sum\limits_{x=1}^{\infty}x\frac{m^x}{x!}=m\sum\limits_{x=1}\frac{m^{x-1}}{(x-1)!}=me^m$,

$$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{m^x}{x!}=e^m,$$

于是　$\sigma^2=e^{-m}\sum_{x=0}x^2\frac{m^x}{x!}-2m^2+m^2$

$=e^{-m}\sum_{x=0}x^2\frac{m^x}{x!}-m^2$ （由 $x^2=x(x-1)+x$）

$=e^{m}\left[\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{m^x}{x!}+\sum x\frac{m^x}{x!}\right]-m^2$

$=e^{-m}\left[m\sum_{x=2}\frac{m^{x-2}}{(x-2)!}+m\sum_{x=1}\frac{m^{x-1}}{(x-1)!}\right]-m^2$

$=e^{-m}(m^2e^m+me^m)-m^2$

$=m^2+m-m^2=m$

$\because$　$\sigma^2=m$，$\therefore$　$\sigma=\sqrt{m}$．　□

【定义】26．正态分布　当 n 增加时，二项分布形成明显的对称分布形式，使 $\frac{x-np}{\sqrt{npq}}$ 保持有限，并让 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}. \quad ①$$

上式中，代入二项分布的均值 $\mu=np$，方差 $\sigma^2=npq$ 后，令左边为 $f(x)$，可得

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad ②$$

把②式确定的理论分布，叫做正态分布．

注意　由二项分布导出泊松分布的方法，尚可以理解，不过①式的推导，却超过了中专程度，理解困难，这里只作一个大概的说明．当n相当大时，可以利用斯特林公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\ n^ne^{-n}$ 来证明．因为，令 $\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=t$ 时，有 $x=np+t\sqrt{npq}=np\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$．$\therefore$ $n\to\infty$ 时，$x\to\infty$，从而又有

$$n-x=n-np-t\sqrt{npq}=nq\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

$\therefore$　当 $n\to\infty$ 时，有 $n-x\to\infty$．

因此，根据斯特林公式 $n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}$ 就有

$x!=\sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}$，$(n-x)!=\sqrt{2\pi(n-x)}\,(n-x)^{n-x}e^{-(n-x)}$．据此，有

$$p(x)=c_n^x\ p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x q^{n-x}$$

$$=\frac{\sqrt{n}\,n^n}{\sqrt{2\pi x(n-x)}\,x^x(n-x)^{n-x}}p^x q^{n-x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{x(n-x)}}\left(\frac{np}{x}\right)^x\left(\frac{nq}{n-x}\right)^{n-x}\quad(\because\ n^n=nn^x n^{n-x}).$$

又因 $\sqrt{\dfrac{n}{x(n-x)}}=\sqrt{\dfrac{n}{np\left(1+t\sqrt{\dfrac{q}{np}}\right)nq\left(1-t\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right)}}\approx\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$，

及 $\left(\dfrac{np}{x}\right)^x\left(\dfrac{nq}{n-x}\right)^{n-x}=\left(1+t\sqrt{\dfrac{q}{np}}\right)^{-x}\left(1-t\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right)^{-(n-x)}$．

若令右边为 Q，对 Q 取自然对数，得

$$\ln Q=-x\ln\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-(n-x)\ln\left(1+\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

代入 x，$n-x$ 的表达式，又得

$$\ln Q=-(np+t\sqrt{npq})\ln\left(1+t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)-\left(nq-t\sqrt{npq}\right)\cdot$$

$$\ln\left(1-t\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).\qquad③$$

此外，当 x 充分小时，利用近似公式

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2},$$

则③式变成

$$\ln Q\approx-(np+t\sqrt{npq})\left(t\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{qt^2}{2np}\right)$$

$$-(nq-t\sqrt{npq})\left(-t\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{pt^2}{2nq}\right)$$

$$\approx -\left(t\sqrt{npq}+qt^2-\frac{qt^2}{2}-t\sqrt{npq}+pt^2-\frac{pt^2}{2}\right)$$

(略去了分母含$\sqrt{n}$的项) $=-\frac{1}{2}(p+q)t^2=-\frac{t^2}{2}$

($\because$ $p+q=1$).

$\therefore$ $Q=e^{-\frac{t^2}{2}}$,

从而$\lim\limits_{n\to\infty}p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{t^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

使用斯特林公式，这点是超出了中专程度，但实际上，只要作出$n=5$, $n=10$, $n=20$, $n=50$, $n=100$的图象（见图13—2）由图象来理解上述结论还是不困难的。

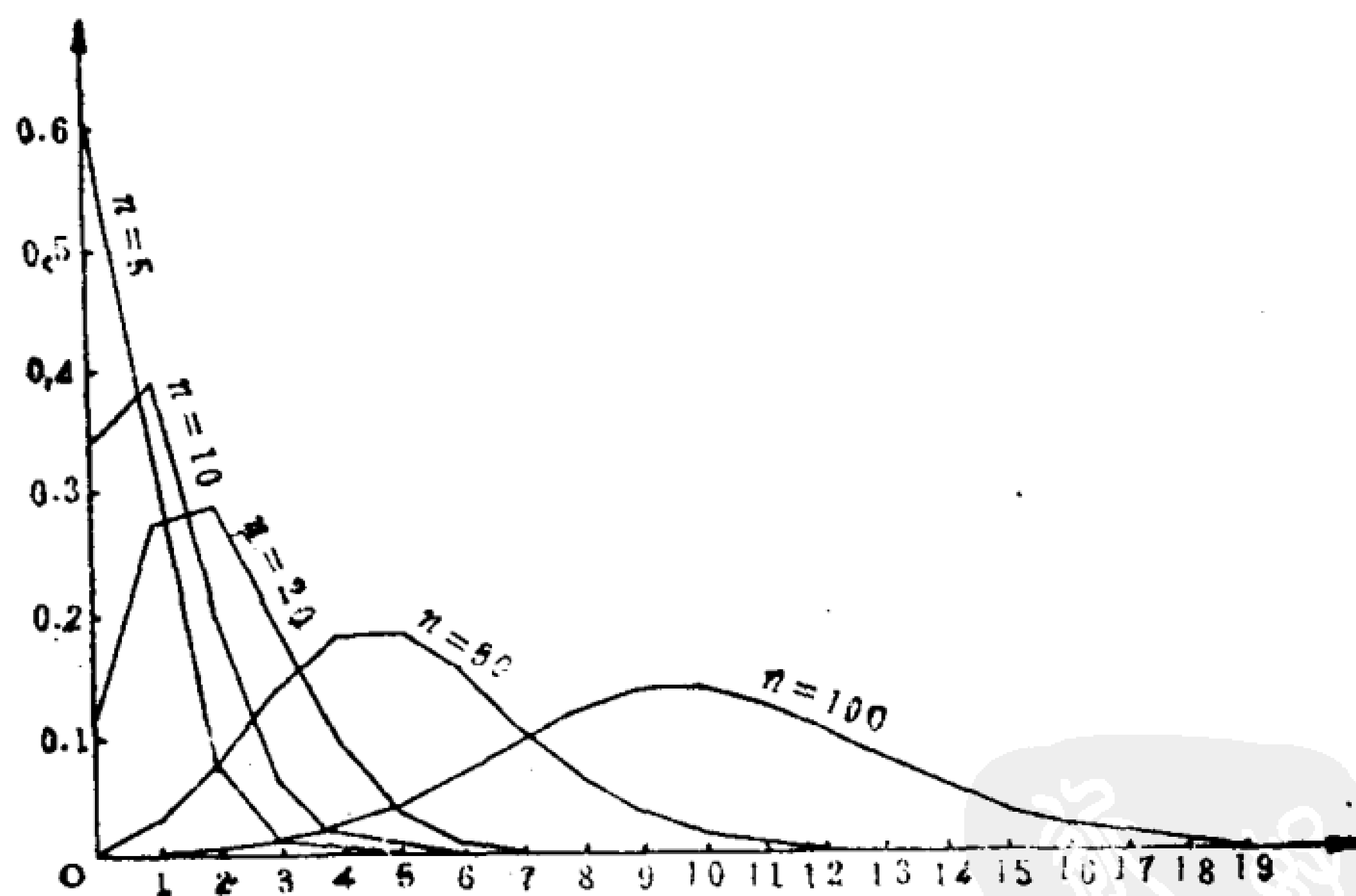


图13-2

另外，上面的正态分布是作为二项分布的极限形式导出来的，而二项分布的变数x在正整数0，1，2，3…中变化，是离散型的分布。至于正态分布却是不仅对整数，而且对所有实数值都成立的理论分布。这是应该

注意到的，因此，【定义】26中的表达式，不能认为和二项分布表达式及泊松分布表达式一样，具有相同意义下的概率(因此在②式中把 $p(x)$ 改写成 $f(x)$)．由于 x 在这里是连续变数．所以②式实际上是确定 x 的概率密度的表达式．如果不给定 x 值的范围，就不能确定出概率值来．例如 x 落在区间 $[a, b]$ 内的概率为

$$P(a\leqslant x\leqslant b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

正态分布是一种重要的分布，日本中专课本中都要讲到．但值得注意的是，它的证明需要较多的超越中专课本的知识．

【定理】15. 正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty)$ 的均值为 μ，方差为 σ^2(从而标准差为 σ)．

证明　由 $x=\mu+(x-\mu)$ 及【定义】22，总体均值 $E(X)$ 为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+x-\mu)f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mu f(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x)dx.$$

因为 μ 是常数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu f(x)dx=\mu\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\mu\quad(\because\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1).$$

又设 $x-n=y$，则 $dx=dy$，且当 $x\to\pm\infty$ 时，$y\to\pm\infty$(且符号一致)．于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy.$$

因为右边的被积函数为奇函数，所以它的积分值为0，　$\therefore\ E(X)=\mu$．

其次，设方差为 $V(X)$，则有

$$V(X)=E\Big\{(X-E(X))\Big\}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2f(x)dx.$$ 又令 $x-\mu=y$，

则有

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy.$$

利用分部积分法，得到

$$V(X)=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}y\left(\frac{-ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}\right)dy$$

$$=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left\{\left[ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dx\right\}$$

$$=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left\{0-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy\right\}$$

$$=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma^2.$$ □

注意 该证明实际上是以$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$为前题的．这仍然超越了中专教材的内容．这里介绍一下用重积分的证明方法．

取$I=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$，积分变数$x$也可以换为$y$．所以$I=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$.

两端相乘，得 $I^2=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$

$$=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}e^{-x^2-y^2}dx\right\}dy.$$

这个积分表示曲面$z=e^{-x^2-y^2}$与xy平面所围空间中$x\geqslant0$，$y\geqslant0$那部分的体积，换成极坐标进行计算即为

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\infty}e^{-r^2}rdr\right\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}\quad(\because\ \lim_{r\to\infty}e^{-r^2}=0).$$

$$\therefore\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由于e^{-x^2}是偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=2I=\sqrt{\pi}.$$

其中，设$x=\frac{X-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$，则$dx=\frac{dX}{\sqrt{2}\sigma}$，积分范围不变．于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}\frac{dX}{\sqrt{2}\sigma}=\sqrt{\pi}.$$

再把X改为x，并除以$\sqrt{\pi}$，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1.$$

【系】1．若变量X服从总体均值为μ，总体方差为σ^2的正态分布（记作$N(\mu,\sigma^2)$）．则对任何实数$a(\neq 0)$和b，变量$y=aX+b$服从总体均值为$a\mu+b$．总体方差为$a^2\sigma^2$的正态分布$N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$．

证明　由【定理】7.8显然总体均值为$a\mu+b$，总体方差为$a^2\sigma^2$*．现在证明其为正态分布．设$a>0$，对任意实数y_1，$y_2(y_1<y_2)$，事件$(y_1\leqslant y\leqslant y_2)$可表为$\left\{y_1\leqslant y\leqslant y_2\right\}=\left\{y_1\leqslant aX+b=y_2\right\}=\left\{\frac{y_1-b}{a}\leqslant X\leqslant\frac{y_2-b}{a}\right\}$．由于X服从$N(\mu,\sigma^2)$故

$$p(y_1\leqslant y\leqslant y_2)=p\left(\frac{y_1-b}{a}\leqslant X\leqslant\frac{y_2-b}{a}\right)$$

$$=\int_{\frac{y_1-b}{a}}^{\frac{y_2-b}{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

若将其中积分变量x换成y，因$dy=adx$，于是

$$p(y_1\leqslant y\leqslant y_2)=\int_{y_1}^{y_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}dy.$$

---

* 〔定理〕7.8是关于样本均值与样本方差的结果，在这里不能引用，实际上，由本定理的证明可见变量y的密度函数为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a\sigma^2}}$，从而可见$y$的均值为$a\mu+b$，方差为$a^2\sigma^2$．——校注

该式证明了 y 服从正态分布 $N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2)$. □

【系】2. 当 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$时，$y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 也服从正态分布，这种正态分布叫做标准正态分布.

证明　在【系】1 中，取 $a=\dfrac{1}{\sigma}$，$b=-\dfrac{\mu}{\sigma}$ 即得. □

【定理】16.（中心极限定理） 设随机变数 $X_1,\ X_2,\ \cdots X_n$ 互相独立，且具有相同的概率分布，又设均值为 μ，方差为 σ^2，则

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

的概率分布的均值为 μ，方差为 $\dfrac{\sigma^2}{n}$，且当 n 增大时，该分布无限接近于正态分布. 也就是说，$\overline{X}$ 近似服从于均值为 μ，方差为 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ 的正态分布.

注意　该定理是十分重要的，但证明又是较难的，故从略. 需要注意的是，该定理中的各个 X_i 的均值，方差等都是有限值. 且服从同一个分布. 不过分布的形式不受限制，但是在该定理中，当 $n\to\infty$ 时，如果把均值 $\overline{X}$ 的分布视为正态分布就不正确了. 这是因为 $n\to\infty$ 时，方差要变为 0 的缘故.

然而，当 X_i 的分布皆为正态分布时，$\overline{X}$ 的分布却与 n 的大小无关，都是正态分布.

2·5 统计的假设检验

【定理】（契贝谢夫定理） 设随机变数 X 的均值为 μ，方差为 σ^2. 则当 $k>0$ 时，变量 X 与其均值之差的绝对值不小于 $k\sigma$ 的概率不大于 $\dfrac{1}{k^2}$，也就是说

$$p(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

证明　X 是离散的随机变数，设其取 x_i 的概率为 p_i，据方差的定义有

$$\sigma^2=\sum_{i=1}(x_i-\mu)^2p_i.$$

把这个和分成 $|x_i-\mu|<k\sigma$ 与 $|x_i-\mu|\geqslant k\sigma$ 的两个部分，且分别记为 $\sum_1$，$\sum_2$，则由于各项都是正数，有

$$\sigma^2=\sum\nolimits_1(x_i-\mu)^2P_i+\sum\nolimits_2(x_i-\mu)^2P_i\geqslant\sum\nolimits_2(x_i-\mu)^2P_i.$$

其中，对于$\sum_2$部分，由于有 $(x_i-\mu)^2\geqslant k^2\sigma^2$，所以可写成$\sum_2(x_i-\sigma)^2P_i\geqslant k^2\sigma^2\sum_2 P_i$.

又因 $\sum_2 P_i=P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)$，所以

$$\sigma^2\geqslant k^2\sigma^2\cdot P(|X-\mu|\geqslant k\sigma).$$

$$\therefore\quad P(|X-\mu|\geqslant k\sigma)\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

又若 X 连续，则根据 σ^2 的定义，有

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx.$$

把这里的积分范围分作 $|x-\mu|<k\sigma$ 和 $|x-\mu|\geqslant k\sigma$ 两个 x 区间，且分别用$\int_1$、$\int_2$表示在它们上的积分，则有

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\int_1(x-\mu)^2f(x)dx+\int_2(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$\geqslant\int_2(x-\mu)^2f(x)dx$$

$$\geqslant k^2\sigma^2\int_2 f(x)dx=k^2\sigma^2P(|X-\mu|\geqslant k\sigma).$$

从而可得到与上面相同的结果. □

注意　这里的定理是以概率的形式表达出来的，而一般的统计中却用频数. 设取变量 x_i 的频数为 f_i，总频数为 N. 并且设满足 $|x_i-\mu|\geqslant k\sigma$ 的 x_i的频数为 N_1，则 $N_1\leqslant\frac{N}{k^2}$，又满足 $|x_i-\mu|<k\sigma$ 的 x_i 的频数为 $N-N_1$，则

$$N-N_1>\left(1-\frac{1}{k^2}\right)N.$$

契贝谢夫定理与前面的中心极限定理一样，是统计学的一个基本定理，适合于任何形式的频率分布. 例如对任意的总体，设其均值为 μ，均方差为 σ，则满足 $\mu-3\sigma<x_i<\mu+3\sigma$ 的变量 x_i 表示占全数 N的 90%，并且这对任意的分布都成立，故也适用于标准正态分布. 于是因 $\sigma=1$，故

$$\int_{-k}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx>1-\frac{1}{k^2}.$$

这里，对于各种 k 值都可以计算出左边的积分值来.例如 $k=1$时，积分值为 0.68269；$k=2$ 时为 0.95450；$k=3$ 时为 0.99730（末位的 0 都是有效数字），比右边大很多，所以对正态分布而言，可以说契贝谢夫定理是相当差的）。

【定义】27．贝努利试验　在重复进行独立试验时，把其结果只有成功和失败两种情况发生的这类试验叫做贝努利试验.

【定理】18．（贝努利定理·贝努利大数定律）　在概率为 P 的无限次贝努利试验序列中，设前 n 次中的成功数为 x，则对于任给的$\varepsilon(\varepsilon>0)$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{x}{n}-P\right|<2\right)=1.$$

证明　在对概率为 P 的事件的 n 次独立试验中，由于成功的次数为 x，则成功的比率为$\frac{x}{n}$，其均值为 P，方差为$\frac{pq}{n}$，据契贝谢夫定理有

$$p\left(\left|\frac{x}{n}-p\right|\geq k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\leqslant\frac{1}{k^2},$$

$$p\left(\left|\frac{x}{n}-p\right|<k\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)>1-\frac{1}{k^2},$$

这里取 $k\sqrt{\frac{pq}{n}}=\varepsilon$，于是有

$$p\left(\left|\frac{x}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

从而，对应于 ε 的值，n 的值取得很大时，该式的右边可以任意接近 1，也就是说定理成立.　□

注意　大致说来，当 n 很大时，观测比率$\frac{x}{n}$可以任意接近 p. 所以常常把这一事实叫做(贝努利)大数定律.

【定义】28．统计假设　为了研究总体的分布而事先作出的假设，叫做统计假设. 这里有两种假设，一是关于总体的分布形式的假设，二是在给定(或假设)总体分布形式下关于分布的参数的假设. 一般来说统计假设专指后一种假设，

有关参数的假设，也可以先有若干个，选择其中的一个作为检验对象，从而通过概率的考虑来推断这一假设是否正确．我们把这个作为检验对象的假设叫做检验假设．而把检验假设以外的假设叫做备择假设（或叫独立假设）．

一般说来，要肯定某个看法，必须有丰富的例证．而要否定它，却只要举出一个反例就足够了．作为统计推断也完全一样．如果假设在正确的条件下，认为发生得不多的结果却出现在样本观察中，假设的真实性就会被否定．另外由于这里仅限于对样本的观察，所以即使肯定其反面的事例是多数，也不能说检验假设已完全得到了证明．因此作为检验假设，倒是出现否定的情况为好．我们把这种处于否定命运的假设叫做归谬假设（但归谬假设只是检验的手段，目的当然着眼于它的备择假设）．

【定义】29．错误　若一个假设成立的可能性很小，从而被否定时，就说拒绝这个假设．反之，一个假设被肯定时，就说接受这个假设．在统计检验中，有可能误把正确的假设判为不正确的假设而加以拒绝，这种错误叫做**第一种错误**．反之，不正确的假设也有被误判为正确的而被接受，这种错误叫做**第二种错误**．在统计的假设检验中，常常事先规定把第一种错误的概率记为α，这叫做显著水平或危险率．而把犯第二种错误的概率记为β．$1-\beta$的大小叫做检验功效．检验功效是在检验假设不真时拒绝该假设的概率．作为假设检验的方法，自然是希望发生第一种错误的概率尽可能小，检验功效尽可能大．显著水平α是根据问题事先规定的，一般选为5%或1%．

【定义】30．拒绝域　在假设检验中，实测的统计量位于其中时，假设就被拒绝的区域叫做拒绝域．

统计假设检验的步骤

（1）确定总体，对它的分布作出统计假设(一般说来，这是检验工作之外的事情)．

（2）根据这个假设，求出关于样本的基本统计量的样本分布．

（3）再确定危险率，据此把样本分布的整个区域，按危险率分成拒绝域和接受域两种区域．

以上仅是理论步骤，下面是具体的作法．

（4）作出随机样本，测定问题的统计量的值，若这个值落入拒绝域中，则否定假设．

（5）若实际测得的统计量的值落入接受域，则假设不能被否定，可是也不能被肯定，一般说来，必须作进一步检验．

【定义】31．双侧检验·单侧检验　检验的拒绝域在接受域的一侧时，叫这

个检验为单侧检验．若拒绝域在接受域的两侧时，叫做双侧检验．单侧检验常常是在对特定方向有怀疑的情形，或者仅关心特定方向的偏差（比如只关心电灯炮寿命偏短的问题）的情况下使用．

【定义】32．置信区间　设样本均值为$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，当总体服从均值为$\mu$，方差为$\sigma^2$的正态分布时，$\bar{x}$服从均值为$\mu$，方差为$\frac{\sigma^2}{n}$的正态分布．即使总体不是正态分布，但当$n$相当大，而总体方差$\sigma^2$已知时，也可取$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$为$\bar{x}$的标准误差，亦即$\bar{x}$仍然有以总体均值$\mu$作为中心的正态分布（总体均值$\mu$常常是未知的）．换句话说，由于含于（已算出的）两侧的适当区间内的概率已知．可用表达式$p(\bar{x}-a<\mu<\bar{x}+a)=p$，由$\bar{x}$推出总体均值$\mu$．这里把区间$[\bar{x}-a,\ \bar{x}+a]$叫做总体均值$\mu$的置信区间，$\bar{x}\pm a$叫做置信界限，$p$叫做置信度，置信度就是$1-\alpha$，$\alpha$为危险率．这里$a$常常取作标准误差的两倍或者三倍（比如$\sigma$已知时，置信度为95%的总体均值之置信区间即为$\bar{x}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$）．

又当总体的方差σ^2为未知时，可以用样本方差S^2作出σ^2的估计值，"μ满足$\bar{x}-2\frac{s}{\sqrt{n-1}}\leqslant\mu\leqslant\bar{x}+2\frac{s}{\sqrt{n-1}}$的概率为95%"，"又总体均值$\mu$属于置信区间

$$\left[\bar{x}-3\frac{s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x}+3\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right]$$

的置信度为99%"等等．

注意　若总体是均值为μ、方差为σ^2的正态分布，且由大小为n的随机样本得到的样本均值为$\bar{x}$，已知$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$服从标准正态分布，则由正态分布表可知

$$p(-1.96<z<1.96)=0.95.$$

把z的表达式代入上式，对μ解所得的不等式，得

$$\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

但实际上，σ^2 和 μ 一样，常常是未知的，当 n 相当大时，可用样本的标准差 s 来代替 σ.不过这时已经不是正态分布了，然而统计量

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}$$

服从自由度为 $(n-1)$ 的 t 分布，于是利用 t 分布表可按下式

$$\bar{x}-t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}<\mu<\bar{x}+t_{n-1}(\alpha)\frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

来估计 μ. 在无表可查的情况下，用 2 或 3 基本上就可以了. 为了更为精确，就必须使用 t 分布表中 $(n-1)$ 个自由度，危险率 α（或置信度 $1-\alpha$）处的值.（t 分布表见书末附录.）

当 n 相当大时，用 n 来代替 $n-1$ 也可以.

【定义】33. 正态概率纸 在统计假设中，用得最广泛的假设是：总体分布服从均值为 μ，均方差为 σ 的正态分布

$$p(a\leqslant X\leqslant b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

对其作变量代换，变成标准正态分布时，可计算其累积概率 $\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. 它的图形是一条 s 形的曲线，见图 13—3. 若把它画在如橡皮一样具有伸缩性的纸上. 并给以适当伸缩，这条曲线就可以变成直线（如附录 1094 页所示）. 这是把累积正态分布变为直线，而 y 坐标有所加减的图纸——叫做正态概率纸.

使用方法 由于 y 轴的尺度为累积频数的百分比，所以只要求出实际数据的累积频数的百分比并以数据的大小作为相应的 x 坐标描点即可，然后，连接这些点，如果连线可以认为是一条直线，就可以断定这些数据服从正态分布.

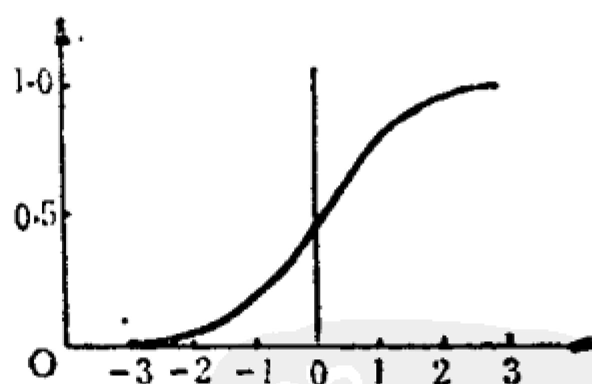


图13—3

又，在图中 y 坐标的 50% 线与上述直线的交点的 x 坐标就是均值（样本均值）$\bar{x}$，而标准差是这条直线分别与 $x+2\sigma$ 线及 $x-2\sigma$ 线的交点的 x 坐标之差再除以 4 所得到的数值. 顺便指出，把该 x 坐标取作置信界限后，总体均值 μ 确实是在 95% 左右的置信限处.

【定义】34. 质量管理 在近代大规模的生产方式中，为了预防不合规格

的产品出现，需要经常检查产品的质量是否保持在一定的规格范围内，这叫做质量检查，在质量检查中，有时必须作破坏性检验，这就得进行抽样检查。用管理图的方法以保证产品质量的提高，这样的方法叫做统计质量管理。

【定义】35. 管理图　在制造业中，为了调查生产是否处于稳定的合乎标准的状态，在图上画出中心线、上管理界限（Upper Control limit, 缩写成 *UCL*）、及下管理界限（Lower Control limit, 缩写成为 *LCL*）等三条管理线，即可根据不同需要用作不合格率管理图（也叫管理图）及 $\overline{X}-R$ 管理图等。

不合格率管理图是当工程的不合格率为 p 时，因均值（中心线）为 p，标准差为 $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，所以就以 $p\pm 3\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ 为上、下管理界线画在图纸上，然后每天抽取 n 件随机样本，算出不合格率，记入图中。如果某一天超出了管理界线，则应立刻检查原因，采取措施，扭转现象。

$\overline{x}-R$ 管理图是对产品的均值，分散管理的管理图。

【定义】36. 抽样检查　在一组产品(称为批)中选取 n 个样本进行检查。把这一结果再与判定标准比较，以断定这一组产品是否合格，这样的方法叫抽样检查。当产品批的判定标准由次品个数或废品个数等数字给出时，叫做计数抽样检查，当判定标准是由尺寸，重量或纯度等度量数值给出时，叫做计量抽样检查。



第十四章　初等几何学

§1. 总　　论

1·1　几何学简史

几何学的起源　几何学一词，在英语里是geometry．geo的意思是“土地”，metry 的意思是“测量”．可见，几何学是从测量土地的需要开始发展起来的、事实上，在古埃及，由于每年尼罗河的泛滥，耕地淹没，地界消失．为恢复其地界，更由治水工程的需要，测量技术就发展起来了．另外在巴比伦，人们为了求出耕地面积及谷物仓库的体积．也研究了关于图形的处理方法．②

由这些生产上的需求所产生的几何学的萌芽，早在公元前七世纪，随着贸易的兴旺发达，已传到了希腊．由于当时许多希腊人有一种特别的追求真理的精神，所以他们不满足于只是单纯地为了实用的几何学，而开始了理论上的研究，这时出现的著名的人物有他勒(Tholes，公元前640？—546)、毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前572—492)*以及其他许多学者．欧几里得(Euclid，公元前330？—275？)对图形的性质进行了深入的理论探讨，并综合各家之长，根据亚里斯多德(Aristoteles③公元前384—322)的公理法则，归纳汇总成较完整的体系，写成了著名的欧几里得“几何学原本”(Stoicheia)一书，全书共十三卷．

在“几何学原本”中，不仅有关于图形的研究，也涉及到数学的其它方

---

① 在拉丁文或希腊文里，早就有这个名词了．而其中文译名“几何学”是由我国明朝徐光启(1562--1633)给出的．

② 早在公元前一千多年，我国最早的数学书“周髀算经”已载有许多几何知识（如“勾股定理”等），再早一些，八古陶器或殷商的钟鼎上，都刻有精美的几何图案．——译注

③ 在有的书上记载的年代是582--497．——译注

面，特别是包含了实数论和整数论的知识．不过，在证明中多半是使用图形的语言，也就是说还是以几何图形的内容为主，因此把它译成"几何学原本"是贴切的．这本书，即使在数学已经发展到了今天的我们看来，其严密性和完整性也是令人十分钦佩的．试想，远在2000年前完成的书稿，在近代能被整理出来作为数学的经典，与圣经一样世代流传，并作为大学或中学教科书使用，这不能不说是欧几里得的伟大业绩．不过，现在流传的"几何学原本"是在公元900年左右发现的抄本，而这已经是欧几里得所著"几何学原本"问世后约1200年的事了．欧几里得究竟研究的是些什么呢？哪些是他原来研究的东西呢？要弄清这些可以说已是完全不可能的了．

几何学原本　在"原本"里，一般数量所必须满足的五个公理以及图形所必须满足的五个公理都包含进去了．"原本"中把后五个公理特别地叫做公设．这儿把公理作为推理的根本依据，不需要作任何说明，只须作为简单而基本的事实来接受就行了．至于公设，欧几里得希望他的读者承认五个命题为真就行了．

现把"原本"中的公理、公设和定义的梗概叙述于下．

一般公理(Common Notions)

1．等于同一量的量必相等；

2．对相等的量，加上相等的量，其和仍然相等；

3．从相等的量中减去相等的量，其差仍然相等；

4．全体大于它的任何一个部分；

5．互相重合的事物是相等的．

公设(postulates)

1．过任意两点能引一条直线；

2．有限长的直线段可在其两端向外无限延长；

3．以定点为圆心、定长为半径可以作圆；

4．一切直角皆相等；

5．同一平面上两条直线，当其与第三条直线相交时，若在第三条直线的同一侧的两个内角之和小于二直角，则这两直线必在这一侧相交．

此外，关于定义，大体上可分为两种：

第一种——后面进行证明时，将被用到的东西．

例如直角、平行、中线、内心等概念．

第二种——在以后的证明中虽被用到，但一点也不涉及到理论上有用处的东西．

例如，点只有位置(没有大小)，线只有长度而无宽度，面既有长度又

有宽度等.

诸如此类，第一种和第二种定义总共约有118种.

非欧几里得几何学的出现　公理和公设是不需要作任何说明的简单而基本的命题，特别是第五公设，它比其它公设都复杂得多. 即使是欧几里得本人也认为，这个公设似乎可以由其它公设推证出来，同时又不至于违背其原来的本意. 但他始终也没有做到这一点；反倒由此演绎出了许多定理. 就在这种不可能实现的证明中，还得出了"这五个公设以外，再没有其它的公设"的结论. 比如"三角形两边之和必大于第三边"这样一个极易理解的命题，就不能作为公设.

后来，仍然有许多学者试图用前四个公设来证明第五公设，但都没有得到成功，直至十九世纪，罗巴切夫斯基(1793—1856)和波约(Bolyai1802—1860)用一个新的公理，即"过直线外一点存在无穷多条平行于该直线的直线"来代替第五公设，因而创立了一门崭新的几何学. 此后不久，黎曼(1826—1866)又以"过直线外一点不存在任何一条平行于该直线的直线"来代替第五公设，建立了另一门新的几何学. 相对于欧几里得创立的几何学，人们把这些几何学统统叫做非欧几何学. 具体地，也称罗巴切夫斯基和波约几何学为双曲几何学，称黎曼几何学为椭圆几何学. 与这些名称相呼应，又称欧几里得几何学为抛物几何学.

对欧几里得公理的异议　以明确表述出来的定义、公理为基础，避开直观性，用纯粹推理的方式建立起来的欧几里得几何学，长期以来一都被看作完整的理论体系的经典而闻名于世. 自十九世纪兴起了数学的批判精神以后，人们才注意到了"原本"中有多处理论上的缺陷. 非欧几何的产生也是这种批判精神的动因之一. 比如公理中虽然有所谓重合的概念，但却没有几何图形在移动时，其形状大小不变的公理，因此在欧几里得的证明中，存在着罗嗦甚至是模糊的东西. 后来的学者们因此只能朦胧地使用着"移动"一词. 把它明确地作为公理提出来的人，是赫尔姆霍兹(Helmholtz Von 1821—1894). 而把直线上点的连续性作为公理提出来的人是戴德金. 类似地，不少学者都对公理作过探讨. 最后，希尔伯特(1862—1943)在众多成果的基础上，用新的观点来统一这些思想而写成了"几何学基础"一书，该书归纳出了使欧几里得几何学仍然成立的新的公理组. 对于定义，它废弃了第二种定义而引入了无定义的术语，且对公理和公设不加区别，并公理化地赋予它以逻辑的意义. 即是说，公理组互无矛盾同时又彼此独立，并且由这个公理组能建立起一个完整的理论体系. 再者，就无定义术语来说，欧几里得(几何)对点、线、面这样的基本图形，根据直观而作出的定义，在希尔

伯特的书中被取消了，却代之以只要满足决定着它们之间关系的公理，不管是什么东西，都可以称为点、线、面.在此意义下称它们是无定义术语.

解析几何学·综合几何学

在阿拉伯发展起来的代数学(Algebra)传到欧洲后，得到了更大的发展.他们采用以坐标表示点的方法，并利用函数关系和代数运算来研究图形.这种方法的创始人是笛卡尔(1596—1650).采用这种研究方法的几何学叫做解析几何学.在解析几何学中，早为希腊的阿波罗尼斯(Apollonius，公元前260—200)等人建立的圆锥曲线论被用代数方法整理成了"二次曲线论".同时，解析几何学也是微积分学发展的有力基础.在十八世纪末的蒙日(Monge 1746—1818)时期，对微分几何学的萌芽，解析几何也起了很大的作用.

相对于上述用计量方法来研究图形，也产生了不用计算而直接研究图形的思想.并与解析几何学相呼应地把它叫做纯粹几何学或叫综合几何学.典型的例子是为笛沙格(Desargues 1593—1662)和帕斯卡(1623—1662)创立的射影几何学.欧几里得几何学中包含了直线的长度、角的大小及面积、体积等度量性的内容，而射影几何学则把点、直线、平面等作为基本图形以讨论它们的结合关系，并不涉及到度量性质.我们把欧几里得几何学及他以后出现的若干种几何学(考虑直线具有正负方向的几何学和综合几何学)统称为近世几何学.

几何学的分类 这里把所述及的几何学整理分类如下：

1° 用公理方法构成的几何学(欧几里得几何学、非欧几何学、射影几何学)；

2° 用代数方法构成的几何学(解析几何学)；

3° 用分析方法构成的几何学(微分几何学)；

4° 用集合论方法构成的几何学(拓扑学或叫位相几何学).

所谓分析的方法是指用微积分、解析函数论定义的曲线，曲面等作为图形来研究，所谓集合论的方法是把引入了连续概念的点集作为图形来研究.1°、2°中研究的图形是直线、圆等规则的图形.与此相反，3°、4°是研究不规则图形的几何学.

1·2 预备知识

每一门学科都有它自己的专门术语.下面先就几何学中常用到的种种术语加以说明，然后叙述本章将要用到的公理.

基本术语的说明

1. **定义**　说明术语的含义的言辞叫做定义.

2. **公理**　作为推理的根本依据而不需要对它加以说明的简单而基本的事实叫做公理.

3. **证明**　从公理出发,依据已知的正确事实对新的事实的正确性作出正确的推理的过程叫做证明.

4. **归纳**　通过对若干个别事实的考察而找出事物共通的内在规律的过程叫做归纳.

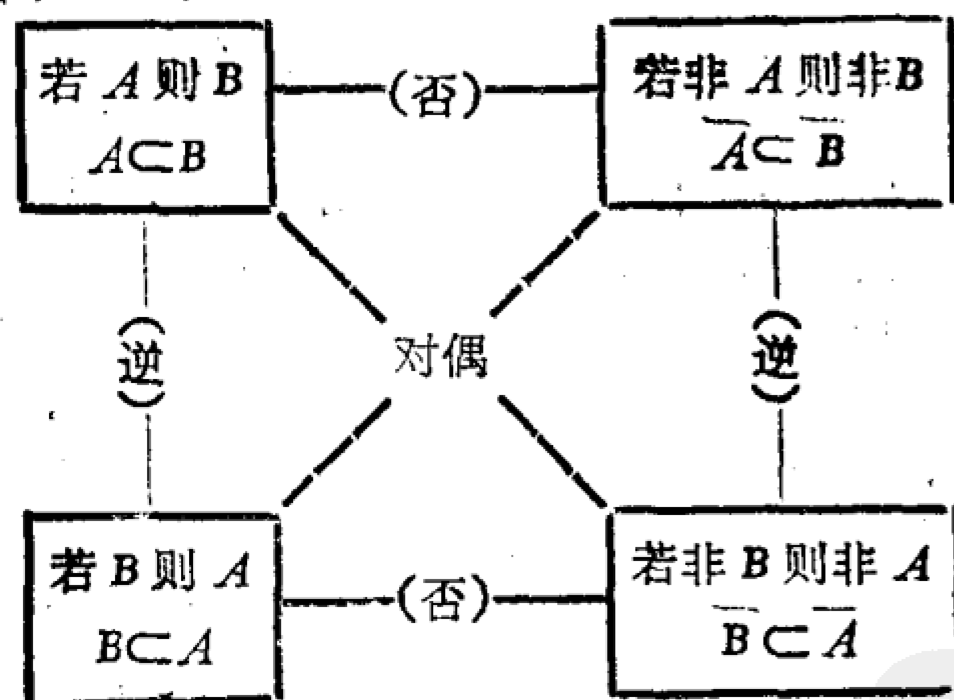
5. **定理**　若一个由归纳得出的法则能用公理证明它的正确性,且可在以后的证明中作为根据而被反复使用,则这一法则叫做定理.特别地,由定理直接导出且与该定理一样可被使用的事实叫做该定理的系(或推论).

6. **演绎**　用定理经过正确推理所得到的结果也是定理.象这样逐步使用正确推理而最后得出定理的过程叫做演绎.

7. **命题**　一般说,形如"若 A 则 B"的语言结构所表达的事实叫做命题,这里的 A 叫做假定,B 叫做结论.因此,定理和系也是命题.

逆命题·否命题·对偶命题

将命题"若 A 则 B"中的 A、B 对换或否定抑或先否定再对换,就可以得到如下图所示的关系.



假设命题"若 A 则 B"真,则它的对偶命题必真,而其逆命题不一定真,并且,由于该逆命题与其对偶命题(即原命题的否命题)是同真伪的,所以这时原命题的否命题也不一定真.

必要条件·充分条件

当命题"若 A 则 B"为真时,称 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件.又,如果逆命题"若 B 则 A也真",则 A 是 B 的必要条件.这时称 A

是 B(或 B 是 A) 的充分必要条件(简称充要条件)。

直接证明·间接证明

可以把证明分为直接证明和间接证明两种方式

(I) 直接证明

在命题的条件下，使用公理或由公理证得的定理，经过正确的推理得出命题的结论，这样的证明方式叫做直接证明，这是最常用的一种证明方式。

(II) 间接证明

这是在用直接证明的方式遇到困难时所常用的证明方式，诸如归谬法(即反证法)以及转换法、同一法等。

1. 归谬法（反证法）

先假定命题的结论不成立，则由此推出与某公理或已被证明了的某定理相矛盾的结果，或推出与原命题的假设条件相矛盾的结果，从而证明该命题的结论正确，这种证明方法叫归谬法(反证法)，归根到底就是去证明原命题的对偶命题。

例 设要证明命题"从一点 P 向不通过 P 的直线 AB 引垂线只能引一条"。我们先否定它的结论，假设自 P 向 AB 可作两条(多于两条时，同理可证)垂线 PQ、PR，于是导致$\triangle PQR$ 的内角和大于二直角的结果。显然这与关于三角形内角和的已知定理矛盾，所以原命题成立。

2. 转换法

如果在命题的假设条件下有多种可能的情形存在，我们可以把每一种情形作为一种新的假定条件，并相应地给出它们应该有的结论而形成多个新的命题，然后分别证明每个新命题的逆命题的正确性 从而得到原命题的正确性。这样的方法叫做转换法，实质上也是一种归谬法。

例 在$\triangle ABC$ 中，AB 可能等于 AC，可能大于 AC，也可能小于 AC，它们的关系只能是这三种情形之一。试证之。

若 $AB=AC$ 则 $\angle B=\angle C$；若 $AB>AC$ 则 $\angle B<\angle C$；若 $AB<AC$ 则 $\angle B>\angle C$。假设这些新命题为真，则可以立即证得它们的逆命题，即下列各命题的正确性：

"在$\triangle ABC$ 中，若$\angle B=\angle C$，则 $AB=AC$；若$\angle B<\angle C$，则 $AB>AC$；若$\angle B>\angle C$，则 $AB<AC$"。

现在用归谬法来证明每个逆命题。先证"若$\angle B=\angle C$则 $AB=AC$"。设$\angle B=\angle C$ 时 $AB\neq AC$，则这时只可能有 $AB>AC$ 和 $AB<AC$ 两种情形。因为若 $AB>BC$，则必$\angle B<\angle C$；若 $AB<BC$，则$\angle B>\angle C$，每种情形都与

假设条件$\angle B=\angle C$矛盾。所以若$\angle B=\angle C$，则必有$AB=AC$。同理可证其余两个逆命题也真。总之，由以上各逆命题的正确性立即得到所需证明的原命题的正确性。

3. 同一法

若一个命题，当且仅当其逆命题成立时才成立，则可以把对命题"若A则B"的证明换成证明它的逆命题"若B则A"。这样的证明方法叫做同一法。

例 关于定理"等腰三角形顶角的平分线必垂直平分底边"的证明，由于顶角的平分线是唯一的，底边的垂直平分线也是唯一的，所以，这时该定理的逆定理为"等腰三角形底边的垂直平分线必平分顶角"，于是也可以把对原定理的证明换成对它的逆定理的证明。这样的证明方法叫做同一法。但必须注意的是，如果没有确定所说的"当且仅当"的关系时是不能用此法的，否则将导致错误。

常用的公理

正如在"几何学的历史"一段中所述，欧几里得"几何学原本"中的公理有着这样那样的不完善的地方，当今只有希尔伯特的"几何学基础"中叙述的公理才是最严格的。我们参考这本书，把常用的公理① 列在下面。在本章中，所有定理都是在这些公理的基础上建立起来的。

Ⅰ　关于平面、直线、点的公理

(1) 通过两点有且只有一条直线；

(2) 通过不共线三点的平面是唯一存在的；

(3) 连接平面上两点的直线全在这个平面内；

(4) 两个平面不可能只交于一点。

Ⅱ　关于图形可移动的公理

(5) 把图形移动到另外的任意位置时，它的形状和大小不变；

(6) 把图形作整体翻转后，不改变其形状和大小。

Ⅲ　关于平行线的公理

(7) 在同一平面内，过直线外一点，能作这条直线的一条平行线且只能作出一条平行线。

必须说明的是，在叙述这些公理时，用到了一些未加定义的术语，诸如点、直线、平面等。我们约定，它们都是无定义术语。至于平行线，则有下述定义。

【定义】 平行线　把在同一平面内，没有公共点(即无交点)的二直线叫做

① 希尔伯特公理体系共有五组公理，这里仅列出常用的一部分公理。——译注

是互相平行的。若直线 AB 和直线 CD 平行时，记作 $AB /\!/ CD$。

§2. 有关直线的基本定理

2.1 两直线的夹角和平行

【定义】1. 角、优角、劣角　如图 14-1 所示，在直线 AB 上取一点 o，将此直线划分为两段，然后，固定 OB，使 OA 围绕 O 点旋转，这时，OA 与 OB 所构成的图形叫做角。其中，大的一个叫做优角，小的一个叫做劣角。劣角用$\angle AOB$ 表示。

【定义】2. 平角、直角、余角、补角、钝角、锐角　当OA，OB 构成一直线时，此角叫做平角，平角的一半叫做直角。当两个角的和等于直角时，这两个角叫做做互为余角(简称互余)；两个角的和等于平角时，这两个角叫做互为补角(简称互补)。大于直角而小于平角的角叫做钝角，小于直角的角叫做锐角。直角可以用记号$\angle R$表示。如果$\angle AOB=\angle R$，那末也可写成 $AO\perp BO$。

【定义】 3. 对顶角　两直线相交所构成的四个角中，互相对着的角叫做对顶角。

【定理】1. 对顶角相等。

证明　如图 14-2 所示，要证明的命题是：$\alpha=\beta$，$\gamma=\delta$。

由平角的定义，$\alpha=2\angle R-\gamma$，$\beta=2\angle R-\gamma$，

∴ $\alpha=\beta$。

同理可证$\gamma=\delta$。 □

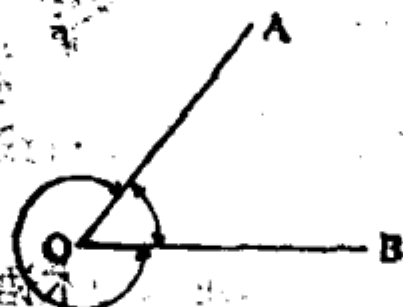


图14-1

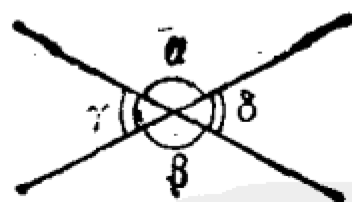


图14-2

【定义】4. 同位角·内错角·同旁内角　如图 14-3 所示，两条直线被第三条直线所截而形成的八个角中，角 α 和 α' 的方位相同（图中分别在这两条直线的上方并且都在第三条直线的右旁)，这样的一对角叫做同位角。β 和β'，γ 和γ'，δ 和 δ' 也都是同位角。γ 和 α' 都在两条直线之间，并

且其位置错开，这样的一对角叫做内错角。δ 和 β' 也是内错角。γ 和 β' 都在两条直线的内部，并且在第三条直线的同旁，这样的一对角叫做同旁内角。δ 和 α' 也是同旁内角。

【定理】2. 两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行。

证明　采用反证法来证明。如图 14-4 所示，设两条直线 AB，CD 和第三条直线的交点为 M、N，α、β 为它的一组内错角，这时，代替证明

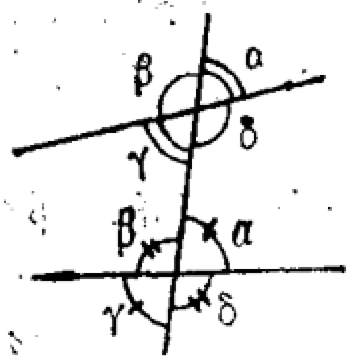


图14-3

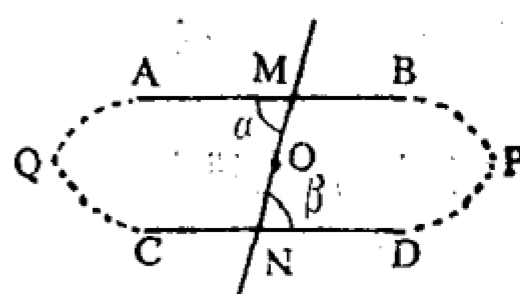


图　14-4

【$\alpha=\beta\Longrightarrow AB\parallel CD$】。

我们假定 AB 不平行于 CD，且在直线 KN 的右侧一点 P 相交。如果以 MN 的中点 O 为中心，将右侧的图形旋转 180°，那么，由于 $OM=ON$，故 M 重叠在 N 上，N 重叠在 M 上。由于 $\beta=\alpha$，故 ND 叠合在 MA 上。从而，直线 AB 重叠在直线 CD 上，直线 CD 重叠在直线 AB 上。因而，由此旋转，P 移到了 Q 的位置。结果，通过相异二点 P，Q 可以作出两条直线 AB，CD，这与公理矛盾．因而有

$AB\parallel CD$。　□

【系】1. 两条直线被第三条直线所截，如果有一组同位角相等，那么这两条直线平行。

证明　如果一组同位角相等，那么一组内错角也相等，因此归结为本定理。　□

【系】2. 两条直线被第三条直线所截，如果有一组同旁内角互补，那么这两条直线平行。

证明　如果一组同旁内角互补，那么一组内错角也相等，因此归结为本定理。　□

【定理】3. 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等。

证明　如图 14-5 所示，设 $AB\parallel CD$，α，β 是一组内错角，要证明 $\alpha=\beta$．现采用反证法来证明，假设 $\alpha\neq\beta$，于是过图中的 N 点引直线 $C'D'$，使它与 MN 构成的角等于 α，则由【定理】知，$C'D'\parallel AB$．但 $CD\parallel AB$，因此

过 N 点可作出两条平行于 AB 的直线。这显然与公理矛盾。因而 $\alpha=\beta$。这个定理是【定理】2 的逆定理。 □

【系】1. 两条平行直线被第三条直线所截，同位角相等。

证明 由于在【定理】3 中内错角相等，故同位角当然也变得相等。 □

【系】2. 两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补。

证明 由于在【定理】3 中内错角相等，因此同旁内角当然变成互补。 □

【定义】5. 正交、垂直、垂线 如果相交两条直线构成的角中有一个是直角，此二直线叫做正交或相互垂直，其中的任何一条叫做另一条的垂线。

【系】 如果一条直线垂直于两条平行直线之一，那么它也垂直于另一条直线。

证明 由【定理】3，内错角相等，如果其中一个是直角，那么另一个也应是直角。 □

【定理】4. 在同一平面内，如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也相互平行。

证明 见图 14·6，假设 $A_1B_1 /\!/ AB$，$A_2B_2 /\!/ AB$，则须证 $A_1B_1 /\!/ A_2B_2$。现用反证法证明，假如 A_1B_1 不平行于 A_2B_2，可设 A_1B_1 与 A_2B_2 相交于一点 P，则通过 P 点作出了两条平行于 AB 的直线，这显然违反公理。因而有

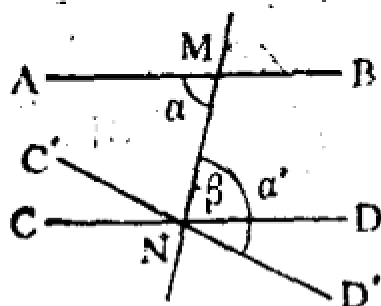


图14-5

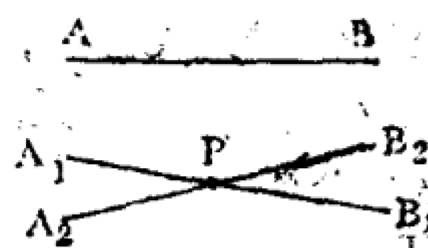


图14-6

$A_1B_1 /\!/ A_2B_2$ □

2·2 三角形的性质

【定义】6. 三角形、边、顶点、内(外)角、内对角 用三条直线所围成的图形叫做三角形，其中各条直线被另外两条直线所限制的部分，叫做三角形的边，它们的交点叫做顶点。相邻两边所组成的角叫做三角形的内角（或顶角）。另外，一边与其邻边延长线所组成的角叫做三角形的外角，与外角不相邻的内角叫做内对角。把顶点为 A，B，C 的三角形记为 $\triangle ABC$。

【定理】5. 三角形三个内角的和等于 180°.

证明 如图 14-7 所示，作边 BC 的延长线 CD，过 C 作平行于 BA 的直线

CE，则

$\angle CAB=\angle ACE$（内错角），

$\angle ABC=\angle ECD$（同位角），

$\therefore\ \angle CAB+\angle ABC+\angle BCA$

$=\angle ACE+\angle ECD+\angle ECA$

$=\angle 2R=180^\circ$ □

【系】 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

证明 由【定理】5 的证明中可以知道$\angle ABC=\angle ECD$，$\angle CAB=\angle ACE$，故得证。 □

【系】2. 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角。

证明 由于在【系】1 中有$\angle CAB+\angle ABC=\angle ACD$，而全量大于它的任一部分，故$\angle ACD$大于$\angle CAB$及$\angle ABC$中的任何一个。

【定义】7. 全等形 经移动后能完全重合的两个图形叫做全等形。当两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 全等时，记成$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。

【定理】6.（二边夹一角的全等） 有两边及其夹角对应相等的两个三角形全等。

证明 如图 14-8 所示，须证：在$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中，如果$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A=\angle A'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

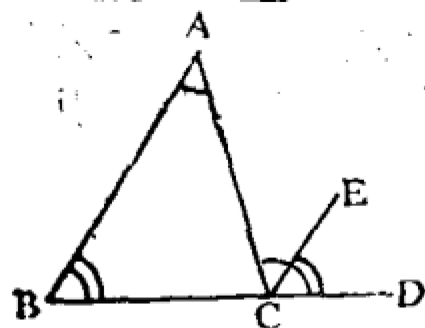


图 14-7

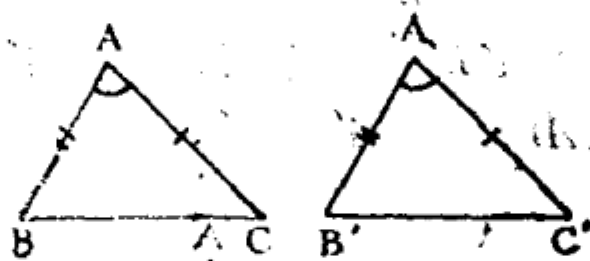


图 14-8

现在假定移动$\triangle ABC$，把它放到$\triangle A'B'C'$上，这时，由于$AB=A'B'$，所以恰好可以把 AB 完全重合在 $A'B'$ 上。又因为$\angle A=\angle A'$，故 AC在 $A'C'$ 上，但由于 $AC=A'C'$，故 AC 与 $A'C'$ 完全重合，因而 BC 也恰好重叠在 $B'C'$ 上，所以

$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. □

【定义】8. 等腰三角形 三边中有两边相等的三角形叫做等腰三角形。相等的边叫做腰，两腰的夹角叫做等腰三角形的顶角，其顶点叫做等腰三角形的顶点，与顶角相对的边叫做底边，腰和底边的夹角叫做底角。

【定理】7. 等腰三角形的两底角相等。

证明 如图 14-9 所示，在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$。今要证$\angle B=\angle C$。现假设把$\triangle ABC$翻过来，顶点 A，B，C 分别变为 A'，B'，C'。这时

在两个三角形中，由于有 $A'C'=AC$，$AB=AC$，故 $AB=A'C'$；同理可证，$AC=A'B'$，又因 $\angle A=\angle A'$，故由【定理】6 有

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad \therefore \angle B=\angle C'.$$

又因 $\angle C=\angle C'$，所以 $\angle B=\angle C$。

注意　这个定理源于"几何学原本"(12 卷本)第一卷第五命题，因为欧几里得没有使用"翻转"的方法而使证明变得十分复杂。据说，直到十四世纪末牛津大学的学生还为这个定理的证明困难而感到吃惊，他们给这个定理加了个绰号叫"愚人桥"(意为"笨人难通过的桥")。自然，用愚蠢的头脑终究是不可能逾越这个困难而使问题得到进展的。实际上这个证明中用到的"翻转"的方法是早已为古希腊后期的巴普士(Pappos 公元 300?)发现了的。而欧几里得是通过移动图形来完成整个证明的。这一点还是他证明中的一大特色。

【定理】8.（两角夹一边的全等） 有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等。

证明　如图 14-10 所示，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，已知：$BC=B'C'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，证明：$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$)。

现移动 $\triangle ABC$，使它放到 $\triangle A'B'C'$ 上。由于 $BC=B'C'$，故 B 和 C 可以分别重叠在 B' 和 C' 上。其次，因为 $\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$，所以边 AB 在边 $A'B'$ 上，边 AC 在边 $A'C'$ 上，因而顶点 A 与顶点 A' 重合。

$\therefore\ \triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。□

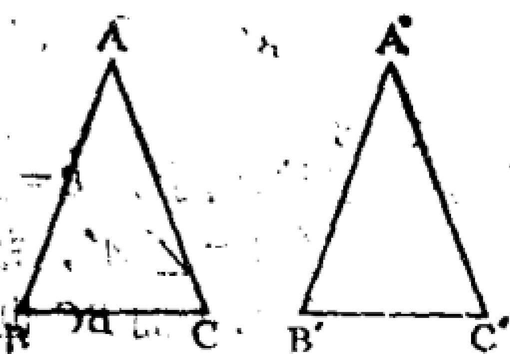


图 14-9

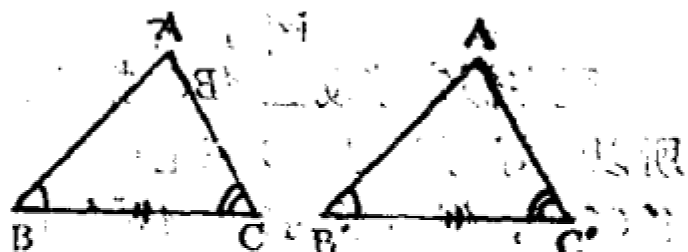


图 14-10

【系】 两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（两角及一个对边的全等）。

证明　由【定理】5 知，该二三角形的第三个角也相等，因此归结为【定理】8。□

【定理】9. 两个角相等的三角形是等腰三角形。

证明　如图 14-11 所示，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=\angle C$，证明 $AB=AC$。

现假设把$\triangle ABC$翻过来成为$\triangle A'B'C'$，顶点A，B，C分别变为A'，B'，C'。在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，由于

$$BC=C'B',\ \angle B=\angle C',\ \angle C=\angle B',$$

故由【定理】8知，$\triangle ABC\cong\triangle A'C'B'$，$\therefore AB=A'C'$。

但是　　$A'C'=AC$，　　$\therefore$　　$AB=AC$。　　□

【定义】9.(1)正三角形　三边相等的三角形叫做正三角形(或等边三角形)。

(2) 直角三角形　有一个角是直角的三角形叫做直角三角形。在直角三角形中，夹直角的两边叫做直角边，直角的对边叫做斜边。

(3) 锐角三角形　三个角都是锐角的三角形叫做锐角三角形。有一个角是钝角的三角形叫做钝角三角形。锐角三角形和钝角三角形合称斜三角形。

【定理】10. 等腰三角形顶角的平分线平分底边并且垂直于底边。

证明　如图 14-12所示，在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAD$，证明$BD=DC$。$AC\perp BC$。

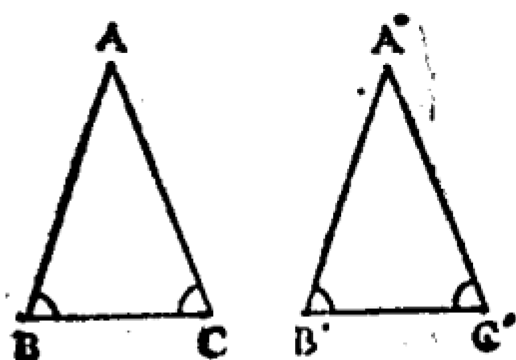


图14-11

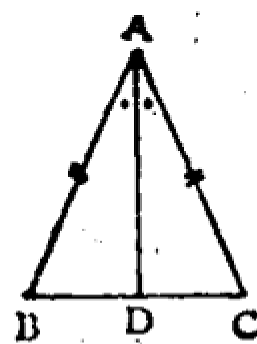


图 14-12

由于在$\triangle ABD$与$\triangle ACD$中，$AB=AC$，AD是公有边，$\angle BAD=\angle CAD$，所以根据二边夹一角的全等定理知，$\triangle ABD\cong\triangle ACD$。从而$BD=DC$。另外，$\angle ADB=\angle ADC$，及$\angle ADB+\angle ADC=2\angle R$，

$\therefore$　$\angle ADB=\angle ADC=\angle R$，$AD\perp BC$。　　□

【定义】10. 垂直平分线　垂直于一条线段并且平分这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线。

【定理】11.（三边的全等）　有三边对应相等的三角形全等。

证明　如图 14-13所示，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，已知，$AB=A'B'$，$CB=B'C'$，$CA=C'A'$，证明，$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$。

现假设把$\triangle A'B'C'$移向$\triangle ABC$，由于$BC=B'C'$，故$B'C'$与BC重合，B'落在B上，C'落在C上。另外，假设置A'和A在BC的两侧，A'的位

置令为 D. 于是，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中，由于 $AB=DB$，$AC=DC$，故由【定理】7，$\angle BAD=\angle BDA$，$\angle CAD=\angle CDA$.

$$\therefore\quad \angle BAC=\angle BDC,\quad \angle BAC=\angle B'A'C'.$$

从而，由两边夹一角的全等定理，得

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$$ □

【定理】12. 在两个三角形中，如果有两边和其中一边的对角相等，那么这两个三角形全等，或其中另一边的对角互补.

证明　如图 14-14 所示，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，已知($AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle B=\angle B'$)，证明($\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$ 或 $\angle C+\angle C'=2\angle R$).

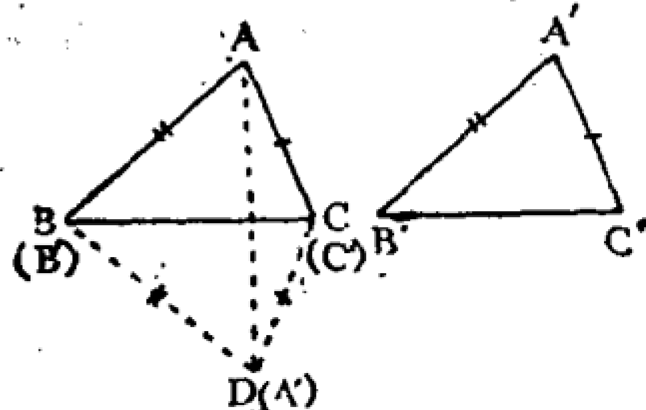


图 14-13

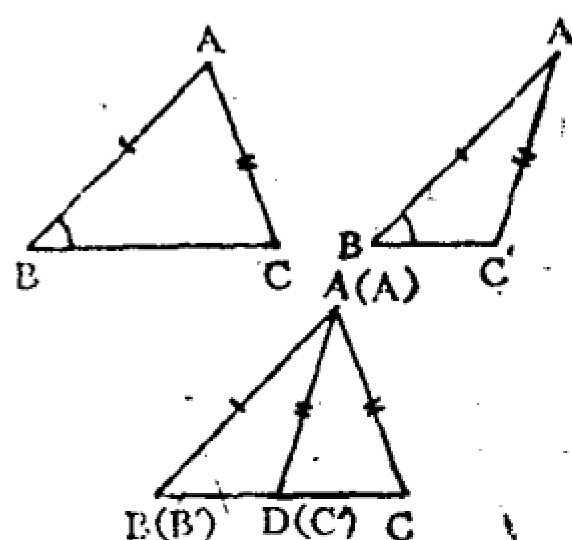


图 14-14

现在把 $\triangle A'B'C'$ 移向 $\triangle ABC$，如果边 $A'B'$ 与边 AB 重合，$\angle B'$ 与 $\angle B$ 重合，那么边 $B'C'$ 落到边 BC 上，这时会发生两种情形：顶点 C' 或者与顶点 C 一致，或者落到与 C 不同的另一点 D. 当 C' 与 C 一致时，就有 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$. 当 C' 落到 D 的位置时，根据 $AD=AC$，得 $\angle ADC=\angle C$，$\angle ADC+\angle ADB=2\angle R$，从而 $\angle C+\angle ADB=2\angle R$，即 $\angle C+\angle C'=2\angle R$.

【系】 斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等(斜边和一直角边的全等).

证明　在这两个直角三角形中，对应相等的直角边的对角必须相等(不可能互补)，由【定理】12 前半结论知它们全等. □

【定理】13. (外心) 三角形的三边的垂直平分线交于一点.

证明　如图 14-15 等示，在 $\triangle ABC$ 中，设 O 点是 AB，AC 的垂直平分线的交点，只要证明 O 点也位于 BC 的垂直平分线上即可. 因为 EO 是 AB 的垂直平分线，故由二边夹一角的全等定理知，$\triangle AEO\cong\triangle BEO$，$\therefore AO=$

BO，同样由$\triangle AFO \cong \triangle CFO$，得$AO=CO$，从而$BO=CO$。由此可知$\triangle BOC$是等腰三角形，因而$O$点位于$BC$的垂直平分线上(【定理】10)。 □

【定义】11. 外心．外接圆　在$\triangle ABC$中，当$AO=BO=CO$时，以O为中心，AO为半径的圆通过B，C二点．这个圆叫做$\triangle ABC$的外接圆．O点叫做$\triangle ABC$的外接圆圆心，简称外心．

【定理】14（内心）　三角形的三个内角的平分线交于一点．

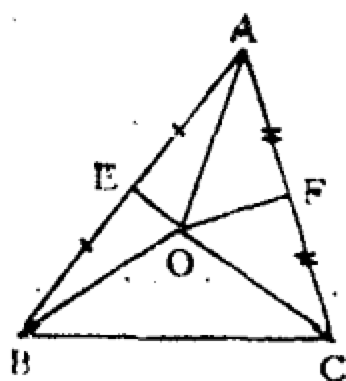


图 14-15

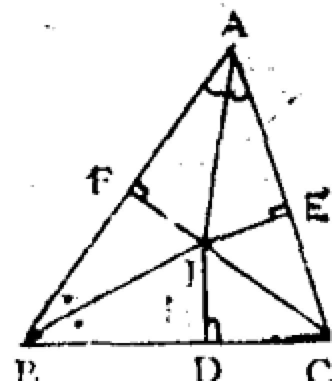


图14-16

证明　如图 14-16 所示，在$\triangle ABC$中，设$\angle A$和$\angle B$的平分线的交点为I，这时只要证明I也位于$\angle C$的平分线上即可．从I点作边BC，CA的垂线ID，IE，IF，那么在$\triangle AEI$和$\triangle AFI$中，根据二边夹一角的全等定理知$\triangle AEI \cong \triangle AFI$，$\therefore$　$IE=IF$．同样，由$\triangle IBF \cong \triangle IBD$，得$IF=ID$，从而$IE=ID$即$\triangle CEI$与$\triangle CDI$是斜边和一直角边对应相等的直角三角形，因此由【定理】12 的【系】，$\triangle CEI \cong \triangle CDI$，从而$\angle ICD=\angle ICE$，也就是说，$I$位于$\angle C$的平分线上． □

【定义】12. 内心．内切圆　在$\triangle ABC$中，如果由I点向三边所作垂线ID，IE，IF的长度相等，则以I为中心，ID为半径的圆叫做$\triangle ABC$的内切圆．I叫做$\triangle ABC$的内切圆的圆心，简称为$\triangle ABC$的内心．

【系】　三角形一个内角的平分线和另外两个顶点的外角的平分线交于一点(傍心)．

证明　如图 14-17 所示，在$\triangle ABC$中，设$\angle B$，$\angle C$的外角的平分线的交点为I_1　这时只要证明I_1位于$\angle A$的平分线上即可．假如由I_1作BC以及AC、AB延长线的垂线I_1D，I_1E，I_1F，则与【定理】14 同样地可得$I_1D=I_1E=I_1F$．应用$I_1E=I_1F$，由$\triangle I_1AF$与$\triangle I_1AE$的全等，得$\angle FAI_1=\angle EAI_1$，因此$I_1$位于$\angle A$的平分线上． □

【定义】13. 旁心·旁切圆　以I_1为中心，I_1D为半径的圆，叫做$\triangle ABC$的旁切圆．I_1是旁切圆的圆心，称为旁心．除了有与BC边相切的旁切圆外，还有分别与CA及AB两边相切的旁切圆，故旁心共有三个．【要点】

【系】 如果$\triangle ABC$的内心为I，$\angle A$内的旁心为I_1，则有

$$\angle BIC=\angle R+\frac{1}{2}\angle A,\ \angle BI_1C=\angle R-\frac{1}{2}\angle A.$$

证明 如图14-18所示，有

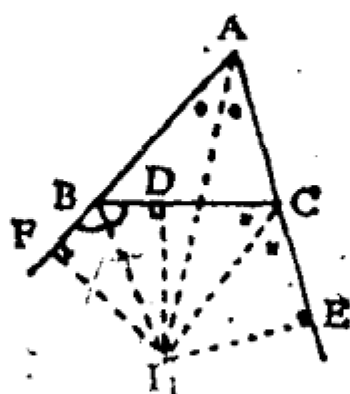


图14-17

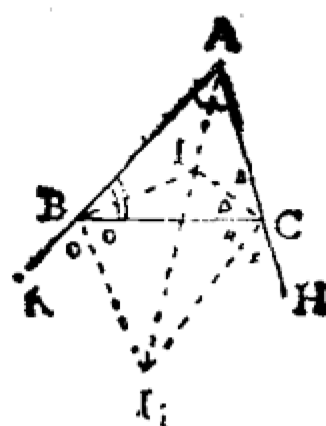


图14-18

$$\angle BII_1=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B,\ \angle CII_1=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C,$$

$$\therefore\quad \angle BIC=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}\angle A+\angle R.$$

又 $\frac{1}{2}\angle A+\angle AI_1C=\angle I_1CH=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$

则 $\angle AI_1C=\frac{1}{2}\angle B$

同理有 $\angle AI_1B=\frac{1}{2}\angle C.$

$$\therefore\quad \angle BI_1C=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)-\frac{1}{2}\angle A$$

$$=\angle R-\frac{1}{2}\angle A.$$ □

【定理】15. 在一个三角形中，如果两条边不等，那么它们所对的角也不等，大边所对的角较大。

证明 如图14-19所示，在$\triangle ABC$中，已知$AB>AC$，证明$\angle ACB>\angle ABC$

在边AB上，取$AD=AC$，连结D、C由$AD=AC$得$\angle ADC=\angle ACD$。但$\angle ADC>\angle ABC$(【定理】5【系】2)，

$\therefore$ $\angle ACD>\angle ABC$，从而$\angle ACB>\angle ABC$。 □

【定理】16. 在一个三角形中，如果两个角不等，那么它们所对的边也不等。

大角所对的边较大(【定理】15 的逆定理).

证明 现根据转换法来证明.如图 14-20.在$\triangle ABC$中，已知，$\angle ABC>\angle ACB$,证明：$AC>AB$.现假设$AC \not> AB$,而是$AC=AB$或$AC<AB$.但若$AC=AB$,则$\angle ABC=\angle ACB$;若$AC<AB$,则$\angle ABC<\angle ACB$,这都与本题的假定条件矛盾.因而$AC>AB$. □

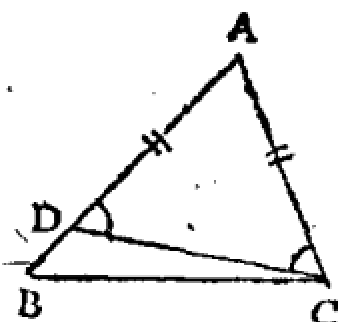


图14-19

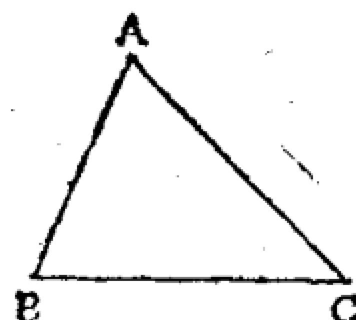


图14-20

【定理】17. 三角形的任何一边小于其他两边的和，大于其他两边的差.

证明 如图 14-21 所示.在$\triangle ABC$中,要证明$AB+AC>BC>AB-AC$.如果把边BA向A方延长，并在延长线上截取$AD=AC$，连结D,C，则有

$$\angle ACD=\angle ADC,\quad \angle BCD>\angle ACD.$$

$\therefore\ \angle BCD>\angle ADC$，即$BD>BC$，或$BA+AC>BC$.

其次，如果$AB\geqslant AC$，则由刚才的定理知，$AB<AC+BC$，因而$BC>AB-AC$.若$AB<AC$，则由$AC\angle AB+BC$,得$BC>AC-AB$，两种情形都得到$BC>AB-AC$. □

【定理】18. 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，若$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A>\angle A'$，则$BC>B'C'$.

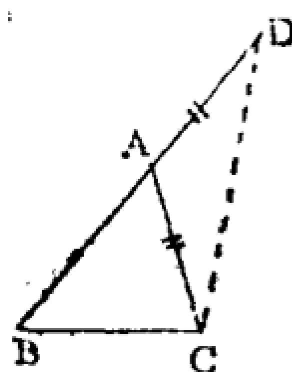


图 14-21

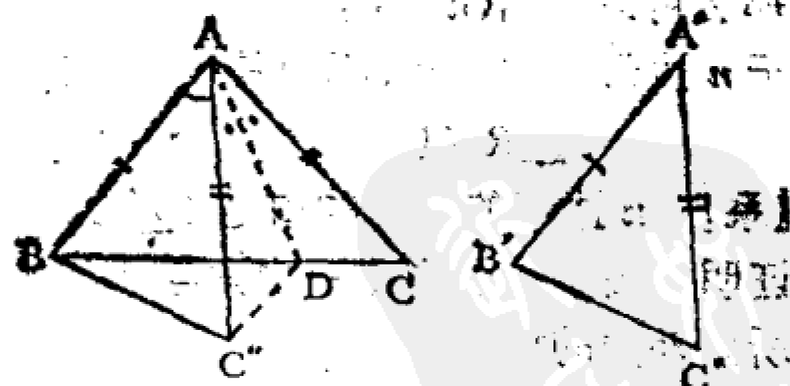


图 14-22

证明 如图 14-22 所示，移动$\triangle A'B'C'$使边$A'B'$与$\triangle ABC$的边AB重合，A'落在A上，B'落在B上，这时C'的位置令为C''.若$\angle CAC''$的

平分线和 BC 的交点为 D，则在$\triangle ACD$和$\triangle AC''D$中，$AC=AC''$，AD是公共边，$\angle C''AD=\angle CAD$，因此$\triangle ACD\cong\triangle AC''D$，$\therefore DC=DC''$，从而 $BC=BD+DC''$. 但由【定理】17，$BD+DC''>BC''=B'C'$，$\therefore BC>B'C'$. □

【定理】19. 在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，若 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$BC>B'C'$，则$\angle BAC>\angle B'A'C'$（【定理】18 的逆定理）.

证明　用转换法证明. 也就是说，若$\angle BAC\not>\angle B'A'C'$，则有$\angle BAC=\angle A'B'C'$或$\angle BAC<\angle B'A'C'$.

若$\angle BAC=\angle B'A'C'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，$BC=B'C'$.

再有，若$\angle BAC<\angle B'A'C'$，则由【定理】18，得 $BC<B'C'$. 这都与题设矛盾.

$\therefore\quad \angle BAC>\angle B'A'C'$ □

2·3. 平行四边形的性质

【定义】14. 多边形·对角线　由两两不在同一条直线上的 n 个线段顺次首尾连结组成的封闭图形，叫做 n(多)边形. 组成多边形的各条线段叫做多边形的边，每相邻两条边的公共端点叫做多边形的顶点. 连结多边形的不相邻的两个顶点的线段叫做多边形的对角线. 多边形的相邻两边所组成的角叫做多边形的内角. 多边形的内角的一边与另一边向外的延长线所组成的角叫做多边形的外角. 如果多边形的各个内角都小于平角，这样的多边形叫做凸多边形. 否则叫做凹多边形. 本书中通常谈到多边形时，都是指凸多边形.

【定理】20. n 边形的 n 个内角的和等于$(2n-4)$个直角.

证明　如图 14-23 所示，如果过n边形 $ABCDE\cdots$的一个顶点 A 引对角线，那么可以引出$(n-3)$条. 从而构成$(n-2)$个三角形. 这些三角形的内角和等于 n 边形的内角和. 因而其内角和为

$$2\angle R\times(n-2)=(2n-4)\angle R.$$ □

【系】 n 边形的外角的和是 $4\angle R$.

证明　由于多边形每一内角与相邻的一个外角的和等于 180°(即 $2\angle R$)，所以外角的和是

$$(2\angle R-\angle A)+(2\angle R-\angle B)+\cdots=2\angle R\times n-(A+B+\cdots)$$
$$=2n\angle R-(2n-4)\angle R=4\angle R.$$ □

【定义】15. 平行四边形　四边形的相对的两边称为对边. 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形. 顺次以 A,B,C,D 作顶点的平行四边形记作

"▱*ABCD*".

【定理】21. 在平行四边形中，

(1) 两组对边分别相等；

(2) 两组对角分别相等；

(3) 两边对角线互相平分.

证明 (1) 如图 14-24 所示，在▱$ABCD$ 中，如果作对角线 BD，则对于 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 有

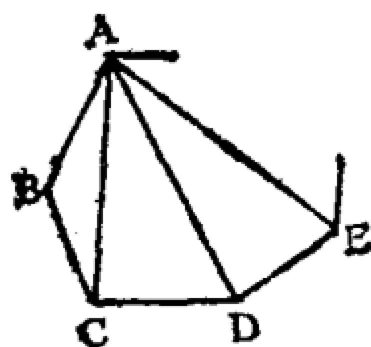


图 14-23

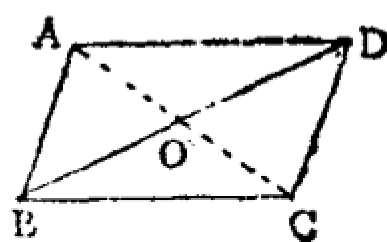


图 14-24

$\angle ABD=\angle CDB$（$\because AB \parallel CD$），

$\angle ADB=\angle DBC$（$\because AD \parallel BC$），

BD 为公共边，

$\therefore$ $\triangle ABD \cong \triangle CDB$（两角夹一边）.

$\therefore$ $AB=CD$，$AD=BC$.

(2) 由(1)的全等关系得 $\angle A=\angle C$. 另外，由 $\angle ABD=\angle CDB$，$\angle ADB=\angle DBC$，得

$\angle ABC=\angle ADC$.

(3) 设▱$ABCD$ 的两条对角线的交点为 O，则对于 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 有

$\angle OAD=\angle OCB$（$\because AD \parallel BC$），

$\angle ODA=\angle OBC$（$\because AD \parallel BC$），

又由(1)知 $AD=BC$，$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$.

$\therefore$ $AO=OC$，$BO=OD$ □

【定理】22. 四边形

(1) 若两组对边分别相等则是平行四边形；

(2) 若两组对角分别相等则是平行四边形；

(3) 若一组对边相等且平行则是平行四边形；

(4) 若两条对角线互相平分则是平行四边形，

证明 (1) 如图 14-25 所示，在▱$ABCD$ 中，如果作对角线 BD，那么对于△ABD 和△CDB 有

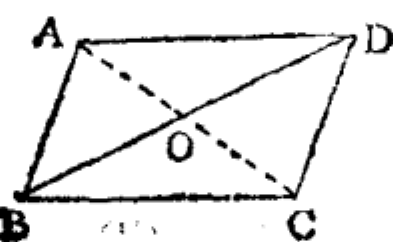


图 14-25

$AB=DC$，$AD=BC$，BD 公有，

∴ △ABD≌△CDB(三边的全等).

∴ ∠ABD=∠BDC(内错角).

∴ $AB\parallel DC$，又∠ADB=∠CBD(内错角)，∴$AD\parallel BC$.从而，▱$ABCD$ 是平行四边形.

(2) 在▱$ABCD$ 中，∠A=∠C，∠B=∠D，且∠A+∠B+∠C+∠D=4∠R(【定理】20)，

∵ ∠A+∠B=2∠R，∠C+∠D=2∠R.

由此可知同傍内角是互补的，因而 $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$.从而▱$ABCD$是平行四边形.

(3) 在▱$ABCD$ 中，如果作对角线 BD，那么对于△ABD 和△CDB，有

∠ABD=∠CDB(∵$AB\parallel CD$，题设)，

$AB=CD$(题设)，BD为公共边，

∴ △ABD≌△CDB(两边夹一角).

∴ ∠ADB=∠DBC， ∴ $AD\parallel BC$.

从而，两组对边分别平行，故▱$ABCD$ 是平行四边形.

(4) 设▱$ABCD$ 的两条对角线的交点为 o，这时，根据题设有 $AO=OC$，$BO=OD$；又∠AOB=∠COD(对顶角)，因此

△AOB≌△COD(两边夹一角)，

∴ ∠ABO=∠CDO 即 $AB\parallel CD$.

另外，由全等关系知 $AB=CD$，从而根据(3)知，▱$ABCD$ 是平行四边形.

□

【定义】16. (1) **等边多边形** 各条边都相等的多边形叫做等边多边形.

(2) **等角多边形** 多边形的内角都相等时，这个多边形叫做等角多边形.

(3) **正多边形** 多边形的各边都相等，各内角都相等时，这个多边形叫做正多边形.

(4) **长方形** 四个角都是直角的四边形叫做长方形.

(5) **菱形** 四条边都相等的四边形叫做菱形.

(6) **正方形** 四个角都是直角且四条边都相等的四边形叫做正方形.

(7) **梯形** 一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形。平行的两边叫做梯形的底，不平行的两边叫做梯形的腰。

【定理】23.（中位线定理） 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，它平行于第三边且等于第三边的一半。

证明 如图 14-26 所示，假设△ABC 的边 AB、BC 的中点各为 D，E，这时要证明 $DE \parallel BC$，$2DE=BC$。

现将 DE 向 E 方向延长，取 $DE=EF$，则由 $AE=EC$，$DE=EF$，并根据【定理】22 知，▱$ADCF$ 是平行四边形．从而，$AD \parallel FC$ 且 $AD=FC$，但 $AD=BD$，因此 $BD \parallel CF$，$BD=CF$。

从而，再根据【定理】22，▱$DBCF$ 是平行四边形，$DF \parallel BC$，$DF=BC$，但 $DE=EF$，因此 $2DE=BC$，且 $DE \parallel BC$。 □

【系】1． 连结梯形两腰的中点的线段叫做梯形的中位线．它平行于两底并且等于两底和的一半。

证明 如图 14-27 所示，在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD \parallel BC$，$AE=EB$，$DF=FC$，要证明 $EF \parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$．现将 BC 向 C 方向延长，取 $CG=AD$，则 $CG \parallel AD$，$CG=AD$，因此▱$ACGD$ 是平行四边形．从而，对角线 AG 与对角线 DC 互相平分，故 AG 通过 F 且 $AF=FG$。

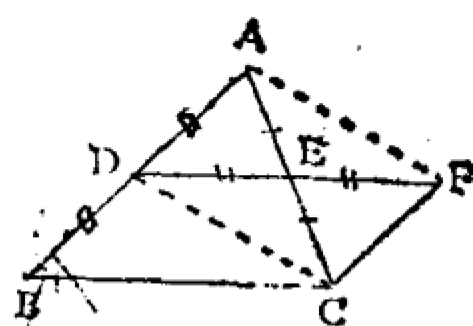


图 14-26

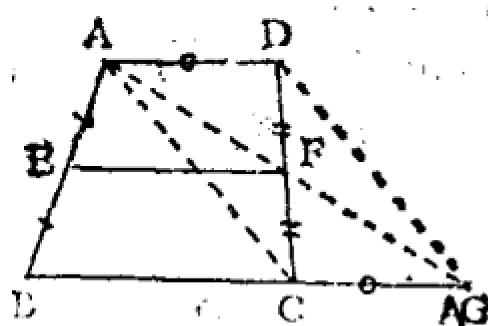


图 14-27

对上△ABG，$AE=EB$，$AF=FG$，故由

【定理】23，有 $EF \parallel BG$，且 $EF=\frac{1}{2}BG$。

$$\therefore\ EF \parallel BC,\ EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$$ □

【系】2． 连结梯形两对角线的中点的线段，平行于两底并且等于两底差的一半。

证明 如图 14-28 所示，在梯形 $ABCD$ 中，设 $AD \parallel BC$，$DE=EB$，$AF=FC$，要证明 $EF \parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}(BC-AD)$。

现假定 $BC>AD$，在 BC 上取点 G 使 $BG=AD$，则由 $AD=BG$，$AD\parallel BG$ 知，▱$ABGD$ 是平行四边形。从而，其对角线 AG，BD 互相平分，故 AG 通过点 E，且 $AE=EG$。

对于 $\triangle AGC$，$AE=EG$，$AF=FC$，故由【定理】23，有 $EF\parallel GC$，且 $EF=\frac{1}{2}GC$。 ∴ $EF\parallel BC$，$EF=\frac{1}{2}(BC-AD)$ □

【定理】24. 经过三角形一边的中点并且和另一边平行的直线平分第三边。

证明　如图 14-29 所示，在 $\triangle ABC$ 中，设 $AD=DB$，$DE\parallel BC$，要证明 DE 过 AC 的中点。

如果过 C 点作 BC 的平行线，与 DE 的交点为 E，则由 $DE\parallel BC$，$CE\parallel BD$，知▱$DBCE$ 是平行四边形。从而，$BD=CE$。但 $BD=AD$，∴ $AD=CE$ 且 $AD\parallel CE$。因而 $ADCE$ 也是平行四边形，对角线 DE 通过另一对角线 AC 的中点。 □

【定理】25. 三角形的三条中线交于一点。

证明　如图 14-30 所示，设 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 的中点为 D，E，F，BE 和 CF 的交点为 G，要证明 AD 通过 G 点。

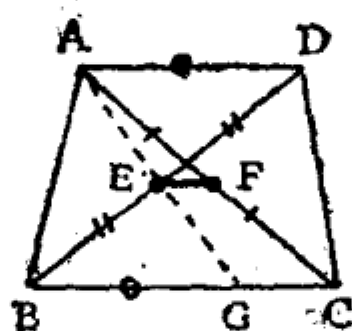


图 14-28

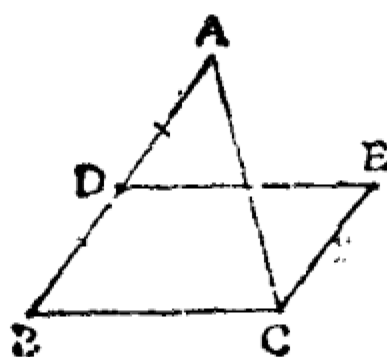


图 14-29

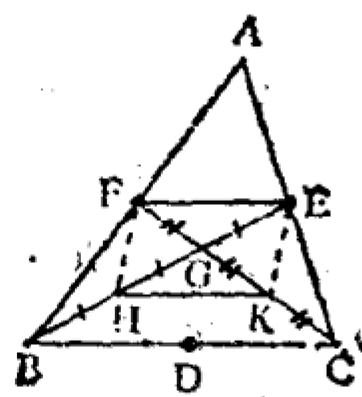


图 14-30

现设 BG 的中点为 H，CG 的中点为 K，则由【定理】23，$HK\parallel BC$，$HK=\frac{1}{2}BC$。又，F，E 是 AB，AC 的中点，故由【定理】23，$FE\parallel BC$，$FE=\frac{1}{2}BC$。

∴ $FE=HK$，$FE\parallel HK$。因而 $FHKE$ 是平行四边形。

∴ $EG=GH$，$FG=GK$，∴ $GE=\frac{1}{3}BE$，$FG=\frac{1}{3}FC$。

由此可见，中线 BE，CF 在距离边 AC，AB 的中点 $\frac{1}{3}$ 处相交。

从而，中线 BE，AD 也在距离边 AC，BC 的中点 $\frac{1}{3}$ 处相交，故 AD 通过 G 点。 □

【系】 三角形的三条中线在距离顶点为各中线的 $\frac{2}{3}$ 处相交。

证明 参看【定理】25 的证明。 □

【定义】17. 重心 三角形三条中线的交点叫做三角形的重心。

【定理】26. 从三角形的各顶点向对边所作的三条垂线交于一点。

证明 如图 14-31 所示，设 AD，BE，CF 为 $\triangle ABC$ 的三垂线，要证明 AD，BE，CF 交于一点。现在通过顶点 A，B，C 分别作对边的平行线 $B'C'$，$C'A'$，$A'B'$，它们构成 $\triangle A'B'C'$。由于四边形 $BCB'A$，$BCAC'$ 是平行四边形，所以 $BC=AB'=AC'$。另外，$BC\perp AD$，$BC\parallel B'C'$，因此 $AD\perp B'C'$。从而 AD 是 $B'C'$ 的垂直平分线。同样，BE，CF 也分别是 $A'C'$，$A'B'$ 的垂直平分线，所以 AD，BE，CF 在 $\triangle A'B'C'$ 的外心相交。 □

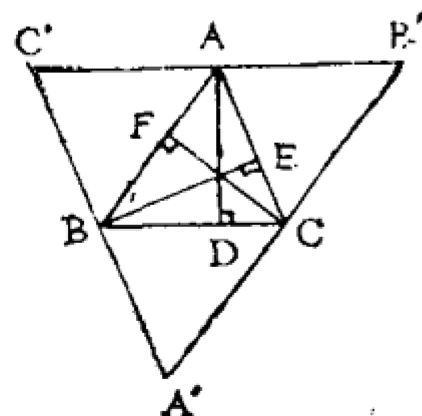


图 14-31

【定义】18. 垂心 在【定理】26 中提到的那个交点叫做三角形的垂心。

§3. 有关面积和比例的基本定理

3·1 多边形的面积

【定义】1. 面积 对于用线段和曲线所围成的平面图，表征它的大小的量叫做此图形的面积，图形的面积是用边长为单位长度的正方形的面积作单位来度量的。

当两个图形的面积相等时，叫做这两个图形是等积的。$\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle A'B'C'$ 的面积相等时，表示成 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$。

【定义】2. 三角形.平行四边形的高和底·矩形的面积 由三角形的一个顶点向对边所引的垂线称为此边上的高。这时称此边为底。平行四边形的一对平行边之间的公共垂线的长度叫做高。此平行边叫做平行四边形的底。边

长分别为 a，b 的矩形，其面积用 $S=ab$ 表示。($S=ab$ 严格说来应该是一个定理，但这里简略地作成定义)。

【定理】1. 平行四边形的面积等于它的底和高的积。

证明　如图 14-32 所示，在▱$ABCD$ 中，设由 A，D 分别作 BC 及其延长线的垂线，垂足各为 E，F。

对于△ABE 与△DCF，有 $AB=CD$，$\angle ABE=\angle DCF$，$\angle AEB=\angle DFC(=\angle R)$ ∴　△ABE≌△DCF(两角夹一边)。

∴　▱$ABCD$=▱$AEFD$=$AD\cdot AE=BC\cdot AE$=底×高。　□

【定理】2. 三角形的面积等于它的底和高的积的一半。

证明　如图 14-33 所示，设 AD 是△ABC 的高。由 A,C 分别作 BC，BA 的平行线，其交点令为 E,那么,▱$ABCE$ 是平行四边形。△ABC与△ACE 的三边分别对应相等，

∴　△ABC≌△ACE。

∴　△$ABC=\frac{1}{2}$▱$ABCE=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}$底×高。　□

【定义】3. 梯形的高　梯形两底间的距离叫做梯形的高。

【系】1. 梯形的面积等于两底的和与高的积的一半。

证明　如图 14-34 所示，设 $ABCD$ 为梯形，$AD\parallel BC$，作对角线 BD。过 B，D 分别作 AD，BC 或其延长线的垂线，垂足各为 E，F。

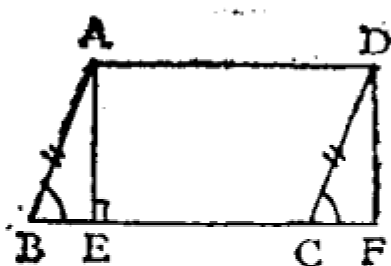


图 14-32

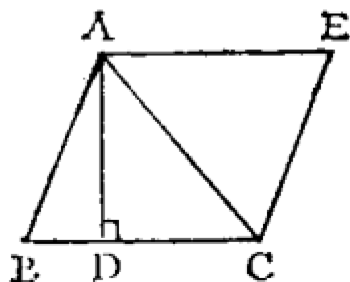


图 14-33

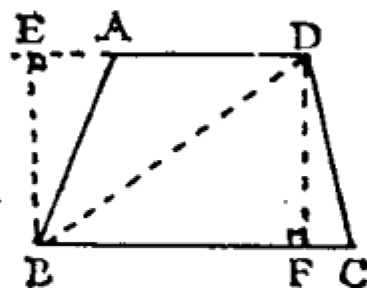


图 14-34

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}BE\cdot AD,$$

$$\triangle BDC=\frac{1}{2}DF\cdot BC,$$

但是，▱$EBFD$ 是矩形，因此 $BE=DF$，从而

$$\square ABCD=\triangle ABD+\triangle BDC=\frac{1}{2}BE\cdot AD+\frac{1}{2}DF\cdot BC$$

$$=\frac{1}{2}DF\cdot AD+\frac{1}{2}DF\cdot BC=\frac{1}{2}DF(AD+BC)$$

$$=\frac{1}{2}(\text{高})\times(\text{两底的和}).$$ □

【系】2. 连结同底的两个三角形的顶点的直线段，如果平行于底，或者被底平分，那么这两个三角形面积相等(反过来，逆定理也真)。

证明　如图 14-35 所示，设 ABC 和 $A'BC$ 为两个三角形，则由 A, A' 向底 BC 作垂线，由于所得到的两高相等，所以这两个三角形等积。□

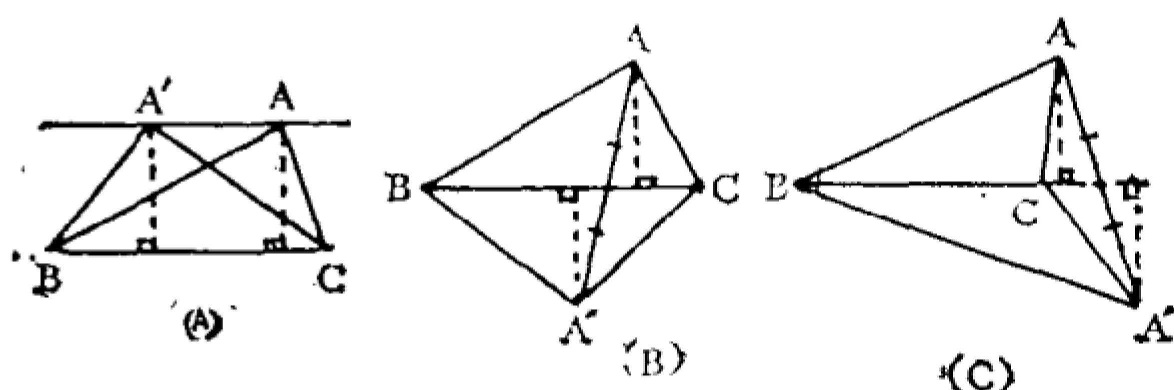


图 14-35

【定理】3.（勾股定理） 在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边平方的和.

证明　如图 14-36 所示，在△ABC 中，设∠A=∠R。今在△ABC 的外侧以 BC, CA, AB 为边分别作正方形 $BEDC$, $ACGF$, $ABHK$。再由 A 作 BC 的垂线，与 BC, ED 的交点各令为 L, M，连结 A 和 E, C 和 H。

在△ABE 和△HBC 中，$AB=HB$, $BE=BC$, ∠ABE=∠HBC=∠ABC+∠R。

∴　△ABE≌△HBC(两边夹一角)。

又，在以 HB 为底的△CHB和正方形 $ABHK$中，由于底和高都相等，所以△HBC $=\frac{1}{2}$▱$ABHK$。同样，在△ABE 和矩形∠BEM中，底和高也相等，因此

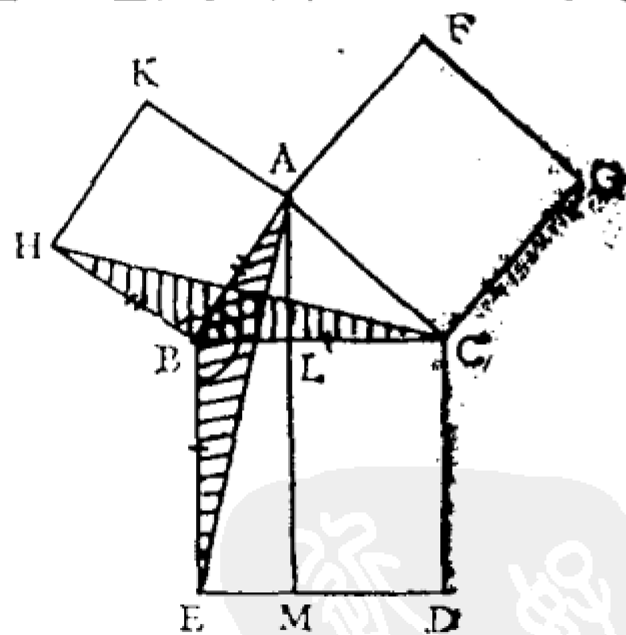


图 14-36

$$\triangle ABE=\frac{1}{2}\square LBEM,$$

∴ $\square ABHK=\square LBEM$。

同理可证，$\square ACGF=\square LMDC$。

∴ $\square ACGF+\square ABHK=\square BEDC$。

从而 $AC^2+AB^2=BC^2$。 □

参考 这个定理又叫做毕达哥拉斯(Pgthagoras)定理*.毕达哥拉斯并不知道怎样证明这个定理，欧几里得在“几何学原本”中把它作为第一卷第47命题并给出了上述的证明方法。这个定理的证明方法非常多，仅就这三个正方形的各种位置安排来说，也有八种不同的证法，颇为有趣，现列于下：

设直角三角形ABC($\angle A=\angle R$)的各边为a，b，c，以它们作的正方形为a^2，b^2，c^2。

1° a^2，b^2，c^2画在直角三角形外侧的情形（在【定理】3中给出了证明)。

2° a^2，b^2画在直角三角形的外侧，c^2画在内侧的情形.

3° a^2，c^2画在直角三角形的外侧，b^2画在内侧的情形.

4° b^2，c^2画在直角三角形的外侧，a^2画在内侧的情形.

5° a^2，b^2画在直角三角形的内侧，c^2画在外侧的情形.

6° a^2，c^2画在直角三角形的内侧，b^2画在外侧的情形.

7° b^2，c^2画在直角三角形的内的，a^2画在外侧的情形.

8° a^2，b^2，c^2都画在直角三角形内侧的情形。

下面，介绍2°，6°的证明供参考。

2°的证明(图 14—37)

由 $\triangle ABC\cong\triangle BFE$(两边夹一角)

得 $\angle BFE=\angle CAB=\angle R$

从而，G，F，E 在一条直线上

$\therefore\square AGFB=2\triangle ABE$

$=\square BJKE$ ①

又，$\triangle BIC\cong\triangle DAC$(两边夹一角)

$\therefore\square AHIC=2\triangle BIC=2\triangle DAC$

$=\square CDKJ$ ②

由①，②得 $a^2=b^2+c^2$

6°的证明(图 14—38)

由 $\triangle ABC\cong CFE$(两边夹一角)

得 $\angle BAC=\angle CFE=\angle R$

从而，E 位于 FG 上

$\therefore\square ACFG=2\triangle AEC$

$=\square KJCE$ ①

又，$\triangle BIC\cong\triangle BAD$(两边夹一角)

$\therefore\square ABIH=2\triangle BIC=2\angle BAD$

$=\square KDBJ$ ②

由①，②得 $a^2=b^2+c^2$

【**定理4**】. 如果三角形一条边的平方等于其他两条边平方的和，那么这个三角形是直角三角形。

---

①又名商高定理或勾股定理——译注

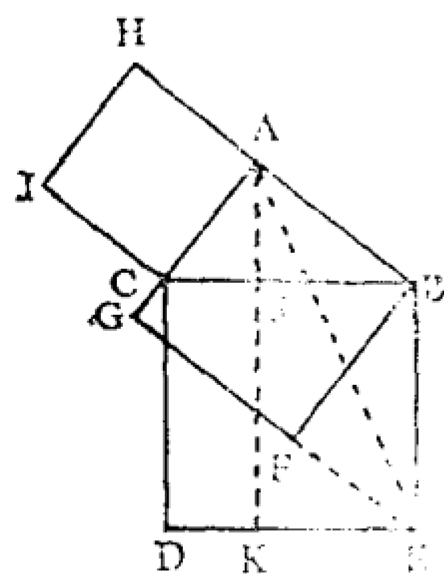


图 14-37

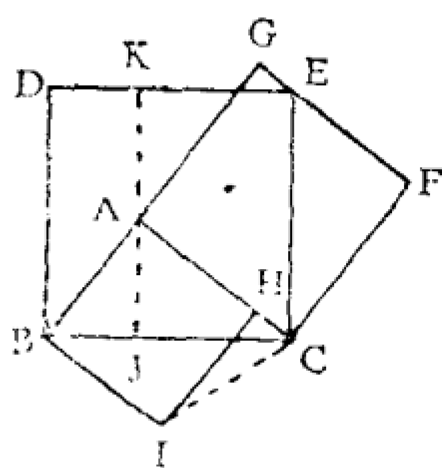


图 14-38

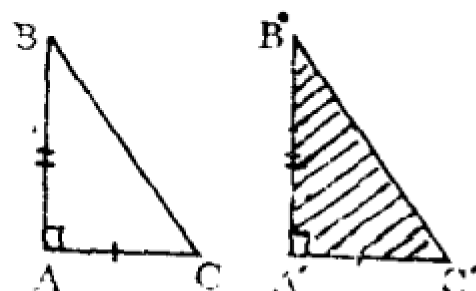


图 14—39

证明　如图 14-39 所示，在$\triangle ABC$中，已知$BC^2=AB^2+AC^2$，要证明$\angle A=\angle R$.

如果作$\triangle A'B'C'$，使$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，$\angle A'=\angle R$，那么$\triangle A'B'C'$是直角三角形，因此由【定理】3 有

$$B'C'^2=A'B'^2+A'C'^2.$$

但　$AB=A'B'$，$AC=A'C'$，故

$$A'B'^2+A'C'^2=AB^2+AC^2=BC^2.$$

∴　$BC=B'C'$. 由此，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的三边分别相等，$\triangle ABC\cong A'B'C'$　但$\angle A'=\angle R$

$$\therefore\quad \angle A=\angle R.$$

□

【定理】5. 若$\triangle ABC$的$\angle A$是锐角，$BD\perp AC$，则有　$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AD$.

证明　如图 14-40 所示，在$\triangle BDC$中，$\angle D=\angle R$，因此

$$BC^2=BD^2+DC^2. \quad ①$$

又，在$\triangle ABD$中，$\angle D=\angle R$，因此

$$BD^2=AB^2-AD^2. \quad ②$$

另外，$DC^2=(AC-AD)^2$

$$=AC^2-2AC\cdot AD+AD^2. \quad ③$$

把②，③代入①，则得

$$BC^2=(AB^2-AD^2)+(AC^2-2AC\cdot AD+AD^2)$$

$$=AB^2+AC^2-2AC\cdot AD.$$

□

【系】　若$\triangle ABC$的$\angle A$是钝角，$BD\perp AC$，则

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC\cdot AD.$$

证明　如画 14-41 所示。证明方法与【定理】5 的证明完全相同，故从略.

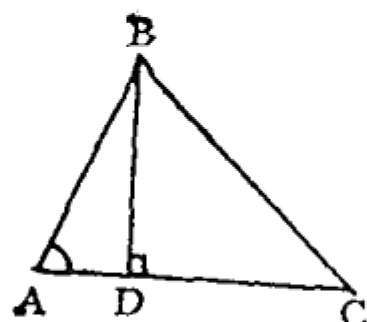


图 14-40

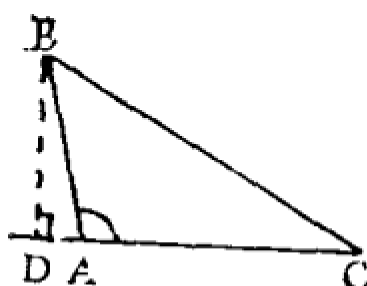


图 14-41

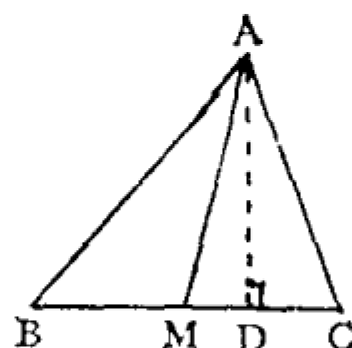


图 14-42

注意　【定理】5 和【系】相当于三角学中的余弦定理。

【定理】6. 设M 是$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，

则　　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$。(巴普士定理)

证明　如图 14-42 所示，对于$\triangle ABM$，由【定理】5 和【系】，有

$$AB^2=AM^2+BM^2+2BM\cdot MD. \qquad ①$$

对于$\triangle AMC$，由【定理】5有

$$AC^2=AM^2+MC^2-2MC\cdot MD. \qquad ②$$

①+②，并注意到　$BM=CM$，便得

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2).$$

□

【定义】4. 内分 · 外分　如果点 P 位于线段 AB 上，且 $AP:PB=m:n$，这时 P 叫做把 AB 内分为 $m:n$；如果 P 位于 AB 的延长线上，且 $AP:PB=m:n$，这时 P 叫做把 AB 外分为 $m:n$。

【系】　在$\triangle ABC$ 中，若 P 点把 BC 边内分为 $m:n$，则有

$$nAB^2+mAC^2=(m+n)AP^2+nBP^2+mCP^2.$$

证明　只要在【定理】6 的证明中，作①$\times n+$②$\times m$ 即可导出.　□

3.2 比　例

【定理】7. 与三角形一边平行的直线，必以相同的比例内分或者外分另两边.

证明　如图 14-43 在三角形$\triangle ABC$中，作 $DE\parallel BC$，于是只须证明 $AD:DB=AE:EC$.

首先，联结 BE，CD，则有

$\triangle ADE:\triangle DBE=AD:DB$(等高三角形的性质)，

$\triangle ADE:\triangle EDC=AE:EC$(等高三角形的性质)，

又因，$\triangle DBE=\triangle EDC$($\because DE\parallel BC$).

$\therefore$　$AD:DB=AE:EC$.　□

【系】1. 如图 14-44，在$\triangle ABC$ 中，若 $AD:DB=AE:EC$，则有$DE\parallel BC$.

证明　过 B 引 DE 的平行线，并延长 AC 与之相交于 C'，于是由【定理】7，有 $AD:DB=AE:EC'$，

∴　$AE:EC=AE:EC'$，从而 C 与 C' 重合．　□

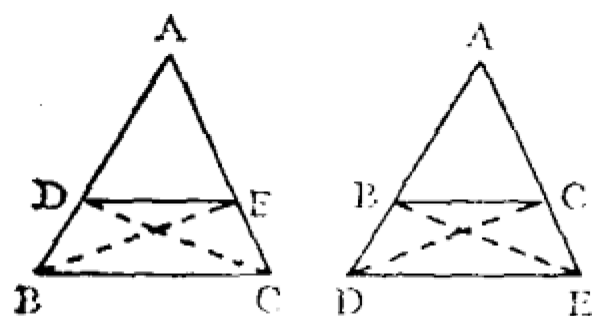


图 14-43

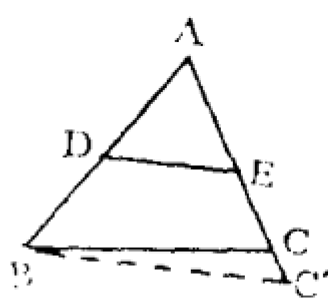


图 14-44

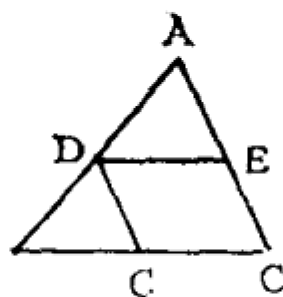


图 14-45

【系】2．在△ABC 中，若 $DE \parallel BC$
则　$AD:AB=DE:BC$。

证明　如图 14-45，由于 $DC' \parallel AC$ 所以 $AD:AB=C'C:BC$。且因▱$DC'CE$ 是平行四边形，所以 $DE=C'C$．

亦即　$AD:AB=DE:BC$．　□

【定理】8．在△ABC 中，设∠A 的平分线交 BC 于 D，∠A的外角平分线交 BC 的延长线于 E，则。

$$AB:AC=BC:DC=BE:EC.$$

证明　过 C 引 AD 的平行线交 BA 的延长线于 C'，则有∠$CC'A$=∠DAB(同位角)，∠ACC'=∠DAC(内错角)。又因∠DAB=∠DAC，

∴∠$CC'A$=∠ACC'，$AC=AC'$．

再根据 $AD \parallel CC'$，即有 $AB:AC'=BD:DC$，

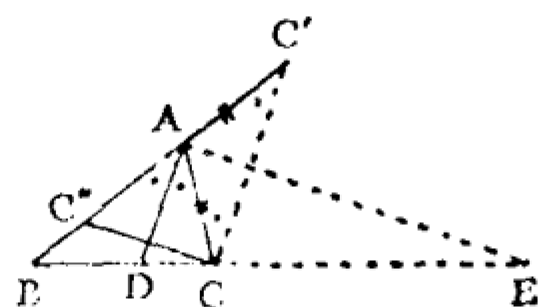


图 14-46

∴　$AB:AC=BD:DC$．

同理，过 C 引 AE 的平行线交 AB 于 C''，则有 $AC=AC''$，因此有 $AB:AC''=BE:EC$，从而又有

$AB:AC=BE:EC$．　□

【系】　若△ABC 的 BC 边有内分点 D 和外分点 E，使得 BC 被分成的两段的比值都等于 $AB:AC$，则 AD 是∠A 的内角平分线，AE 是∠A 的外角平分线(图 14-46)．

证明　设∠A 的内角平分线交 BC 于 D' 点，则根据【定理】8 有 $BD':D'C=AB:AC$，然而 $BD:DC=AB:AC$，

∴　$BD':D'C=BC:DC$，即 D 和 D' 重合。从而 AD 是∠A 的内角平

分线。同理可证，AE 是$\angle A$ 的外角平分线。

【定义】5．相似·相似比 对于两个(边数相等的)多边形$ABC\cdots K$ 和$A'B'C'\cdots K'$，当对应角都相等，对应边都成比例时，称它们为相似多边形．记成：多边形 $ABC\cdots K\backsim$ 多边形 $A'B'C'\cdots K'$．特别地，把对应边的这个比值叫做相似比。

【定理】9． 两个三角形，只要满足如下各条之一，即为相似三角形：

(1) 有两组角对应相等；

(2) 一组角对应相等，且夹此角的两边对应成比例；

(3) 三条边对应成比例．

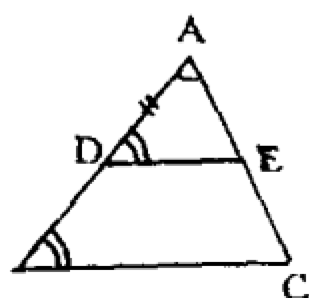


图14-47

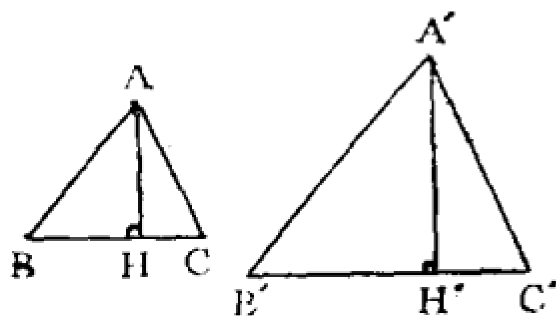


图14-48

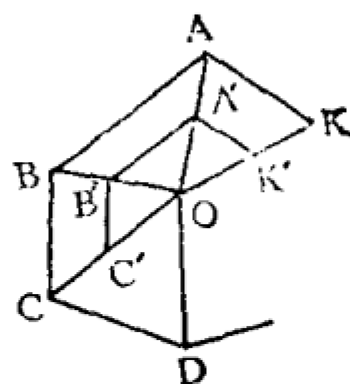


图14-49

证明 (1) 如图 14-47，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，设$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，我们来证明$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．首先，在 AB 边上或其延长线上取一点 D 使 $AD=A'B'$．再过 D 作 BC 的平行线与 AC 交于 E，于是对于$\triangle ADE$ 和$\triangle A'B'C'$，有$\angle A=\angle A'$，$\angle B'=\angle B=\angle D$，$A'B'=AD$，$\therefore\triangle A'B'C'\cong\triangle ADE$．又，在$\triangle ABC$ 中，由于 $DE\parallel BC$，所以有 $AB:AD=AC:AE=BC:DE$ 或 $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$。再则，由$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$有两个角对应相等知，第三个角也对应相等，根据【定义】5，$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．

(2) 在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，设$\angle A=\angle A'$，$AB:A'B'=AC:A'C'$．在 AB 或其延长线上取 D 点使得 $AD=A'B'$，再过 D 点作$\angle ADE$ (E 在 AC 或其延长线上)，使之等于$\angle A'B'C'$，则$\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$．从而 $AB:AD=AC:AE$，$\therefore DE\parallel BC$，或说$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，亦即$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．

(3) 在 AB 或其延长线上取 D 使得 $AD=A'B'$，且作 $DE\parallel BC$，则有 $AB:AD=AC:AE=BC:DE$，然而又有 $AB:A'B'=AC:A'C'=BC:B'C'$，则由 $AD=A'B'$可得：$AC:A'C'=AC:AE$ 及 $BC:B'C'=BC:DE$，亦即 $A'C'=AE$、$B'C'=DE$．$\therefore\triangle ADE\cong A'B'C'$．再由$\triangle ADE$

$\backsim\triangle ABC$即得$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. □

【定理】10. 两个相似三角形的面积比等于其相似比的平方.

证明 如图14-48，今证$\triangle ABC:\triangle A'B'C'=AB^2:A'B'^2$.

先自对应顶点A，A'分别作两个三角形的高AH和$A'H'$，又因$\angle B=\angle B'$，所以有$\triangle ABH\backsim\triangle A'B'H'$，亦即$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}$. 然而又有

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$，

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AH}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'H'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AH}{A'H'}=$$

$$=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)\cdot\left(\frac{AB}{A'B'}\right)=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$ □

【定义】6. **位似形·位似中心** 若两个多边形之对应点的连线(或其延长线)全部交于同一点，且由该公共交点到各对对应顶点的距离之比都相等，则称此二图形为位似形，称这个公共交点为位似中心.

【定理】11. 两个位似多边形是相似的. 反之，二相似多边形经适当移动后，能成为位似形.

证明 设位似中心为O，两个多边形为$ABC\cdots K$和$A'B'C'\cdots K'$，于是有$OA:AO'=OB:OB'\cdots=OK:OK'$，因而$AB\,/\!/\,A'B'$，$BC\,/\!/\,B'C''\cdots$，由此可得对应角相等及$OA:OA'=AB:A'B'=BC:B'C'=$，所以多边形$ABC\cdots K\backsim$多边形$A'B'C'\cdots K'$，即它们相似.

反之，若多边形$ABC\cdots K\sim$多边形$A'B'C'\cdots K'$，设相似比为$m:n$. 任取一点O，再连接$OA,OB,OC,\cdots,OK$，并在其上(或其延长线上)分别取A''，B''，C''，$\cdots K''$，使得$OA:OA''=OB:OB''=\cdots OK:OK''=m:n$，则多边形$ABC\cdots K\backsim$多边形$A''B''C''\cdots K''$，因为多边形$ABC\cdots K\backsim$多边形$A'B'C'\cdots K'$

$\therefore$ 多边形$A''B''C''\cdots K''\backsim$多边形$A'B'C'\cdots K'$. 且因$AB:A'B'=m:n$、$AB:A''B''=m:n$，$\therefore A'B'=A''B''$，从而这两个多边形的相似比等于1故

多边形$A''B''C''\cdots K''\cong$多边形$A'B'C'\cdots K'$. 因此多边形$A'B'C'\cdots K'$经移动后可与

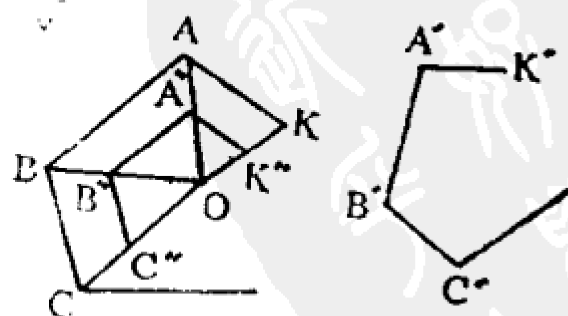


图14-50

多边形 $A''B''C''\cdots K''$ 重合，亦即可把相似多边形变成位似形。 □

§4. 有关圆的基本定理

4·1　圆的基本性质

【定义】1. 圆·圆周·半径·弦·直径　在一个平面上，与一个定点成等距离的一切点所形成的曲线叫做圆周。被圆周围成的平面部分叫做圆，该定点"叫做圆心，该"等距离"叫做半径。两端在圆周上的线段叫做弦。通过圆心的弦叫做直径。

【定理】1. 在等圆或同圆中，若弦的长度相等，则圆心到弦的距离也相等，弦愈长，距离愈小。

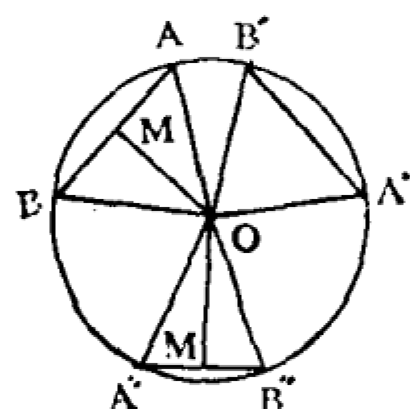


图 14-57

证明　如图14-51，弦 AB = 弦 $A'B'$，将其端点连结圆心 O，有 $\triangle AOB \cong \triangle A'OB'$，从而 AB 和 $A'B'$ 到圆心的距离相等。

又设弦 $AB >$ 弦 $A''B''$，于是对于 $AB, A''B''$ 的中点 M 和 M 有 $AM > A''M'$，由于 $\triangle AOB, \triangle A''OB''$ 是等腰三角形所以 $\angle AMO = \angle A''M'O = \angle R$，据勾股定理即得 $MO < M'O$. □

【定义】2 弧·优弧·劣弧·半圆·中心角　圆周上的两点把圆周分成两部分，分别叫这两部分为弧；较大的部分叫做优弧，较小的部分叫做劣弧，两部分相等者叫做半圆。弧的两端分别与中心连接而成的两条半径所夹的角，叫做该弧所对的圆心角；劣弧所对的圆心角小于 180°，优弧所对的圆心角大于 180°.

【定理】2. 在等圆或者同圆中，相等的圆心角所对的弧也相等，圆心角愈大，所对应的弧也愈长（逆定理也成立）.

证明　把一个圆心角移到另一个圆心角上，使一个边重合，然后作比较即可得证。

【定理】3. 在等圆或者同圆中，等长的弧所对的弦也相等。反之，若弦相等，则所对的弧也相等。

证明　据【定理】2 的逆定理，相等的弧具有相等的圆心角，再连接各弧的两个端点，所得的弦与相应圆心角构成的两个等腰三角形是全等的，从而证得该二弦相等。反之，由相等的弦，利用三角形的全等可得到相等的圆心角，再据【定理】2，即得到所对的弧相等。 □

【定理】4. 弦的垂直平分线也平分该弦所对的圆心角和弧.

证明　把弦的两端与圆心连接,得一等腰三角形.利用等腰三角形性质即可得证.

【定理】5. 不共线三点唯一地确定一个圆.

证明　设三点为 A、B、C,求出$\triangle ABC$ 的外心 O, O 是唯一确定的,从而以 O 为圆心 OA 为半径作圆,它必过 B、C,且是唯一的. □

【定义】3. 割线·切线·切点　对于一个圆和一条直线,当它们有两个公共点时,把它们叫做是相交的,这时,把该直线叫做该圆的割线;当它们有且仅有一个公共点时,把它们叫做是相切的,这时,把该直线叫做该圆的切线,而唯一的公共点叫做切点.

【定理】6. 设圆的半径为 r,圆心到某直线的距离为 d,则

(1)　$d>r$ 时,圆与直线不相交(即外离);

(2)　$d=r$ 时,圆与直线相切;

(3)　$d<r$ 时,圆与直线相交.

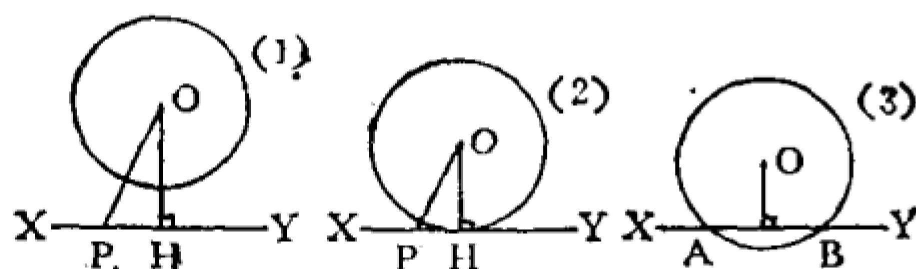


图 14-52

证明　如图 14-52,由圆心 O 向直线 xy 引垂线 OH,则 OH 的长即是定理中的d.

(1) 取 xy 上 H 点以外的任一点 P,则因$\angle OHx=\angle R$,有$OP>OH=d>r$.因此直线 xy 上的一切点都在圆外.从而 xy 与圆不相交.

(2) 仿(1),取 xy 上任一点 P 后,有 $OP>OH=d=r$.从而, xy 上 H 以外一切点都在圆外,仅有 H 点作为圆和直线的公共点,根据切线的定义,$x.$ 是圆 O 的切线.

(3) 因在 xy 上存在二点 A、B,使 $AH=BH=\sqrt{r^2-d^2}$,这时,由于 $OA^2=AH^2+OH^2$,$OB^2=BH^2+OH^2$即可得 $OA^2=OB^2=r^2$,亦即 $OA=OB=r$.因此 A、B 是圆周上的点,即 xy 与圆 O 是相交的. □

【系】1. 【定理】6 的逆定理亦真.

证明　用转换法即可得证. □

【系】2. 过圆周上一点作一条直线,若直线垂直于过此点的半径,则此直线

是圆的切线.

证明　据【系】1即可导出. □

【定义】4. (两圆的)**切点·内切·外切·交点·连心线**　若两个圆有且仅有一个公共点，则称它们是相切的，该公共点，叫做切点，同时，在相切的两圆中，若一个圆(相对地)在另一个圆的外部，则称它们是外切，若一个圆在另一个圆的内部，则称它们是内切.当两个圆有两个公共点时，叫做相交的，其公共点叫做交点.连接两个不同圆心的圆的圆心的直线叫做连心线.

两个圆的位置关系可以归于图14-53所示的五种类型.

(外离)(外切)(相交)(内切)(内含)



图 14-53

【定理】7. 二圆相切时，其切点必在连心线上.逆定理也真.

证明　用反证法，设连心线为OO'，切点为T，若T不在OO'上，设T关于OO'的对称点为T'这时有$OT=OT'$，$O'T=O'T'$，从而T'也是圆O和圆O'的公共点.这与定理条件矛盾，所以T一定在OO'上.逆定理证明略. □

【定理】8. 设两个圆的半径分别为r、r'，圆心间的距离为d，则有

(1)若两圆外离，则$d>r+r'$；

(2)若两圆外切，则$d=r+r'$；

(3)若两圆相交，则$r+r'>d>|r-r'|$；

(4)若两圆内切，则$d=|r-r'|$；

(5)若两圆内含，则$d<|r-r'|$.其逆定理也成立.

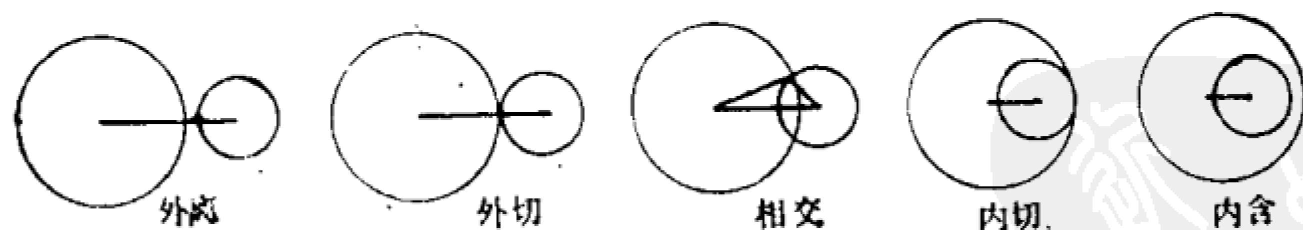


图 14-54

证明　如图14-54利用【定理】7即可得证.至于逆定理，可用转换法证明. □

【定义】5. 公切线·外(内)公切线　同时都与两个圆相切的直线叫做这两个

圆的公切线；在连心线同一侧的公切线叫做外公切线，否则，叫做内公切线，如图 14-55. 公切线上二切点间的距离叫做该公切线的长.

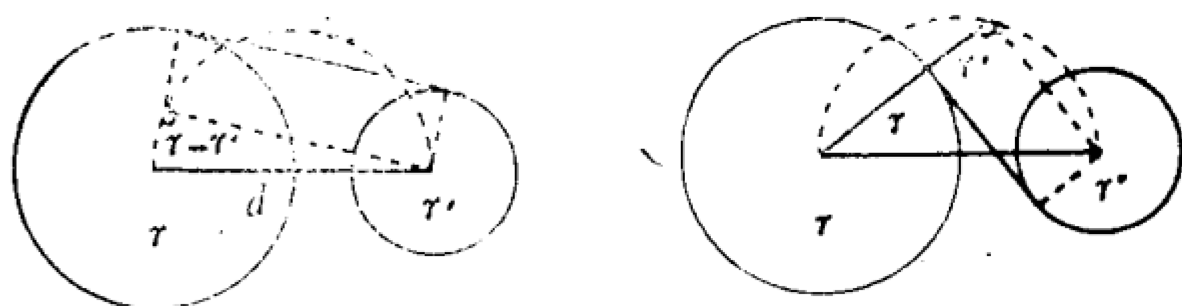


图 14-55

4·2　圆 周 角

【定义】6、圆周角　在圆周上有一个公共点的两条弦所成的角叫做圆周角. 弦 PA, PB 所成的圆周角 $\angle APB$，又叫做弧 AB(即 $\overparen{AB}$)所对的圆周角.

【定理】9. 同一弧所对的圆周角是圆心角的一半.

证明　设圆 O 的 $\overparen{AB}$ 所对应的圆周角为 $\angle APB$，下面只要对 P 点的不同位置分三种情况来讨论即可图(14—56).

(1) $\angle AOB=\angle OPB+\angle OBP=2\angle OPB=2\angle APB$.

(2) $\angle AOB=\angle AOC+\angle BOC$
$=(\angle APO+\angle PAO)+(\angle BPO+\angle PBO)$
$=2\angle APO+2\angle BPO=2\angle APB$.

(3) $\angle AOB=\angle BOC-\angle AOC$
$=(\angle CPB+\angle PBO)-(\angle CPPA+\angle PAO)$
$=2\angle CPB-2\angle CPA=2\angle APB$.　□

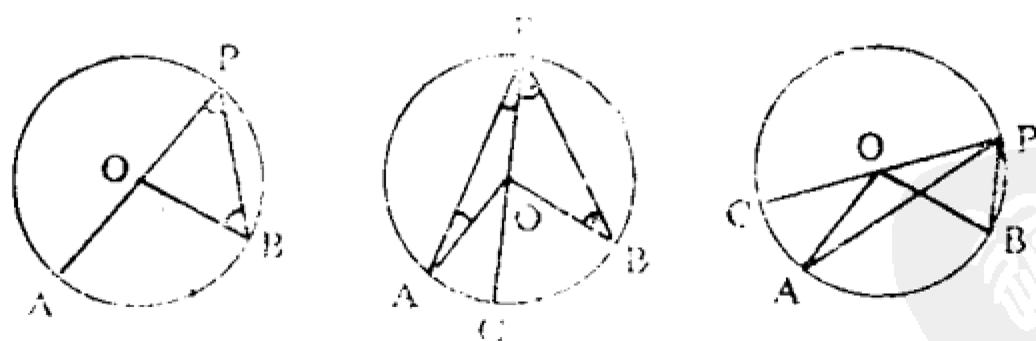


图 14-56

【系】1.　在等圆或同圆上，等弧(或同弧)所对的圆周角相等.

证明　由【定理】9 立刻得证.　□

【系】2. 半圆周上的圆周角是直角.

证明　注意到它的圆心角是平角(即 180°或 π 弧度)，由【定理】9即得。 □

【定义】7. 弓形、弓形角　某弧和它所对的弦围成的图形叫做弓形.由弧中任意一点连接弦的两端所成的角叫做弓形角.

【定理】10. 对于以 AB 为弦、以 α 为弓形的弓形，当点 P.

(1) 在弓形的弧上时，$\angle APB=\alpha$.

(2) 在弓形内部时，$\angle APB>\alpha$.

(3) 在直线 AB 和弓形的同侧且在弓形外部时，$\angle APB<\alpha$.

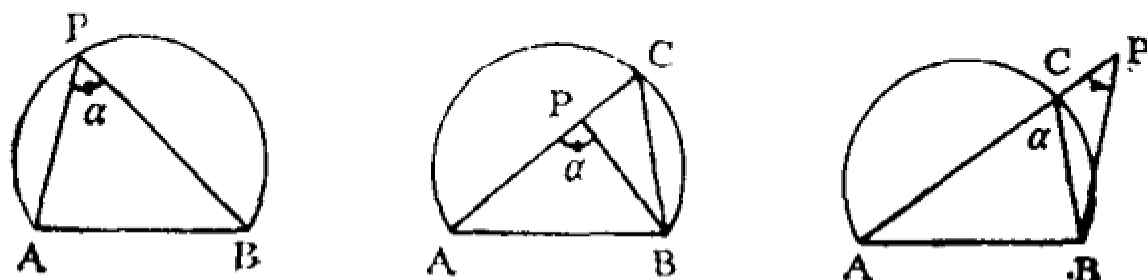


图 14-57

证明　分别按图 14-57，有

(1) 根据【定理】9 之【系】1，即得.

(2) 由 $\angle APB=\angle PBC+\alpha$，即得.

(3) 由 $\angle APB+\angle PBC=\alpha$，即得. □

【系】1. 【定理】10 的逆也真.(可以用转换法证明.)

【系】2. 取一线段 AB 及它同一侧的两点 C、D，使 $\angle ADB=\angle ACB$，则 A,B,C,D 共圆(即同在一个圆周上).(由【系】1 即可得证.)

【定义】8. 四边形的外接圆　当四边形的四个顶点同在一个圆周上时，叫它做圆的内接四边形，这个圆叫做该四边形的外接圆.

【定理】11. 圆的内接四边形，其对角互补.逆定理也真.

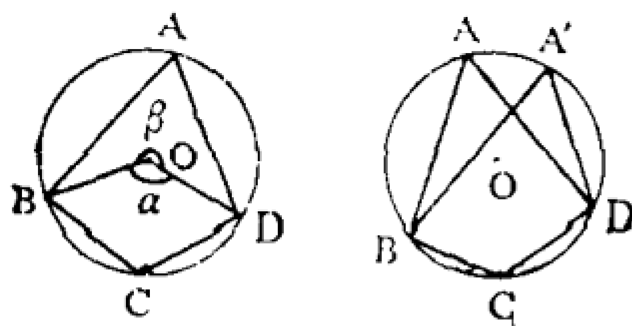


图 14-58

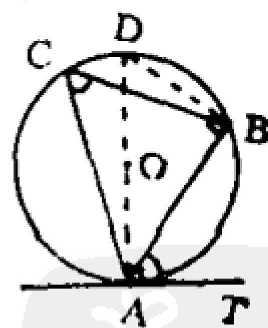


图 14-59

证明　如图14—58

$\because$　$\angle BAD=\frac{1}{2}\alpha$，$\angle BCD=\frac{1}{2}\beta$，$\alpha+\beta=4\angle R$，

$\therefore$　$\angle BAD+\angle BCD=2\angle R$.

反之，设$\angle A+\angle C=2\angle R$，作$\triangle BCD$的外接圆$O$，再在该圆除去$\overset{\frown}{BCD}$的那段圆弧上任取一点$A'$，则$\angle A'+\angle C=2\angle R$　$\therefore \angle A=\angle A'$，根据【定理】10【系】2，$A$在圆$O$上.　□

【系】　圆内接四边形的一个外角等于它的内对角.其逆也真.

证明　由四边形的对角互补即得.　□

【定理】12. 圆的弦与过弦一端点的切线所成的角，等于该角所夹的弧所对的圆周角.其逆也真.

证明　如图 14-59，作圆O，取弦AB及切线AT，则只要证明$\angle BAT=\angle ACB$即可.因为AT是切线，作过A点的直径，另一端记为D，则$\angle DAT=\angle R$.并且，由于AD是直径，所以$\angle DBA=\angle R$.

$\therefore\quad \angle DAB+\angle BAT=\angle DAB+\angle ADB(=\angle R)$

$\therefore\quad \angle BAT=\angle ADB=\angle ACB.$

反之，由$\angle BAT=\angle ACB\Rightarrow$(推出，下同)$\angle BAT=\angle ADB\Rightarrow\angle DAT=\angle R\Rightarrow\triangle ACB$的外接圆与$AT$相切于$A$点.　□

【定义】9. 四边形的内切圆　与四边形的四条边同时相切的圆叫四边形的内切圆.这个四边形叫做该圆的外切四边形.

【定理】13. 圆的外切四边形两组对边的和相等.其逆也真.

证明　过圆O外的一点P作圆的两条切线PA, PB，则$\triangle AOP\cong\triangle BOP$(两边和一直角对应相等)，$\therefore\ AP=BP$.用此结果于外切四边形$ABCD$，如图 14-60，设其切点为$P$、$Q$、$R$、$S$，则有$AP=AS, BP=BQ$，$CQ=CR$，$DR=DS$，从而$AB+CD=AD+BC$.

反之，当$AB+CD=AD+BC$时，作出三条直线AB, BC, AD围成的三角形ABE的内切圆，兹证这个圆必与DC相切.若不相切，则可以作平行于DC而与圆相切的直线$D'C'$，其中D', C'，分别在AE和BE上，如图 14-60，这时根据本定理前半部结论，有$AB+D'C'=AD'+BC'$，再根据关系$AB+CD=AD+BC$，有$CD=DD'+D'C'+C'C$，这在梯形$DD'C'C$中是不可能的.此矛盾证明了，此圆必与CD相切.

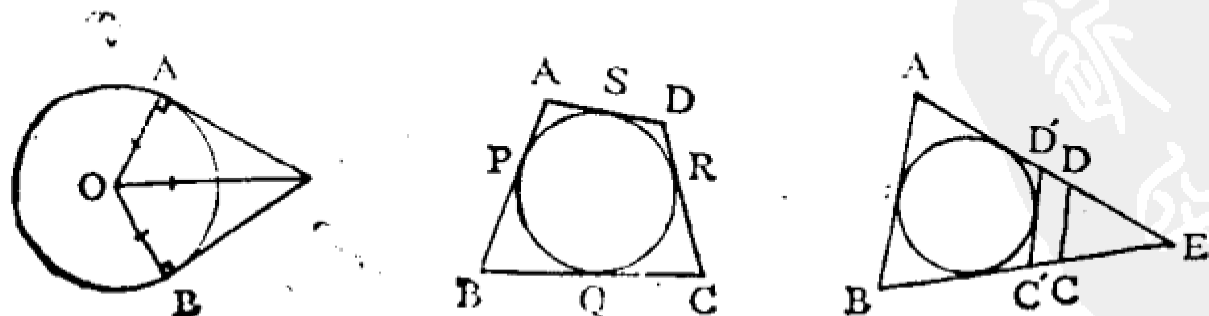


图 14-60

4·3　圆的比例

【定理】14.（圆幂定理） 设圆内二弦 AB，CD 或其延长线交于 P 点，则

$$PA\cdot PB=PC\cdot PD$$(图14-61).

证明 连接A、C和B、D，则对于$\triangle APC$和$\triangle BPD$有$\angle APC=\angle BPD$，$\angle PAC=\angle PDB$，$\therefore\triangle APC\backsim\triangle BPD$. $\therefore PA:PD=PC:PB$，$\therefore PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

【系】1. 若二线段 AB，CD 或其延长线交于 P 点，且满足 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆.

证明 由 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$ 得 $PA:PD=PC:PB$，且因$\angle APC=\angle BPD$ $\therefore\triangle APC\backsim\triangle BPD$，$\therefore\angle PAC=\angle PDB$，从而 A、B、C、D 四点共圆. □

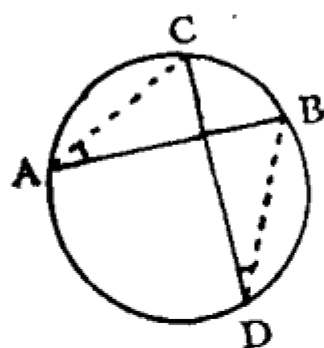
【系】2. 设圆 O 的半径为 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，若过 P 的直线与圆交于 A、B 两点，则必有

$$PA\cdot PB=|d^2-r^2|.$$

证明 作直线 PO，设其交圆 O 于 C、D 两点则根据【定理】14 即可得证. □

【定理】15. 设自圆外一点 P 作割线 PAB 及切线PT，与圆的交点为 A、B 切点为 T，则

$$PA\cdot PB=PT^2$$(图14-62).



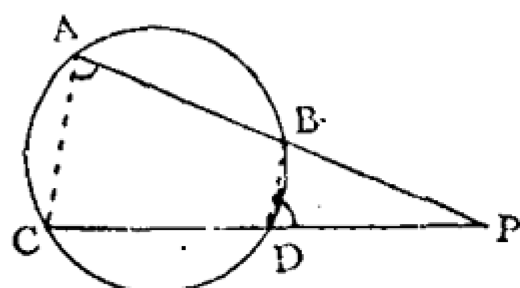


图 14-61

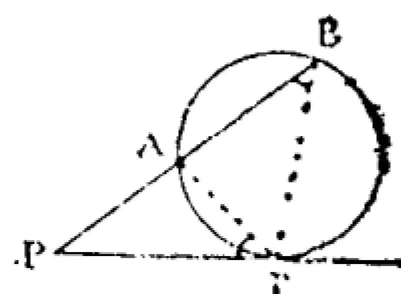


图 14-62

证明 连接T和A，T和B，则对于$\triangle PTA$和$\triangle PTB$，$\because\angle ATP=\angle PBT$(由【定理】12)，$\angle P$为公共角，$\therefore\triangle PTA\backsim\triangle PTB$，$\therefore PA:PT=PT:PB$. $\therefore$ $PA\cdot PB=PT^2$. □

【系】 过点 P 作两条射线 PA、PT. 若 $PT^2=PA\cdot PB$(B 是 PA 或其延长线上的一点)，则$\triangle TAB$ 的外接圆必切 PT 于 T 点.

证明 由 $PT^2=PA\cdot PB$，有 $PT:PA=PB:PT$，加之$\angle P$ 为公共角，$\therefore\triangle PTA\backsim\triangle PTB$，$\therefore\angle PTA=\angle PBT$. 从而根据【定理】12的逆定理，$PT$ 与过 A，T，B 的圆相切. □

§5. 轨　迹

5·1　轨迹的证明

【定义】1.轨迹　一个点在给定条件下运动时，它所描绘出来的图形就叫做该点在所给条件下的轨迹.

说明　这里给出的定义,与"几何学原本"中的定义有明显的不同.在那里.欧几里得把轨迹看作满足给定条件的点的集合，他没有引入变动的观点.其实，这一点还不只是表现在轨迹这一概念上，甚至在其各公理中，也没有运动的观点.可以说,在古代把静止的概念僵化到了可怕的地步.不过在当时,科学研究也只是探索静止不变的东西.直到笛卡尔引入了坐标概念以后,才在图形的研究中纳入了变数或函数的观点,从而，对图形的研究也才由一成不变的静止时代进入到了变化运动的新时代.这时,解析几何学应运而生.用解析几何研究轨迹是十分有效的.而且，就其所研究曲线的广泛性来讲,解析几何也是较全面的.在欧几里得时期研究的轨迹还仅限于圆和直线,而解析几何的方法则可用来研究更复杂的轨迹.这只要首先建立起坐标系，然后根据有关图形性质的定理,即可导出相应的轨迹.若把圆和直线作为基本轨迹来引用,则常见的轨迹问题便可利用它们来进行讨论.

在几何学中,所研究的问题可被分成证明问题和作图问题两大类.所谓"轨迹"的问题是可以归入证明问题这一类的.但是对于"…则轨迹是…"这类命题,由于结论是给出了的,不用说应该属于证明问题.而对于"…试求…的轨迹"的问题,结论却没有给出,因此首先需要自己作出结论,然后再加以证明,以论断自己作出的结论是正确的.也就是说,在这种情况下,作图和证明两方面都要用上.

5·2　基本轨迹

轨迹1. 与两个定点保持等距离的动点的轨迹是连接这两个定点的线段的垂直平分线.

证明　如图 14-63 取二定点为 A、B，设 P 是满足条件的动点，则 $PA=PB$ 因而$\triangle PAB$ 是等腰三角形.所以 P 在 AB 的垂直平分线上.因此，当 P在 $PA=PB$ 的条件下运动时,它就在AB 的垂直平分线上运动,因此 P 的运动轨迹是 AB 的垂直平分线.　□

轨迹2．求与二定直线xy，$x'y'$等距离的动点的轨迹．

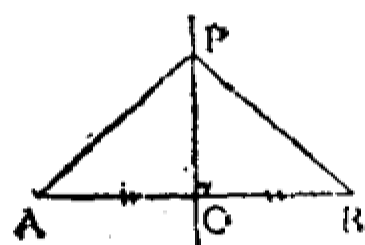


图 14-63

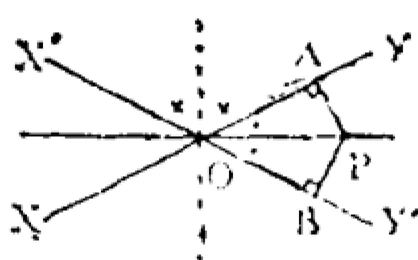


图 14-64

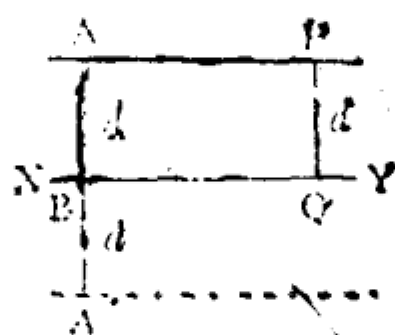


图 14-65

解　如图 14-64，设 P 是满足条件的点，则$\triangle PAO\cong\triangle PBO$（$\because PA=PB$，$\angle OAP=\angle OBP=\angle R$，$PO$为公共边），$\therefore\angle AOP=\angle BOP$．故当 P 在 $PA=PB$ 的条件下运动时，P 必始终在$\angle yOy'$的平分角线上．同理，若 P 是$\angle x'Ox$或$\angle x'Oy$，$\angle xOy'$内满足条件的点，它也必在所在角的平分角线上运动，因此所求的轨迹是二定直线构成的两对对顶角的两条平分角线．特别当$xy\parallel x'y'$时，所求的轨迹成为与此二直线等距离的平行线．

轨迹3．与定直线保持定距离 d 的动点的轨迹为到该直线距离为 d 的两条平行线．

证明　如图 14-65，设定直线为 xy，在xy的同侧取与 xy 的距离为 d 的动点 P 和定点 A，并由 P、A 向 xy 作垂线，令垂足为 Q、B，则 $AB=PQ=d$，$\angle B=\angle Q=\angle R$，$\therefore AB\parallel PQ$．从而 $ABQP$ 为长方形，$\therefore AP\parallel xy$，于是 P 在过定点 A 而平行于 xy 的直线运动．同理，在 xy 的另一侧，P 的轨迹也是平行于 xy 其距离为 d 的直线．　□

轨迹4．对二定点连线的视角为定角 α 的点 P 的轨迹，是以连接二定点的线段为公共弦的两个对称的含 α 角的弓形弧．

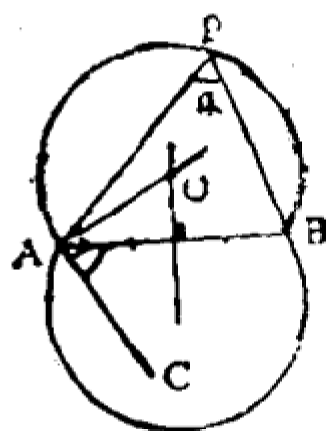


图 14-66

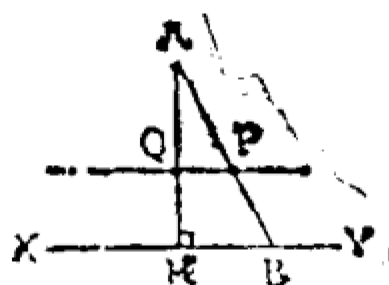


图 14-67

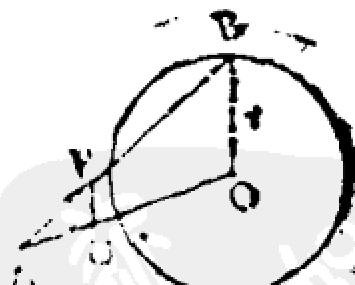


图 14-68

证明　如图 14-66，设 A、B 是二定点，P 是合乎条件的动点，则$\angle APB=\alpha$，再引 AC 使得$\angle BAC=\alpha$，于是 AC 必与$\triangle APB$ 的外接圆相切于 A 点，从而圆心 O 是过 A 而垂直于 AC 的直线与 AB 的垂直平分线的交点．

且有 $OP=OA$，因而 P 是在圆心为 O 半径为 OA 的圆弧上运动的。由于对称性，同样的结论在线段 AB 的两侧都成立，所以所求轨迹是以 AB 为公共弦的两个对称且含 α 角的弓形弧。 □

轨迹5. 试求把连接一个定点和定直线上任意点的线段内分成 $m:n$ 的动点的轨迹。

解 设定点为 A，定直线为 xy，如图 14-67，连接 A 与 xy 上的动点 B，在 AB 上取一点 P，使得 $AP:PB=m:n$，由 B 在 xy 上的任意性知，P 是满足条件的动点。又由 A 作 xy 的垂线 AH，在其上找出 Q 点使之满足 $AQ:QH=m:n$，则 Q 也是满足轨迹条件的一个定点，且因 $AQ:QH=AP:PB$，所以 $PQ\parallel HB$，即 P 是在平行于 xy 而过 Q 的直线上运动的，亦即所求的轨迹是过 Q 而平行于 xy 的直线。 □

轨迹6. 试求把连接定点和定圆上任意点的线段内分成 $m:n$ 的动点轨迹。

解 设定点为 A，定圆 O 的半径为 r，如图 14-68，连接 A 和圆周上的动点 B，并在 AB 上找出满足 $AP:PB=m:n$ 的点 P，则 P 是满足条件的任一点。又，连接 OA，在其上找出满足 $AQ:QO=m:n$ 的 Q，则 Q 为定点。

因 $AP:PB=AQ:QO=m:n$，$\therefore PQ:BO=m:m+n$，由 $BO=r$ 得 $PQ=\dfrac{m}{m+n}r$

是一定值。所以 P 的运动轨迹是以定点 Q 为圆心，以定长 $\dfrac{m}{m+n}r$ 为半径的圆周。 □

轨迹7. 试求到二定点 A、B 的距离之比 $m:n$ 之动点轨迹。(这个轨迹叫做阿波罗尼斯圆)

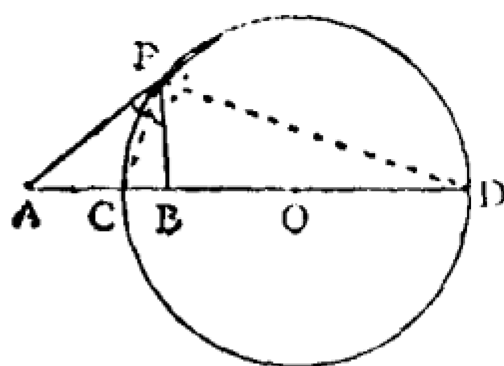


图14-69

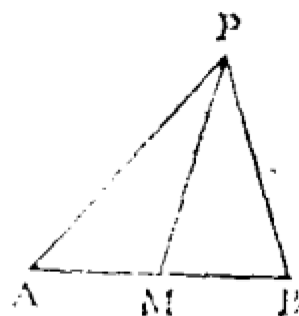


图14-70

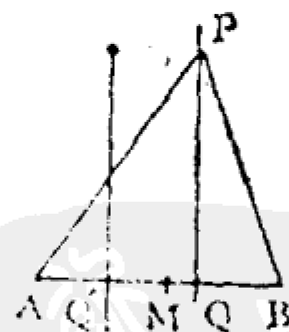


图14-71

解 如图 14-69，设 P 是满足条件的任一点，且设分线段 AB 成 $m:n$ 的内分和外分点为 C 和 D，则 C、D 是满足条件的两个特殊点。在 $\triangle PAB$ 中有 $PA:PB=AC:CB=AD:BD=m:n$，所以 PC 和 PD 分别是 $\angle APB$ 的内角和外角平分线，亦即 $\angle CPD=\angle R$。从而 P 在运动时与线段 CD 始终张成

直角,(当 P 运动到 CD 两端点时例外).所以 P 点的轨迹是连接把线段 AB 内分和外分成 $m:n$ 的两点作为直径的圆. □

【定义】2. 调和点列 · 调和分点　当直线上四点 A、C、B、D 满足关系 $AC:CB=AD:BD$ 时，把 A、C、B、D 叫做调和点列,把 C、D(或 A,B)叫做 A、B(或 C、D)的调和分点. 这时，若设 O 为 CD 的中点，则有 $OA\cdot OB=OD^2$.

轨迹8　试求到二定点 A,B 距离的平方和为定数 k^2 之点 P 的轨迹.

解　如图 14-70，对于△PAB，设 AB 的中点为 M，则据巴普士定理，有 $PA^2+PB^2=2(AM^2+PM^2)$.代以 $PA^2+PB^2=k^2$,即得 $PM^2=\frac{k^2-2AM^2}{2}$，其中 AM 是定长的，所以 PM 也是定长的，从而 P 点的轨迹是以 AB 的中点 M 为圆心，以定数 $\sqrt{\frac{k^2-2AM^2}{2}}$ 为半径的圆. □

轨迹9. 试求到二定点 A、B 距离的平方差为定数 k^2 之点 P 的轨迹.

解　如图 14-71，过 P 作 AB 的垂线,设垂足为 Q,且设 AB 的中点为 M，则

$$|AP^2-BP^2|=|(AQ^2+PQ^2)-(BQ^2+PQ^2)|=|AQ^2-BQ^2|$$
$$=2AB\cdot MQ=k^2,$$

∴　$MQ=\frac{k^2}{2AB}$ 其中 AB 是定长,Q 是定点.从而 P 的轨迹为过 AB 上与其中点 M 相距 $\frac{k}{2AB}$ 的两点 Q 和 Q'，且垂直于 AB 的两条平行直线. □

轨迹10. 对于定点 A 和在定直线 l 上移动的任意点 Q，试求 AQ 或其延长线上满足关系式 $AP\cdot AQ=k^2$ 之动点 P 的轨迹.

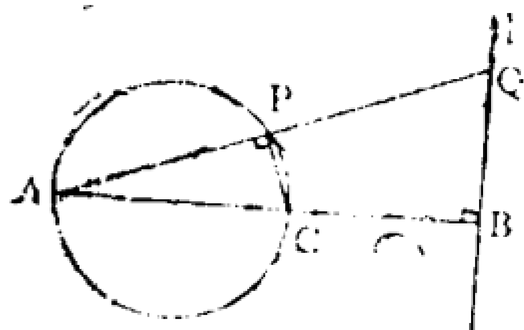


图 14-72



图 14-73

解　如图 14-72，从 A 向 l 引垂线，垂足为 B，在 AB 或其延长线上取满足 $AC\cdot AB=k^2$ 的点 C，它是满足条件的一个定点.则由 $AP\cdot AQ=AC\cdot$

$AB=k^2$，根据圆幂定理知，四边形 $PCBQ$ 内接于一个圆．且因$\angle B=\angle R$，故$\angle APC=\angle R$．从而 P 是使它与 A、C 两点的连线夹直角的动点，所以 P 的轨迹是以定线段 AC 为直径的圆．　□

轨迹11． 定点 A 和圆心为 O、半径为 r 的定圆上移动的点 Q，若 AQ 或其延长线上的一点 P 满足 $AP\cdot AQ=k^2$，试求点 P 的轨迹．

解　如图 14-73，设直线 AQ 与圆 O 的另一个交点为 Q'，根据圆幂定理有 $AQ\cdot AQ'=AO^2-r^2$，又根据 $AP\cdot AQ=k^2$ 故有 $AP:AQ'=k^2:(AO^2-r^2)$，AO 是定长，所以 $AP:AQ'$ 是定比．从而根据轨迹 6，P 点的轨迹是以 AO 的定比分点 O' 为圆心，$\dfrac{k^2}{AO^2-r^2}r$ 为半径的圆．

【定义】3．反形、反心、反率　把轨迹题 10、11 中点 P 的各轨迹叫做直线 l 和圆 O 的反形(或反象)，把定点 A 叫做反心(即反演中心)，k 叫做反率(或反演幂)．把一个图形变成它的反形的过程称为反转(或反演)．

在一个定理的证明很困难的情形，有时可先求出图形的反形，然后再作证明．有关反形的性质将在§6【定理】10 叙述．

轨迹12． 设有两个位置固定的线段 AB、CD 和动点 P，试求出使$\triangle PAB$ · $\triangle PCD$ 的面积之和为定值 S 的 P 点的轨迹．

解　如图 14-74 设 AB、CD 的交点为 O，若分别在 OB，OD 上取 Q，R 两点使得 $OQ=AB$，$OR=CD$，则

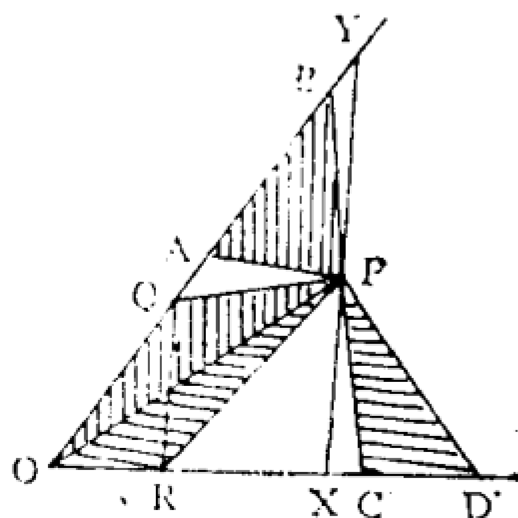


图 14-74

$$\triangle PAB=\triangle POQ,$$
$$\triangle PCD=\triangle POR,$$
$$\therefore\quad \triangle PAB+\triangle PCD=\triangle POQ+\triangle POR=S,$$

亦即$\triangle QOR+\triangle PQR=S$．又因$\angle QOR$ 是一定的，OQ 和 OR 分别等于 AB、CD 也是一定的，所以$\triangle QOR$ 的面积是一定的．又由$\triangle PQR=S-\triangle QOR$ 知，$\triangle PQR$ 的面积也是一定的，且 QR 也是一定的，所以 P 在与 QR 的距离为某个定值的平行线上移动，并且，设这条平行线与 OB、OD 或其延长线相交于 Y、X，则点 P 的轨迹就是线段 XY．(若 P 在 XY 的延长线上，则结论应为两三角形面积之差为定值 S．)

轨迹13． 分别以定点 O，O' 为圆心，各以 r，r' 为半径的两个不相含的定圆，从动点 P 分别向两圆作切线 PA、PB，试求满足 $PA=PB$ 的动点 P 的轨迹．(设 $r<r'$．)

解　如图14-75，∵ $\angle PAO=\angle PBO=\angle R$，∴ $PA^2=PO^2-AO^2$，$PB^2=PO'^2-BO'^2$．且因 $PA=PB$，∴ $PO'^2-PO^2=r'^2-r^2=$(定值)，由轨迹9，P点的轨迹为过 OO' 上定点 C 而垂直于 OO' 的直线．

【定义】4．根轴　把轨迹题13中 P 的轨迹叫做圆 O 和圆 O' 的根轴．

轨迹14．过定点 A 引与定圆O相交于 B、C 的直线，试求圆O在 B、C 处分别作圆O的切线其交点P的轨迹．

解　如图14-76，设PO与 AC 交于 M，则 $PM\perp AC$，$BM=MC$，

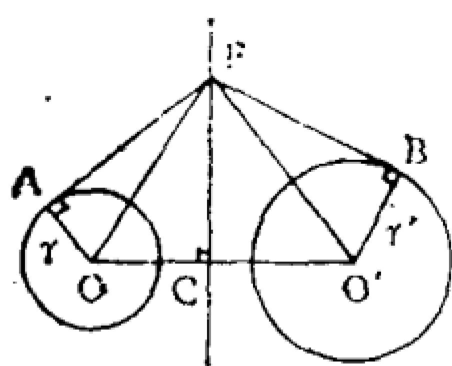


图 14-75

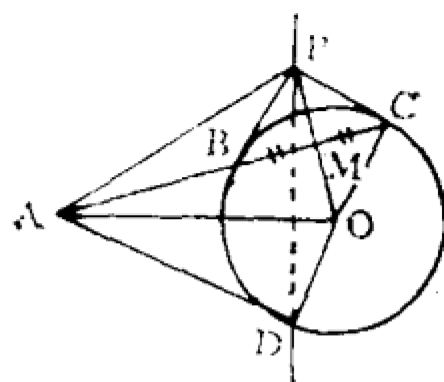


图 14-76

∴ $PA^2-PC^2=AM^2-MC^2=AB\cdot AC=AD^2$($AD$是切线)，又因 $PC^2=PO^2-OC^2$　∴ $PA^2-PO^2=AD^2-OC^2=AD^2-DO^2=$(定值)，因此P的轨迹是过切点 D 而垂直于 AO 的直线(圆内部分除外)．□

【定义】5．极点、极线　在轨迹题14中，把 A 叫做极点，把P的轨迹叫做极线．

§6．几个定理

6·1　利用近世几何学方法处理的几个定理

在本节的基本定理中，将遇到一些有名的定理及一些比较复杂的定理．对于这些定理，常常用近世几何学的方法来处理，会来得较简便，但是，在用到近世几何学的方法之前，需要先介绍一些有关的预备知识．比如，需要引入关于直线正负方向、点列、线束等概念，以及反形法，此外还将用到极点、极线、共轴圆等，但鉴于篇幅的限制，有些就只好割爱了．这里首先简略地叙述一下点列、线束和反形的概念．

【定义】1．点列、线束　把三个或者三个以上的共线点叫做点列．把三条或者三条以上的共点直线(交于同一点的直线)叫做线束．

【定义】2．非调和比、射影、切断、调和点列　若在同一直线上有 A、B、C；

D四点，这时把$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$叫做此点列的非调和比(也叫交比)并以符号$(ABCD)$表示．又设S是直线外的一点，自S分别连A、B、C、D，作成一个线束，这时把A、B、C、D分别叫做S沿着相应方向在同一直线上的**射影**，并把$(ABCD)$叫做线束$S(ABCD)$的非调和比．反之，任一直线若与线束$S(ABCD)$的每一条直线都相交，则所得交点形成新的点列，把这一事实叫做线束$S(ABCD)$的切断．特别地，当$(ABCD)=-1$时，把A、B、C、D叫做调和点列(参见§5的调和点列)．

【定理】1 $(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)$.

证明　由定义有$(ABCD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$，$(BADC)=\frac{BD\cdot AC}{AD\cdot BC}$，

$(CDAB)=\frac{CA\cdot DB}{DA\cdot CB}$，$(DCBA)=\frac{DB\cdot CA}{CB\cdot DA}$，显然它们相等．　□

【定理】2. 设$(ABCD)=\lambda$，则有$(ABDC)=\frac{1}{\lambda}$，$(ACBD)=1-\lambda$，$(ADBC)=\frac{1-\lambda}{\lambda}$.

证明　由$(ABDC)=\frac{AD\cdot BC}{BD\cdot AC}$及$(ABCD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=\lambda$，即得$(ABDC)=\frac{1}{\lambda}$和$(ACBD)=\frac{AB\cdot CD}{CB\cdot AD}=\frac{(AC-BC)(BD-BC)}{CB\cdot AD}=$

$=\frac{AC\cdot BD-BC(BD-BC+AC)}{CB\cdot AD}=\frac{AC\cdot BD}{CB\cdot AD}-\frac{BC\cdot AD}{CB\cdot AD}=-\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$

$+1=1-\lambda$、$(ADBC)=\frac{AB\cdot DC}{DB\cdot AC}=\frac{AB\cdot DC}{CB\cdot AD}\times\frac{AD\cdot CB}{AC\cdot DB}=-\frac{AB\cdot CD}{CB\cdot AD}\times$

$\frac{AD\cdot BC}{BD\cdot AC}=-(ACBD)\times(ABDC)=\frac{\lambda-1}{\lambda}$.　□

注意：$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)=\lambda$;

$(ABDC)=(BACD)=(DCAB)=(CDBA)=\frac{1}{\lambda}$;

$(ACBD)=(CADB)=(BDAC)=(DBCA)=1-\lambda$;

$(ACDB)=(CABD)=(DBAC)=(BDCA)=\frac{1}{1-\lambda}$;

$$(ADBC)=(DACB)=(BCAD)=(CBDA)=\frac{\lambda-1}{\lambda};$$

$$(ADCB)=(DABC)=(CBAD)=(BCDA)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

【定理】3. 设 S 是点列 $ABCD$ 所在直线外一点，过 C 作 SD 的平行线分别交 SB、SA 于点 H、G，则 $(ABCD)=GC:HC$。

证明 $(ABCD)=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}=\frac{AC}{AD}\cdot\frac{BD}{BC}$ 由 $GC\parallel SD$ 有 $\frac{AC}{AD}=\frac{GC}{SD}$，

$\frac{BD}{BC}=\frac{SD}{HC}$ ∴ $(ABCD)=\frac{GC}{SD}\cdot\frac{SD}{HC}=\frac{GC}{HC}=GC:HC$. □

【定理】4. 用两条直线切断，线束 $S(ABCD)$ 若所得交点分别为 A、B、C、D 和 A'、B'、C'、D'，则 $(ABCD)=(A'B'C'D')$，如图 14-78。

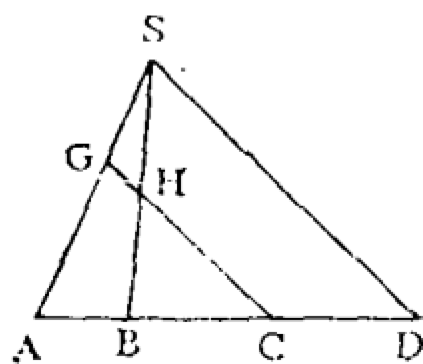


图 14-77

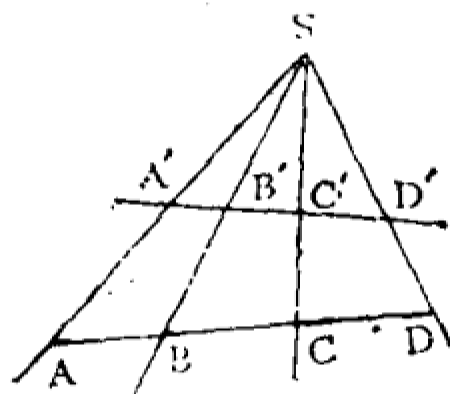


图 14-78

证明 根据【定理】3，$(ABCD)=GC:HC$.同理，对点列 A'、B'、C'、D' 过 C' 作 SD' 的平行线分别交 SA' SB' 于 G'、H'，则有 $(A'B'C'D')=G'C':H'C'$.由 $GC\parallel G'C'$， ∴ $GC:HC=G'C':H'C'$，从而 $(ABCD)=(A'B'C'D')$. □

【定理】5. 若两线束的对应直线的夹角分别相等，则其非调和比必相等.

证明 对于满足定理条件的任二线束，只要让对应顶点和一组对应直线重合，则两线束完全重合.

【定理】6. 对于满足 $(ABCD)=(A'B'C'D')$ 的两点列，若 AA'、BB'、CC' 交于一点 S，则连接 D、D' 的直线必过 S.

证明 如图 14-79，设 SD 与 $A'C'$ 交于 d 点，于是根据【定理】4 有 $(ABCD)=(A'B'C'd)$.但已知 $(ABCD)=(A'B'C'D')$，所以 d 与 D' 重合，从而直线 DD' 过 S 点. □

【定理】7. 具有相等非调和比的两个线束，如果有三组对应直线的交点在一条直线上，那么第四组对应直线的交点也在这条直线上.

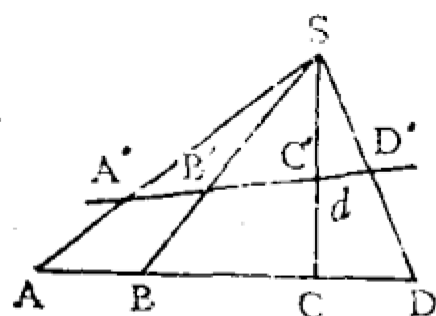


图 14-79

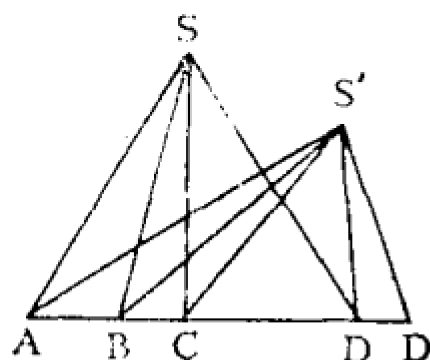


图 14-80

证明 如图 14-8，设两个线束(顶点分别为 S、S')的三组对应直线的交点 A、B、C 在同一直线上. 且设直线 ABC 与 S、S' 的第四条直线分别交于 D 和 D' 点. 则由定理条件 $S(ABCD)=S'(ABCD')$，有 $(ABCD)=(ABCD')$，从而 D 和 D' 是重合的，故 A、B、C、D 共线. □

【定理】8. 过圆周上的动点 S，分别连接同一圆周上的定点 A、B、C、D，所成线束 $S(ABCD)$ 的非调和比与 S 的位置无关，即为定值。

证明 如图 14-81，当 S 变动时，其线束各直线间的夹角将保持一定，根据【定理】5 知，$S(ABCD)$ 的非调和比为定值，即与S的位值无关。特别地，当 S 的新位置 S' 变动到与 B 点重合时，则视 $S'B$ 为圆在 B 点(亦即图中 S' 点)的切线. □

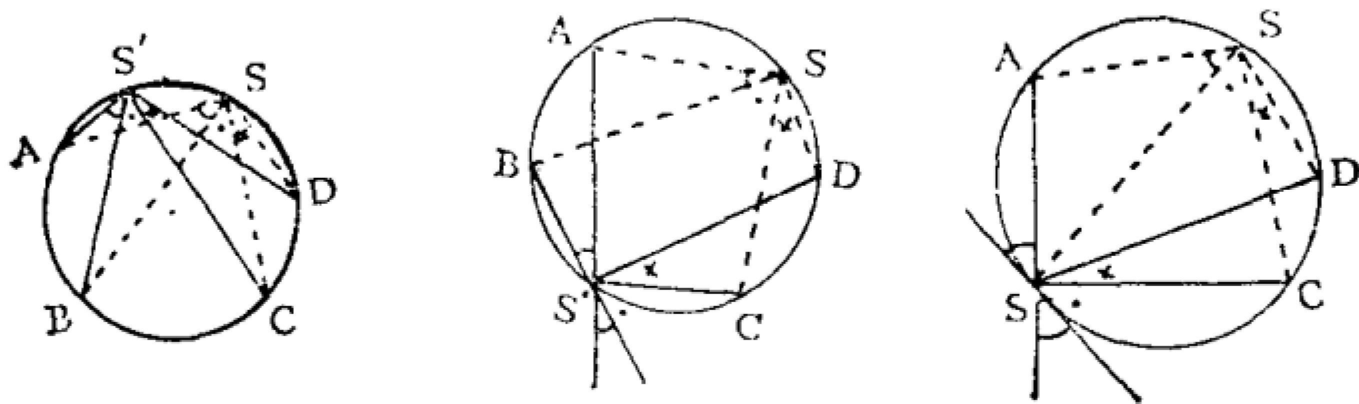


图 14-81

【定理】9. 同圆的四条固定切线用另一条任意的切线来截时，所得点到 S、R、Q、P 的非调和比与任意切线的位置无关，为一定值.

证明 如图 14-82，圆 O 的四条固定切线与另一条任意的切线分别交于 S、R、Q、P 四点。只设四条定切线之间的交点分别为 A、B、E、D，于是由 2【定义】13【系】2 知 O 是$\triangle SDR$ 的旁心，所以有

$$\angle SOR=\angle R-\frac{1}{2}\angle D.$$

o 也是$\triangle QRB$ 的旁心，所以

$$\angle QOR=\frac{1}{2}\angle QBR.$$

O 亦是$\triangle PEQ$ 的旁心，所以

$$\angle POQ=\frac{1}{2}\angle QEP.$$

图 14-82

这里$\angle D$, $\angle QBR$, $\angle QEP$ 是四条定切线之间相交而成的三个角，所以是一定的，从而线束 $O(SRQP)$ 各射线之间的夹角一定，亦即该线束的非调和比与SP的位置无关，即为一定值。从而$(SRQP)$为一定值。 □

【定义】13．两圆的交角 当两圆有交点 A 时，过 A 分别作两圆的切线间的夹角叫做该二圆的交角。

【定理】10． 设二圆 C、K 相交。若它们的反心为 A 反率为 K 的反形分别为 C'、K'，则 C'、K' 的交角与 C、K 的交角相等。

证明 如图 14-83 左，取 A 为反心，圆 O 的反形为 O'，O 圆周上的点 Q 与 O' 圆周上的点 P 对应，设 AQ 与圆 O 的另一交点为 Q'，则据轨迹 11 有 $PO' \parallel Q'O$.

$$\therefore\quad \angle APO'=\angle QQ'O=\angle OQQ'$$

图 14-83

从而，过 P 作圆 O' 的切线，过 Q 作圆 O 的切线，则它们分别与 AP、AQ 构成等角，但这两角的方位是相反的。从而如图 14-83 右，当两圆 C、K 的反形为 C'、K' 时，在对应交点 P、Q 处，对应切线T、T'分别与 AQ、AP 构成等角，另一组对应切线 t、t' 分别与 AQ' AP 也构成等角，故 t、T 所成的角与 t'、T'所成的角相等，从而 C、K 的交角与其反形 C'、K' 的交角相等。但角的方位是相反的。

【定义】4．对偶 若两个命题间具有下述对应关系之一，则叫它们为对偶命题：(点)$\Longleftrightarrow$(直线)，(共直线的点)$\Longleftrightarrow$(共点的直线)、(点列)$\Longleftrightarrow$(线

束)。即若把一个命题中的"点"(或"共直线的点"或"点列")换为"直线"(或"共点的直线"或"线束")即得到另一命题，则这两个命叫做对偶命题。比如【定理】6.【定理】7 就互为对偶。若对偶命题的一方为真，则另一方亦真。这只要在一方的证明中把某些概念换为与之相应的对偶概念即可。再则，关于对偶，除图形用语的置换外，还有射影⇌切断这样的手段上的置换，这是作为近世几何学的射影几何学的一大特征。

6·2 与三角形有关的定理

【定理】11.（塞瓦 Ceva 1648–1737 定理）在 $\triangle ABC$ 的各边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，若 AD、BE、CF 交于一点 O，则 $BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$。

证明 ∵ $BD:DC=\triangle AOB:\triangle AOC$；

$CE:EA=\triangle BOC:\triangle AOB$；

$AF:FB=\triangle AOC:\triangle BOC$；

∴ $BD\cdot CE\cdot AF:DC\cdot EA\cdot FB=1$，

∴ $BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$. □

【定理】12. 在 $\triangle ABC$ 的各边 BC、CA、AB 上分别取点 D、E、F，若 $BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$，则 AD、BE、CF 必交于一点。（【定理】11 的逆定理。）

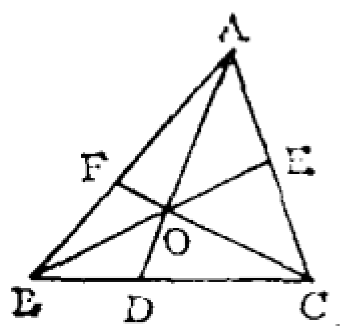


图 14-84

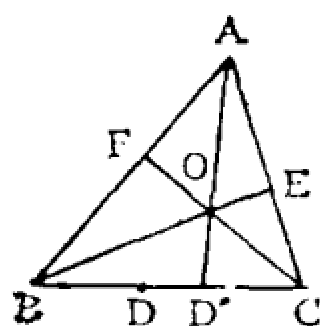


图 14-85

证明 如图 14-85，设 BE、CF 交于点 O，AO、BC 交于点 D'，则据前一定理，有 $BD'\cdot CE\cdot AF=D'C\cdot EA\cdot FB$，而已给出 $BD\cdot CE\cdot AF=DC\cdot EA\cdot FB$，所以有 $BD':D'C=BD:DC$，从而 D、D' 重合。 □

【定理】13.（梅涅劳(Menelaus)定理）若一条直线与 $\triangle ABC$ 的各边 BC、CA、AB 或其延长线分别交于 D、E、F，则 $BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$.

证明 ∵ $BD:CD=\triangle BFD:\triangle CFD$；

$CE:EA=\triangle CFD:\triangle AFD$;

$AF:FB=\triangle AFD:\triangle BED$;

∴　$BD\cdot CE\cdot AF:CD\cdot EA\cdot FB=1$,

∴　$BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$,($CD$ 与 DC 方向相反).　□

【定理】14. 在$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 或其延长线上分别取点 D、E、F 使得 $BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$, 则 D、E、F 必在同一直线上。(【定理】13 的逆定理).

证明　设 FE 与 BC 交于 D', 据前定理有

$$BD'\cdot CE\cdot AF=-D'C\cdot EA\cdot FB.$$

且知　$BD\cdot CE\cdot AF=-DC\cdot EA\cdot FB$, ∴　$BD':D'C=BD:DC$.

从而、D和 D' 是重合的。　□

【定理】15. (**西摩松(SimSon)定理**)$\triangle ABC$ 外接圆上一点 P 到三边或其延长线分别作垂线, 其垂足 L、M、N 必在同一直线上 (直线 LNM 叫做点 P 的西摩松直线).

证明　如图 14-87, 连接 PA、PB, 则$\angle PLB=\angle PNB=\angle R$,

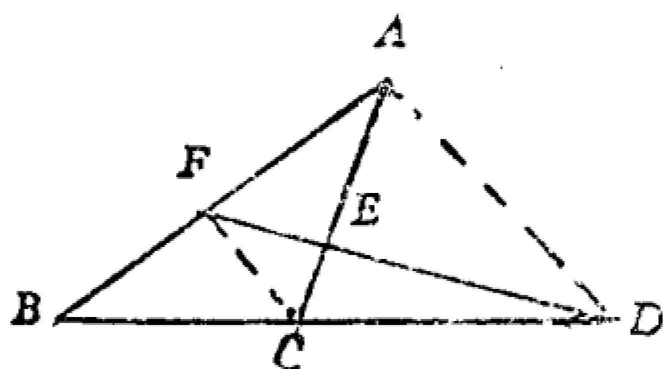


图 14-86

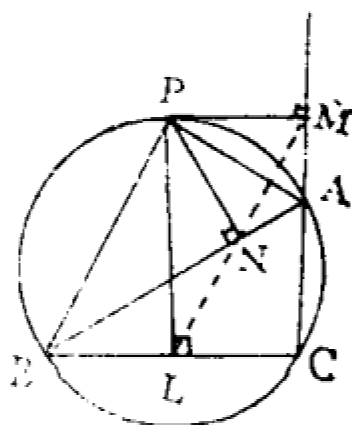


图 14-87

∴　□$PBLN$　共圆.

∴　$\angle PNL+\angle PBL=2\angle R$.

又∵$\angle PNA=\angle PMA=\angle R$,

∴　□$PNAM$　共圆.

∴　$\angle PAM=\angle PNM$,

又∵□$PBCA$ 也共圆, 所以有$\angle PBL=\angle PAM$.

∴　$\angle PNL+\angle PNM=2\angle R$.

∴　L、M、N 在同一直线上.　□

【定理】　16. 过圆 O 上一点 A 作弦 BC 的垂线, 设垂足为 D, 且与圆的另一交点为 E, 并在 DA 上取 DH 等于 DE, 则 H 是$\triangle ABC$ 的垂心. 又, 自圆心 O 向 BC 作垂线, 设垂足为 M, 则 $2OM=AH$.

证明　如图 14-88，∵$HD=DE$，且 $BD\perp HE$，∴　$\angle HBD=\angle EBD$。又∵$\angle B=\angle C$。若连 BH 并延长后与 AC 相交于 F 点，则有

$$\angle FBC+\angle C=\angle EBD+\angle E=\angle R,$$

因此 $BF\perp AC$。从而，H 是$\triangle ABC$ 的垂心。

又自 O 向 AE 作垂线，若垂足为 N，则 $AN=NE$，∴有 $AN+NH=NH+NE=2ND=2OM$。 □

【定理】17．自$\triangle ABC$ 的外接圆上一点 P 引 BC 的垂线 PL 交圆于另一点 P'，则 AP' 是平行于 P 点的西摩松直线。

证明　如图 14-89　∵$\angle PBN=\angle PLN$(□$PBLN$ 存在外接圆)，又∵$\angle PBA=\angle PP'A$，

∴　$\angle PLN=\angle PP'A$，　即$LM\parallel AP'$。 □

【定理】18．设$\triangle ABC$ 的垂心为 H，则 P 的西摩松直线二等分 PH。

证明　如图 14-90，设 P 点的西摩松直线交 HA 的延长线于 Q，则

$$QA\parallel LP',$$

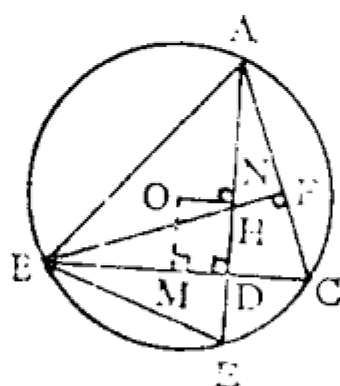


图 14-88

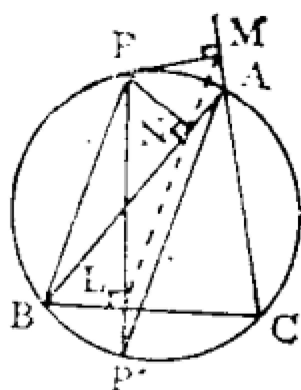


图 14-89

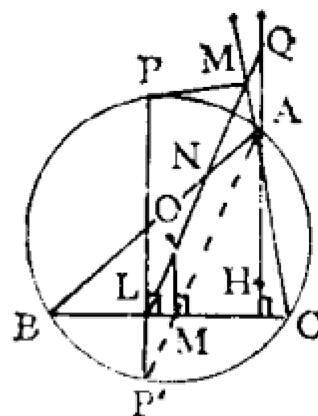


图 14-90

且根据前一定理，有 $QL\parallel AP'$，从而 $QLP'A$ 是平行四边形，∴　$QA=LP'$。

又根据【定理】16，$PL=2OM+LP'$；且 ∵ $QH=QA+AH=LP'+2OM$，

∴ $PL=QH$，且 $PL\parallel QH$，因此 $PLHQ$ 是平行四边形。从而 LQ 与 PH 互为平分。 □

【定理】19．设$\triangle ABC$ 的内心为 I，$\angle A$ 的旁心(即$\angle A$ 的平分线与$\angle B$、$\angle C$ 相邻外角的平分线的交点）为 I'，且设内切圆在边 BC、CA、AB上的切点分别为 X、Y、Z，以 I' 为圆心的旁切圆分别切 BC、CA、AB于X_1、Y_1、Z_1，又取 $BC=a$，$CA=b$、$AB=c$ 及 $2S=a+b+c$，则$AZ=YA=s-a$，$ZB=BX=s-b$，$XC=CY=s-c$，$AZ_1=Y_1A=S$，$Z_1B=BX_1=s-c$，X_1C

$=CY_1=s-b$。

证明　如图 14-91，$\because Az=YA$，$zB=BX$，$XC=CY$，$\therefore Az+BX+XC=s$，$\therefore Az=s-a$。

又　$\because$　$Az_1=AB+BX_1$，$Y_1A=X_1C+CA$ 及 $Az_1=Y_1A$，

$\therefore$　$Az_1+Y_1A=AB+BC+CA=2S$ 及 $Az_1=Y_1A=S$。

余下的结论就不难导出了。　□

【定理】20．设$\triangle ABC$ 的外接圆和$\angle A$ 的平分线交于 P 点，则$PB=PI=PI'$.(图 14-91)。

证明　$\because$　BI、BI'分别是$\angle B$ 的内角和外角平分线，$\therefore \angle IBI'=\angle R$。

又 $\because \angle IBP=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle BIP=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A$，$\therefore \angle IBP=\angle BIP$，从而 P 是直角$\Delta IBI'$ 的斜边 II'的中点，

$\therefore$　$PB=PI=PI'$。　□

【定理】21．设$\triangle ABC$ 的内切圆半径为r，$\angle A,\angle B,\angle C$ 内的旁切圆半径分别为 $\bar{r}_1$、$\bar{r}_2$、r_3，则$\triangle ABC$ 的面积$S=rs=r_1(S-a)=\bar{r}_2(s-b)=\bar{r}_3(s-c)$（见图 14-91）。

证明　$\because\triangle BCI+\triangle CAI+\triangle ABI=S$，$\therefore \frac{\bar{r}a+\bar{r}b+\bar{r}c}{2}=S$，$\therefore S=\bar{r}s$。

又 $\because \triangle ABI'+\triangle CAI'-\triangle BCI'=S$，$\therefore \frac{\bar{r}_1c+\bar{r}_1b-\bar{r}_1a}{2}=S$，$\therefore S=\bar{r}_1(s-a)$。　□

【定理】22．设$\triangle ABC$ 的外接圆的半径为R，则$R=\frac{abc}{4s}$.

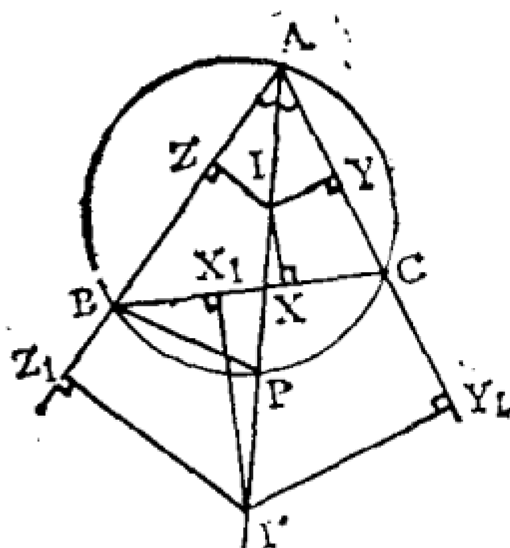


图 14-91

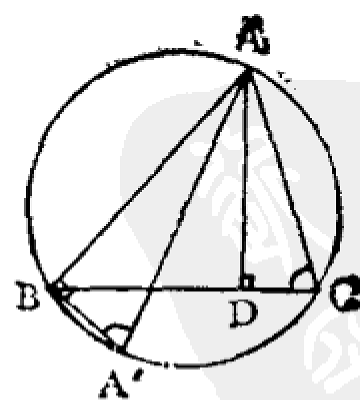


图 14-92

证明　如图 14-92，过 A 作BC 的垂线，垂足为 D。设过 A 的直径之另一

端点为 A'. 则$\triangle ABA' \backsim \triangle ADC$ ($\because \angle ABA' = \angle ADC = \angle R \quad \angle A' = \angle C$)。

$\because$ $AB:AD = AA':AC$，从而 $AB \cdot AC = AD \cdot AA'$，亦即
$cb = AD \cdot 2R$，$\because AD \cdot a = 2s$，

$\therefore$ $R = \dfrac{abc}{4s}$。 □

【定理】23. 设$\triangle ABC$中$\angle A$的平分线与BC交于D点，则 $AD = \dfrac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$。

证明 如图 14-93，设 AD 的延长线交$\triangle ABC$的外接圆于E点，则$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$($\because \angle E = \angle C$，$\angle BAE = \angle DAC$)。

$\therefore$ $AB:AE = AD:AC$，即 $AB \cdot AC = AD \cdot AE$。

又 $\because$ $AD \cdot AE = AD\ (AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$ 及 $AD \cdot DE = BD \cdot DC$，

这里 $BD:DC = AB:AC$，于是有

$$BD = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c},$$

$$\therefore \quad bc = AD^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

$$AD^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2},$$

$$AD = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}.$$ □

【定理】24. 设$\triangle ABC$的外心为O，垂心为H，边 BC、CA、AB 的中点分别为A'、B'、C'，且设$\triangle A'B'C'$的外心为N，则O、N、H在一条直线上，且$ON = NH$。

证明 如图 14-94，设 AH 的中点为 L，于是 $AC' = C'B$，从而 $C'L \parallel BH$

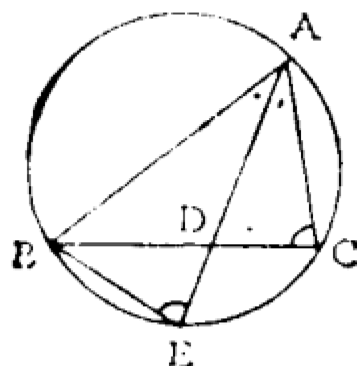


图 14-93

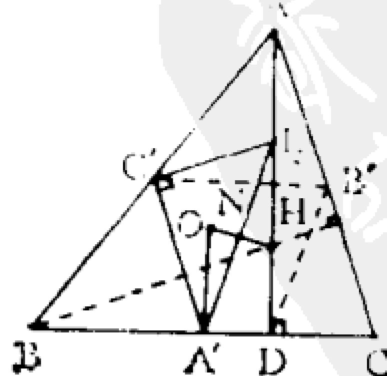


图 14-94

且由已知，有 $A'C' \parallel AC$ 及 $BH \perp AC$，

$\therefore$ $C'L \perp A'C'$，即 $\angle A'C'L = \angle R$。

又根据【定理】16，$OA' = LH$。再由 $OA' \parallel LH$ 知，$OA'HL$ 是平行四边形。设其对角线的交点为 N。由 $A'N = NL$ 知，C' 在以 N 为圆心、以 A' 为半径的圆周上。同理，B' 也在以 N 为圆心、以 $A'N$ 为半径的圆周上。从而，N 是 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆的圆心，且是 OH 的中点。 □

【定理】25. 【定理】24 中 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆必过由 A 向 BC 所引垂线的垂足 D。

证明 由【定理】24 的证明知道，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆心 N 是直角三角形 $L_1A'D$ 的斜边中点，所以 $A'N = ND$，从而该圆过点 D。 □

【定理】26. 设 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点分别为 A'、B'、C'，又设分别自 A、B、C 向其对边 BC、CA、AB 所作垂线的垂足为 D、E、F，且垂心为 H，AH、BH、CH 的中点分别为 L、M、K，则这九个点在同一圆周上，且这个圆的圆心为 OH 的中点 N，半径等于 $\triangle ABC$ 外接圆半径的一半。

证明 根据【定理】24，L、M、K 在 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆上，又根据【定理】25，D、E、F 也在 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆周上，故 A'、B'、C'、L、M、K、D、E、F 九点共圆，又因 AL 平行且等于 OA'，故 $AOA'L$ 是平行四边形。

$\therefore$ $OA = A'L = 2NA'$。

从而，$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径等于 $\triangle ABC$ 外接圆半径的一半。 □

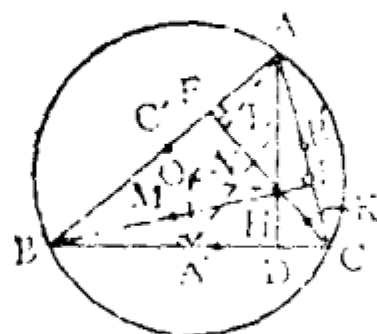


图 14-95

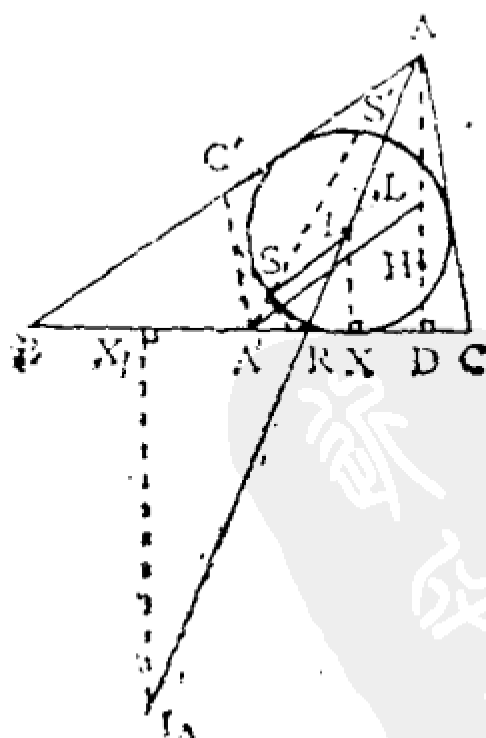


图14-96

【定义】5. 九点圆 通过【定理】26 中九个点的圆叫做三角形的九点圆、

【定理】27.（费尔巴哈定理 1822 年） 九点圆必与三角形的内切圆及三个旁切圆相切。

证明 如图 14-96，设$\triangle ABC$的内切圆切 BC 于 X 点，垂心为 H，内心、旁心分别为 I、I_A，又，旁切圆切 BC 于 X_1 点，BC 中点为 A'，AH、AI 与BC 的交点分别为 D、R．AH 的中点为 L．则过 L、A'、D 的圆是九点圆．并且由于 BI、BI_A 各是$\angle B$的内、外角平分线，所以 $AI:IR=AI_A:I_AR$，$AD\parallel IX\parallel I_AX_1$，于是 $DX:XR=DX_1:X_1R$，这里记 $X_1A'=A'X=X$，$A'=y$，$A'R=z$，则有

$$(y-x):(x-z)=(y+x):(x+z),$$

由此，$x^2=yz$， $\therefore\ A'X^2=A'R\cdot A'D$.

这时，把内切圆和九点圆以 A' 为反心；$A'X$ 为反率作反演，则内切圆不变，而九点圆，由于是对它自身圆周上的点 A' 作反转，所以据轨迹 10，过 R 而垂直于九点圆的直径 $A'L$ 的直线即是该九点圆的反形．

$$\text{而}\angle A'LD=\angle A'C'D=\angle BC'D-\angle BC'A'=2\angle BAD-\angle BAC$$
$$=2(\angle R-\angle B)-\angle A=\angle C-\angle B.$$

又过 R 引内切圆的切线，切点为 S，则$\angle SIR=\angle RIX$ 且

$2\angle RAD=2(\angle RAC-\angle DAC)=\angle A-2(\angle R-\angle C)=\angle C-\angle B$.

然而$\angle RIX=\angle RAD$，$\therefore 2\angle RIX=\angle A'LD$．亦即$\angle SIX=\angle A'LD$，由 $IX\parallel LD$ 得 $SI\parallel A'L$.

又 $\because$ $SI\perp SR$ $\therefore$ $SR\perp A'L$.

从而 SR 是九点圆的反形，内接圆的反形还是内切圆，它与九点圆的反形 SR 相切于 S，于是根据【定理】10，这个内切圆与九点圆切于 S'．至于旁切圆的结论，同理可证． □

6·3 与多边形有关的定理

【定理】28.（**卜拉美古他**（Brahmagupta）**定理**）当圆的内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相正交时，连接 AB 的中点 M 与对角线的交点 P 间的直线必垂直于 AB 的对边 CD.

证明 如图14-97延长MP交 DC 边于N．因$\triangle ABP$ 是直角三角形，M是斜边中点，$\therefore AM=MB=MP$，$\angle MBP=\angle MPB=\angle DPN$ 又因$\angle BAP=\angle BDC$，$\angle BAP+\angle ABP=\angle R$， $\therefore\angle BDC+\angle DPN=\angle R$． 亦即 $PN\perp DC$.

□

【定理】29.（**托勒米** Ptolemy **定理**）设圆内接四边形为$ABCD$．则$AB\cdot CD+$

$AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

证明 如图 14-98,在AC上取一点E,使得$\angle EBC=\angle ABD$,于是$\triangle ABD\backsim\triangle EBC$($\because \angle EBC=\angle ABD,\angle ECB=\angle ADB$),

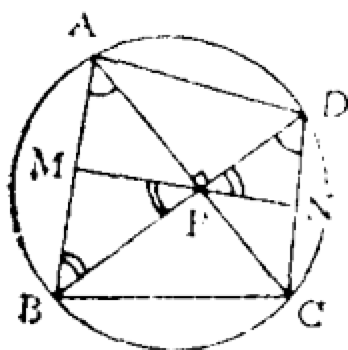


图 14-97

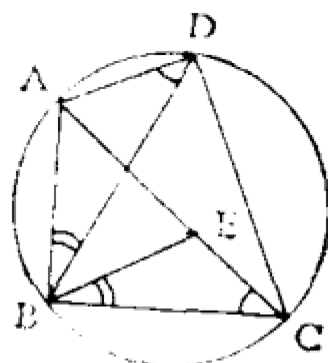


图 14-98

$\therefore\quad BD:BC=AD:EC\Rightarrow BC\cdot AD=BD\cdot EC$. ①

又因$\triangle ABE\backsim\triangle DBC$($\angle ABE=\angle DBC,\angle BAE=\angle BDC$),

$\therefore\quad AB:BD=AE:DC\Rightarrow AB\cdot DC=BD\cdot AE$. ②

①+②即得 $AB\cdot DC+BC\cdot AD=BD(EC+AE)=BD\cdot AC$. □

【定理】30.(托勒米定理的逆定理)在四边形$ABCD$中,若$AB\cdot CD+DA\cdot BC=AC\cdot BD$,则该四边形内接于一个圆.

证明 如图 14-99,在四边形$ABCD$内引线段BE使$\angle ABD=\angle EBC$,且$AB:BD=BE:BC$,则不难知道$\triangle ABE\backsim\triangle DBC$.因此有$AB:BD=AE:CD\Rightarrow AB\cdot CD=BD\cdot AE$

再根据$\triangle ABD\backsim\triangle EBC$,有$DA:EC=BD:BC\Rightarrow DA\cdot BC=BD\cdot EC$ ②

由①、②有 $AB\cdot CD+DA\cdot BC=(AE+EC)\cdot BD$.

又由题设知 $AB\cdot CD+DA\cdot BC=BD\cdot AC$, $\therefore AC=AE+EC$.故E是AC的点,从而$\angle ADB=\angle BCE=\angle BCA$.

$\therefore$ 四边形$ABCD$内接于圆.

【定理】31.(牛顿(Newton)定理)设四边形$ABCD$外切于圆O,且设对角线BD、AC之中点分别为M、N,则M、N、O共线.

证明 如图 14—100,圆O的外切四边形为$ABCD$,由§4【定理】13知.AB

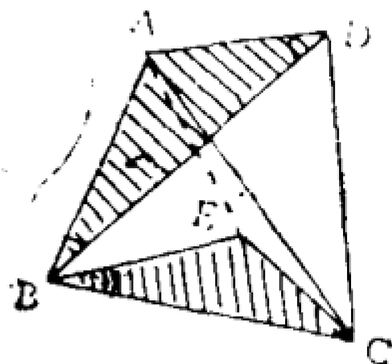


图14-99

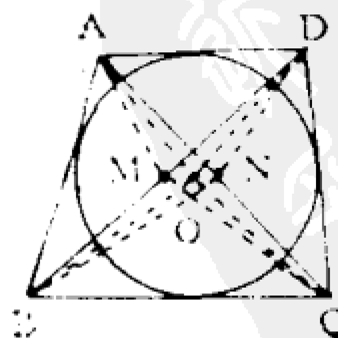


图14-100

$+CD=DA+BC$，且以圆 O 的半径为高的 $\triangle ABO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$、$\triangle BCO$ 面积之和等于 $\square ABCD$ 的面积. 因此 $\triangle ABO+\triangle CDO=\frac{1}{2}\square ABCD$.

$\because\ BM=MD,\ \therefore\ \triangle ABM+\triangle CDM=\frac{1}{2}\square ABCD$

又$\because\ AN=NC,\ \therefore\ \triangle ABN+\triangle CDN=\frac{1}{2}\square ABCD$.

取 AB, CD 为二定线段，由轨迹12易知，满足 $\triangle ABP+\triangle CDP=\frac{1}{2}\square ABCD$ 的点 P 的轨迹在 AB、CD 所夹角内的一条直线上，因而 M、N、O 必在此轨迹上. 而其轨迹是一条直线，所以 M、N、O 共线. □

【定理】32.（姆尔古(Mourgue)定理） 在外切于圆 O 的四边形 $ABCD$ 中，必有 $AD\cdot AB:CD\cdot CB=AO^2:CO^2$；$DA\cdot DC:BA\cdot BC=DO^2:BO^2$.

证明 如图14－101，首先，在 $\triangle PQR$ 与 $\triangle P'Q'R'$ 中，设 $\angle P=P'$ 或 $\angle P+\angle P'=2\angle R$。且自 Q、Q' 向对边分别作垂线 QS 和 $Q'S'$，则根据 $\triangle PQS\backsim\triangle P'QS'$ 有 $Q'S:Q'S'=PQ:P'Q'$，

$\therefore\ \triangle PQR:\triangle P'Q'R'$
$=PR\cdot QS:P'R'\cdot Q'S'$
$=PR\cdot PQ:P'R'\cdot P'Q'$。

而在四边形 $ABCD$ 中，因 $\angle AOD+\angle BOC=2\angle R$，故有

$\triangle AOD:\triangle BOC=AO\cdot DO:BO\cdot CO$。

但因 $\triangle AOD:\triangle BOC=AD:BC$，

$\therefore\ AD:BC=AO\cdot DO:BO\cdot CO$。 ①

同理有 $AB:CD=AO\cdot BO:CO\cdot DO$。 ②

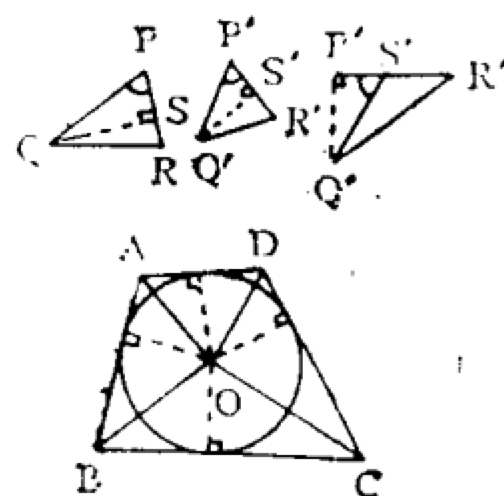


图14－101

由①×②即得 $AD\cdot AB:CD\cdot CB=AO^2:CO^2$。

作完全平行的叙述，又可得 $DA\cdot DC:BA\cdot BC=DO^2:BO^2$ □

【定义】 6.

完全四边形

没有三条直线共点的四条直线具有六个交点，此四条直线所成的图形叫做完全四边形。四条直线叫做边。六个交点叫做顶点。不在同一边上的两个顶点叫做对顶点。

完全四角形

没有三点共线的四个点连接成六条直线，此六条直线构成的图形叫做完全四角形。这四点叫做顶点，连接这些点的六条直线叫做边，不过同一顶点的两边叫做对边。由三对对边分别相交连接

三对对顶点的三条直线叫做对角线这三条对角线所形成的三角形叫做完全四边形的对角线三角形。如图14—102，四条边表成实线，三条对角线表成虚线，六个顶点表成黑点，PQO是对角线三角形。

而成的三个交点叫做对角点。连接对角点所成的三角形叫做完全四角形的对角点三角形。如图14—103，四个点表成黑点，对角点表成空心圆点，六条边表成实线，虚线 p.q.o 表对角点所成三角形的边。

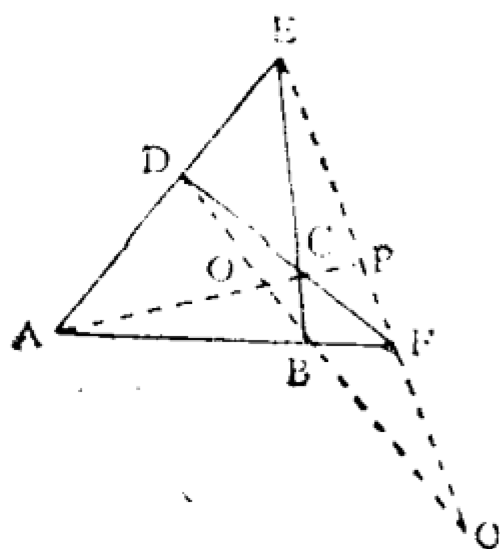


图 14-102

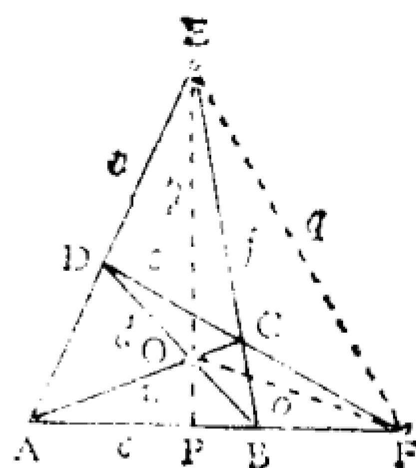


图14-103

[定理] 33.

在完全四边形中，两个对顶点与对角线三角形的两个顶点（与这两个对顶点共线）构成调和点列。

证明　如图 14－102 在△AFE 中，由于 AP，FD，EB 过同一点 C 根据〔定理〕11，

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FP}{PE}\cdot\frac{ED}{DA}=1. \quad ①$$

若看成△AFE 被直线 DBQ 所截，根据(定理)13，有

$$\frac{AB}{BF}\cdot\frac{FQ}{QE}\cdot\frac{ED}{DA}=-1. \quad ②$$

由①，②；$\frac{FP}{EP}:\frac{FQ}{EQ}=-1$

∴ $(FEPQ)=-1$，即 F、E、P，Q 成调和点列。至于取其它顶点的情形，同理可证。 □

在完全四角形中，两条对边与对角点三角形的二边构成调和线束。

证明　如图 14－103，直线 EO 交 AB 于P，若看成a、e、f 三边作成的△EAB 被直线 C 所截，则根据〔定理〕13有

$$\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CE}=-1 \quad ①$$

且△EAB 中，b、d、p同时交于O点。于是根据(定理)11，有

$$\frac{ED}{DA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BC}{CE}=1. \quad ②$$

由①，②得 $\frac{AP}{BP}:\frac{AF}{BF}=-1$。

∴ $(ABPF)=-1$，即 $E(ABPF)=-1$。亦即 a、f、p、q 四直线构成调和线束，至于取其它边的情形，同理可证。 □

【定理】34．连接完全四边形的对顶点所得的三条对角线的中点共线。

证明　如图 14-104，$ABECFD$ 是完全四边形，我们来证明 AC，BD，EF，的中点共线，

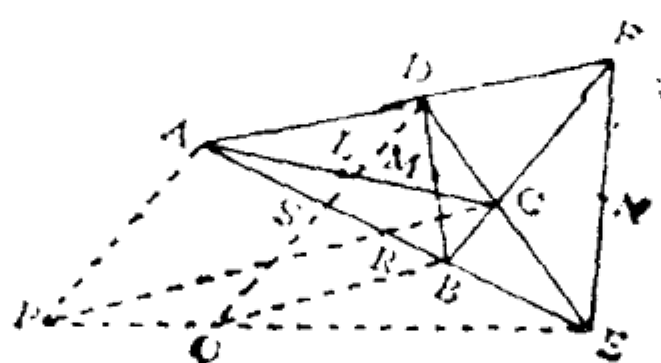


图14—104

取P，Q使得$AFCP$和$DFBQ$分别都是平行四边形。且记PC与AB的交点为R，DQ与AB的交点为S。

于是有 $\frac{EB}{BS}=\frac{EC}{CD}=\frac{ER}{RA}$（$\because CB\parallel DS$，$CR\parallel AD$），

$\therefore$ $\frac{EB}{ER}=\frac{BS}{RA}=\frac{BQ}{RP}$（$\because \Delta BSQ\backsim\Delta RAP$），

从而P、Q、E在同一直线上。因此FP、FQ、FE之中点L、M、N共线，又由于LM、分别是平行四边形$AFCP$和$DFBQ$的对角线的交点，所以分别是AC、BD的中点。由此，完全四边形的三条对角线AC、BD、EF的中点L、M、N共线。

[定理]35.

（巴斯卡pascal定理 1623—1662）

圆为内接六边形三组对边的交点共线。

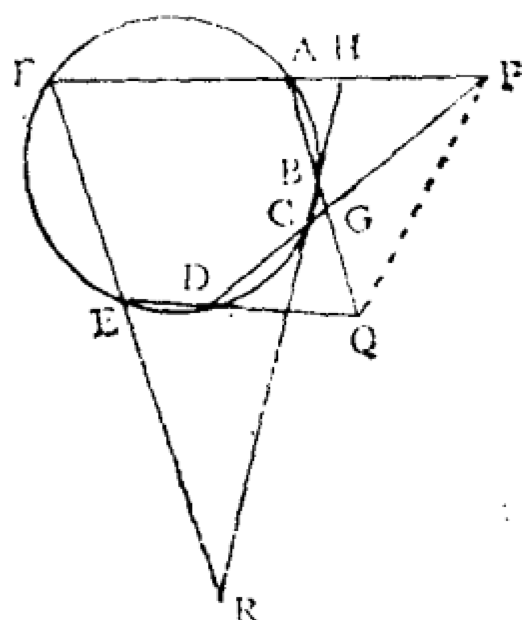


图 14-105

证明 如图14—105，$ABCDEF$是圆的内接六边形，记FA与DC的交点为P．AB与ED的交点为Q，BC与EF的交点为R，且记AB与DC的交点为G，FA与CB的交点为H·则$P(ABCQ)$

$=(ABGQ)$（用AQ去截）

$=D(ABCE)$（自D引射线）

$=F(AB、CE)$（根据〔定理〕8

（白里安求(Blrianchon)定理，1821年发表）对于圆的外切六边形，连接三组对顶点的直线必共点。

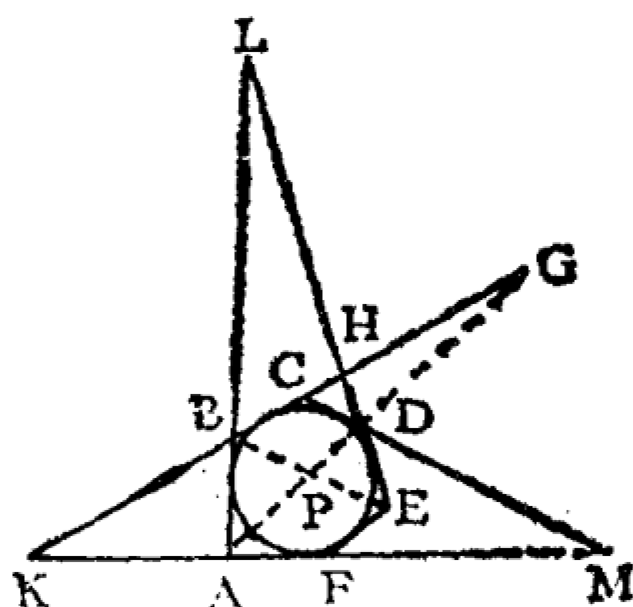


图 14-106

证明 如图14—106，$ABCDEF$是圆的外切六边形对角线AD、BE交于P、且BC与AD、ED、FA分别交于G、H、K、又，AB与ED交于L，AF与CD交于M，则有(APDG)=B(APDG)

=(LEDH)(用LE去截)

=(AFMK)(据〔定理〕9)

=C(AFDG)

$=(HBCR)=P(ABCR)$

$\therefore\ P(ABCQ)=P(ABCR)$.从而，PQ与PR重合，因此P,Q,R共线。

$\therefore\ B(APDG)=C(AFDG)$.

从而，BP与CF的交点在AG上，因此CF过P点.

注意 在上面两个定理中，把圆改为一般二次曲线，结论也成立。

【定理】36.（巴普士定理）对于一条直线上的三点 A、B、C 与另一条直线上的三点 D、E、F.三个四边形 $ADEB$、$BEFC$、$ADFC$ 的对角线的交点 R、P、Q 共线.

证明 （若把这里的两条直线看成特殊的圆，即得巴斯卡定理的特殊情形.）

如图14-107，AC、DF 交于 M，EA，FB 交于 K，AF、BD 交于 L.则 $(FQLA)=D(FQLA)=(MCBA)$（用 AM 截线束），且 $(FPBK)=E(FPBK)=(MCBA)$（用 AM 截线束），$\therefore (FQLA)=(FPBK)$. 连接这两个点列的对应点 B、L 及 K、A 所成的直线交于 R. F是公共点，故据【定理】6，另两个对应点 P、Q 的连线必过 R. □

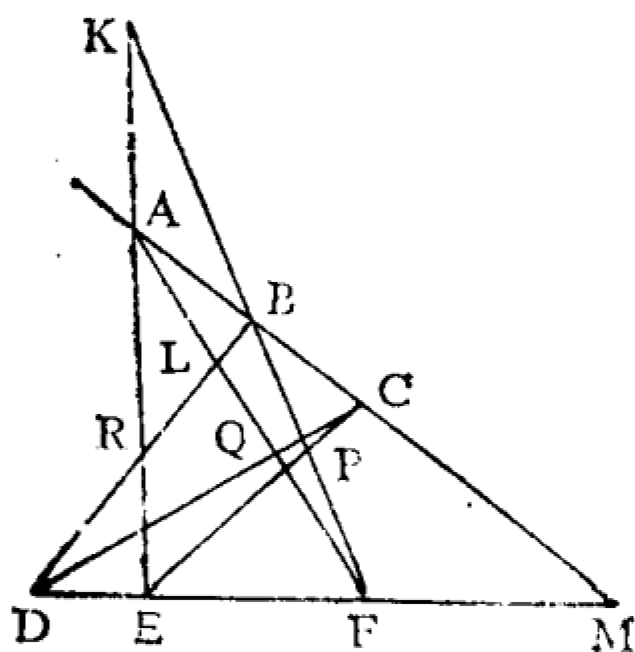


图 14-107

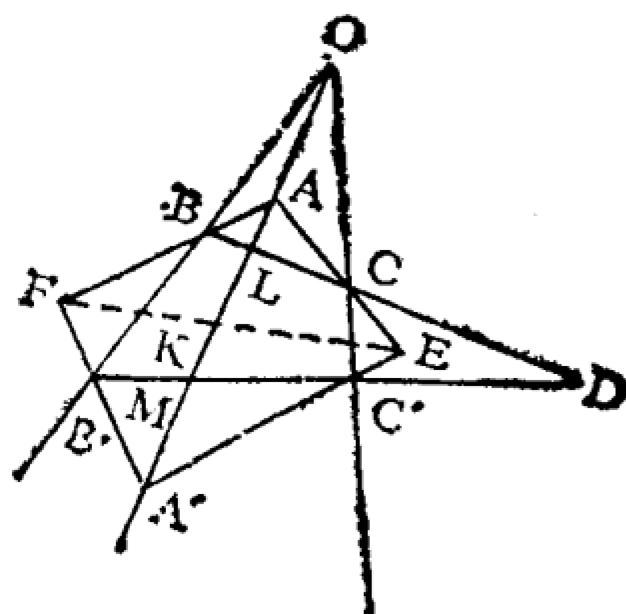


图 14-108

【定理】37.（笛沙格定理）

在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，若AA'，BB'，CC'共点，则三组对应边$(AB, A'B')$、$(BC, B'C')$、$(CA, C'A')$的交点 F、D、E 必共线.（逆定理也成立）

证明 如图 14-108，设 AA'、BB'、CC'的交点为 O，且设 AA'与 BC、EF、$B'C'$的交点分别为 L、K、M.

则有 $A(FKED)=(BLCD)$（线束被 BD 所截）

$=O(BLCD)=(B'MC'D)$（线束被 $B'D$ 所截）

$=A'(FKED)$(由 A' 向点列引射线),

$\therefore\quad A(FKED)=A'(FKED)$.

这时，三组直线$(AF,A'F)$、$(AK,A'K)$、$(AE,A'E)$各自的交点F、K、E在同一条直线上，故$(AD,A'D)$的交点D也在该直线上.

逆定理也可用同样的方法证明. □

【定理】38. 一条直线(或折线)能一笔画完的充分必要条件是：在这条曲线(或折线)的全部交叉点处，都具有偶数条分枝；若存在具有奇数条分枝的交叉点.则这样的点只能有两个.

证明 设交叉点都具偶数条分枝.这时，若画笔自交叉点X出发后不起笔又回到了X，则在X点处显然有偶数条分枝,且所有其它交叉点处也具有偶数条分枝；若从X出发后，终止于另一点y，则X和y两点必具有奇数条分枝，而其它的途中交叉点都具有偶数条分枝.（这时只要连接X、y两点即得到全部交叉点都具有偶数条分枝的图形.）故充分性得证.现在证必要性.首先，对于交叉点都具有偶数条分枝的情形，设X是交叉点，则存在由X经过y再回到X的路经.设这个路经为r_1，且设r_1尚未“完全通过”(即还有分枝未通过)的交叉点中与X最近的点为A(A也可以就是X).因A具有偶数条分枝,所以存在自A出发而又回到A的道路r_2.于是：由X出发可一笔画地经r_1、r_2而回到X.其次，设r_1+r_2尚未“完全通过”的交叉点中，与X最近的点为B,B具有偶数条分枝，所以存在自B出发后又回到B的道路r_3.于是，由X出发可一笔画地经r_1、r_2、r_3、后回到X.再则，设$r_1+r_2+r_3$尚未“完全通过”的交叉点中与X最近的点为C，由于C具有偶数条分枝,所以存在自C出发而又回到C的道路r_4.如此下去可得，由X出发一笔画地经r_1、r_2、r_3,…且过全部交叉点而回到X.

其次，对于有两个具有奇数条分枝的交叉点的情形，只要把这两点取为X、y,即可用上述方法同样证明.

（这类问题一般认为是拓扑学的发源性问题.）

§7. 作 图 题

7·1 作图题的解法

在几何学中，有关定理和轨迹的问题叫证明问题.作符合事先给定条件的图形的问题叫作图问题.但实际上，若不首先掌握定理和轨迹，就难以解决作图问题.在作图中,我们能够使用的工具和手段只能是：

1．用直尺通过两定点作直线；

2．用圆规以某定点为圆心、定长为半经作圆(或弧)．

所谓不能三等分一个任意角，是指只用圆规和直尺这两种工具和相应手段三等分任意角的不可能性．

要完全解决一个作图问题，必须具有分析、作图、证明和讨论等四个步骤．分析是解决作图题的开端，也是解决作图问题的关健．在这一步，要求找出所作图形与所给条件间的关系，从而明确要解决该问题应采用那种方法：作图时即根据已知条件和已确定的方法，按一定的作图顺序作出所要求的图形来．且在作图过程中还应该讲出每一步作图的理由．对所作的图形，需要用已知的定理从理论上证明它的正确性，这就是第三步要作的工作．由于作图过程中某些线(直线、圆弧)的不交、交于一点或交于多点，往往决定了该作图题的无解、唯一解或多解，故在作图完成后尚需作细致地论讨．

7·2　基本作图题

这里所要叙述的作图题，是其它所有作图问题的基础，但因为它们较简单，所以我们只用图示说明作图的方法，而略去分析，作图、证明、讨论等过程的叙述．

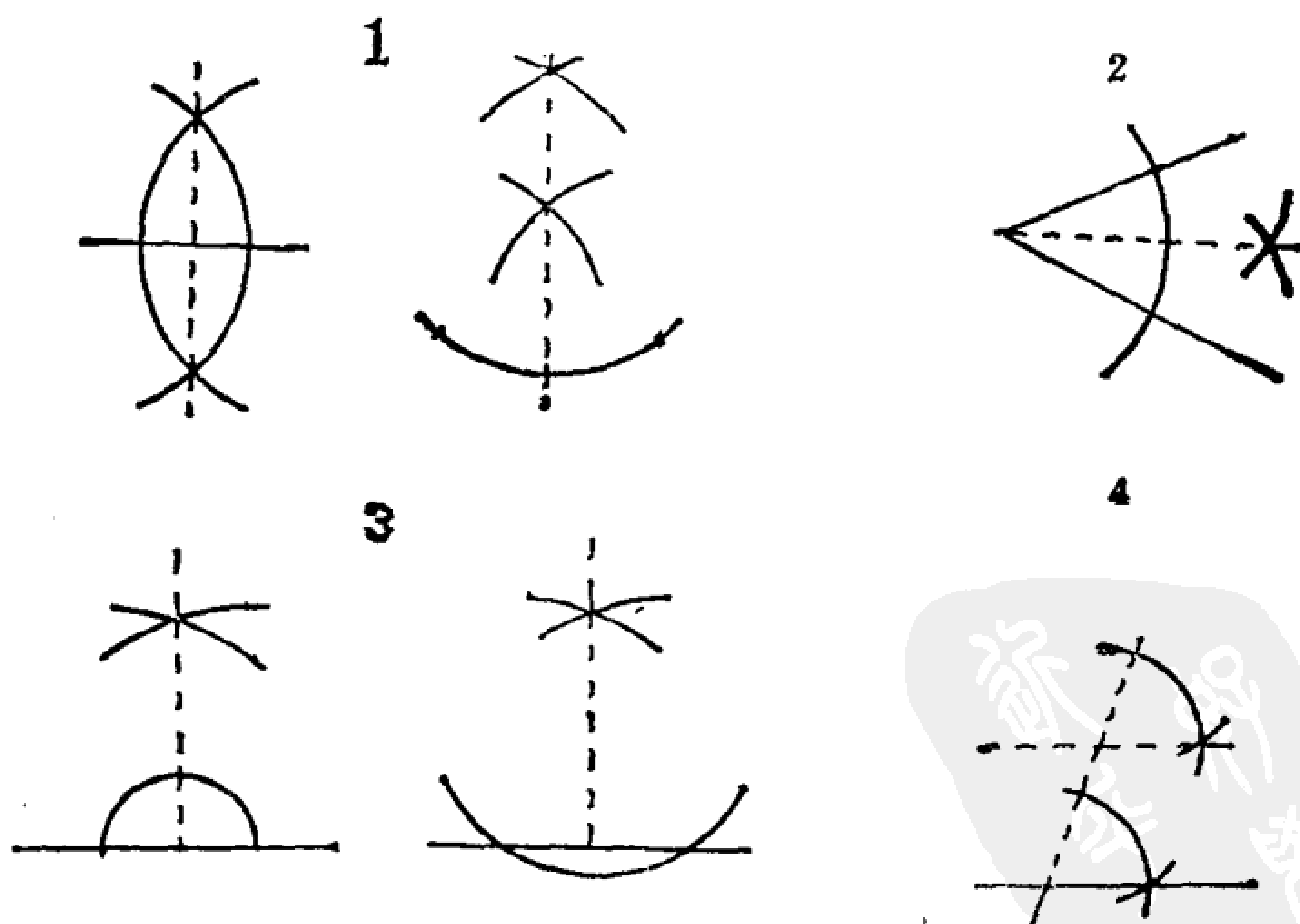


图14-109

1．求线段和弧的中点及求线段的垂直平分线(图14-109，1)．

2. 求角平分线(图14-109,2).

3. 由直线上的已知点引该直线的垂线，或由直线外一点，引该直线的垂线(图14-109,3).

4. 过直线外一点，引该直线的平行线(图14-109,4).

5. 已知三边作三角形；已知两边及其夹角(边角边)作三角形；已知一边及夹此边的两角(角边角)作三角形，(图形省略.实际上，只要移动所给的边和角即可，但有时按给出的条件.却不能作出三角形.)

6. 过不共线三点作圆(只要求出三角形的外心即可，图略).

7. 把给定的线段等分成若干分，(用作平行线的方法，见图14-110,7.)

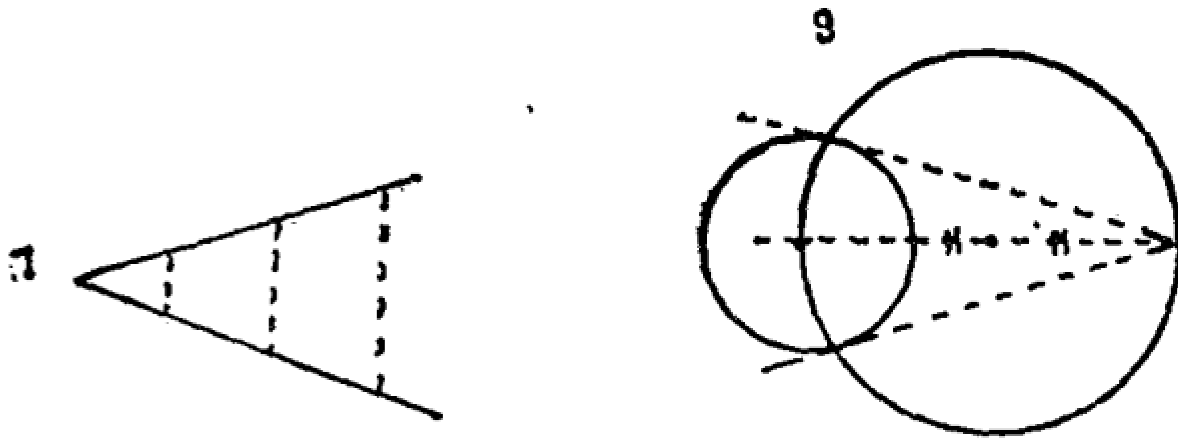


图14-110

8. 过圆周上一点作圆的切线(可仿3作图).

9. 过圆外一点作圆的切线(以连接该点和圆心的线段为直径作圆，(图14-110, 9).

10. 作已知三角形的内切圆和傍切圆(根据2，引角平分线，从而求出内心、傍心即可(图略)).

11. 作二圆的公切线(圆14-111,11).

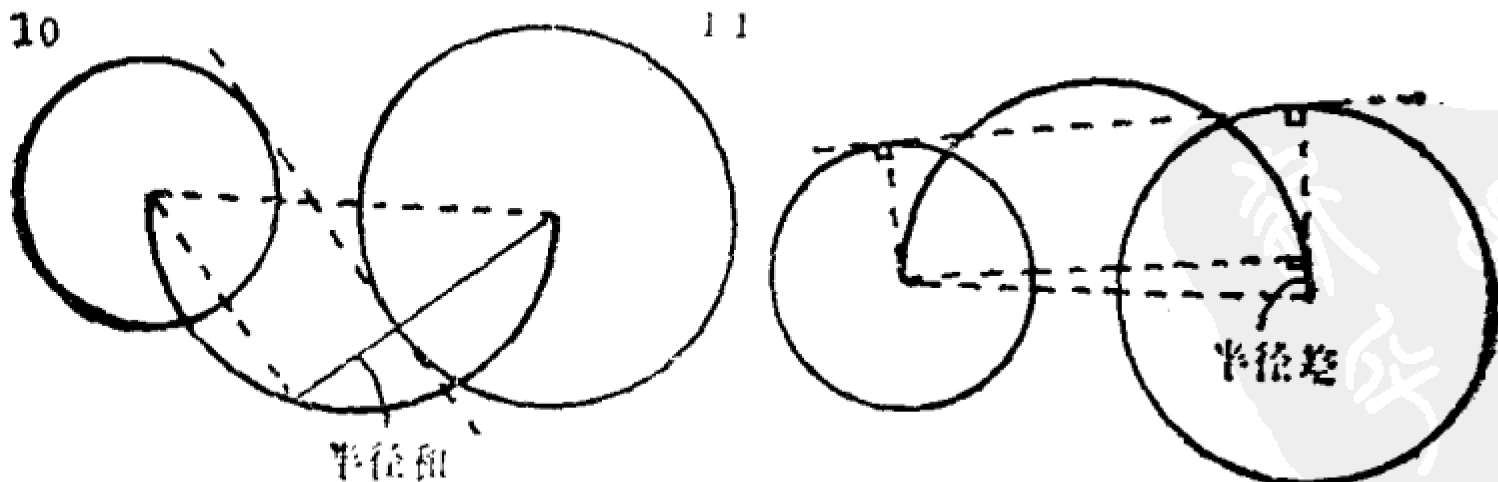


图14-111

12. 作以定线段为弦，并含有定角的弓形图(把定角移动，使角的顶点

与线段一端重合，使角的一边与线段重合．然后过该角顶点作角的另一边的垂线，再作定线段的垂直平分线，以二者的交点为圆心作弧即可(图14-112，12)．

13．作与给定的多边形等积的三角形(图 14-112，13)．

14．作与给定的三角形等积的长方形(图14-112,14)．

15．作与给定的长方形等积的正方形(图14-112，15)．

16．在 $a:b=c:x$ 中，当 a、b、c 是定线段时，求出 x 来(图 14-112，16)．

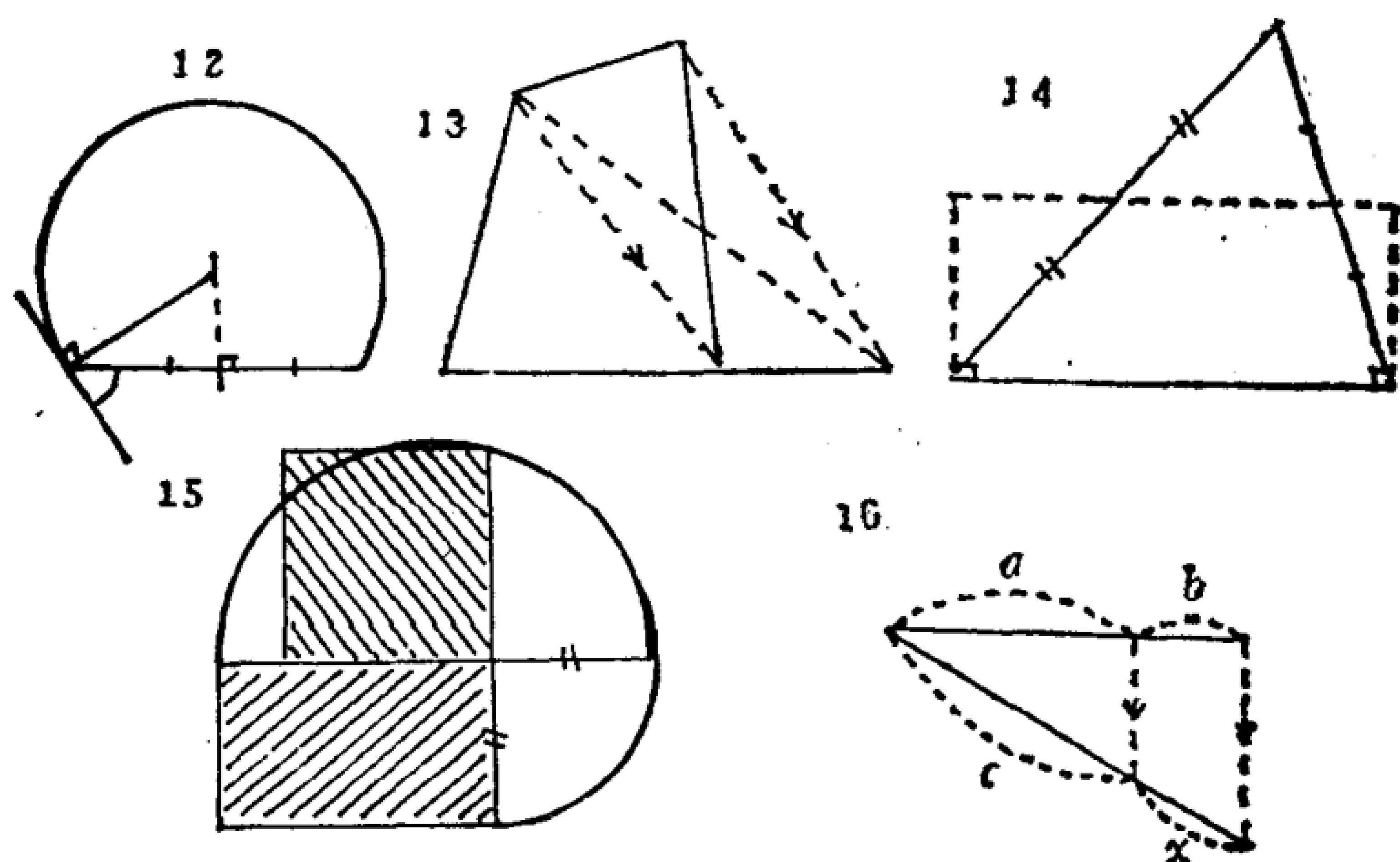


图14-112

7·3　各种类型的作图题

用轨迹交切法解作图题的例子

例题1． 作一圆与定直线 l 切于定点 A,同时与半径为 r 的定圆 o 相切．

分析　如图 14-113，设圆 P 是与 l 切于 A 点，同时与圆 O 外切的圆．则 P 点在过 A 而垂直于 l 的直线上．若在 PA 的延长线上取 B 点使得 $AB=r$，则有 $OP=PB$，由于 O、B 为定点，故 P 在定线段 OB 的垂直平分线上．于是 P 是两个轨迹的交点．也就是说，作出过 A 而垂直l的直线，再作出定线段 OB 的垂直平分线，二者的交点即为所求的 P 点．对于圆 P 与圆 O内切的情形，可用同样的方法作图．

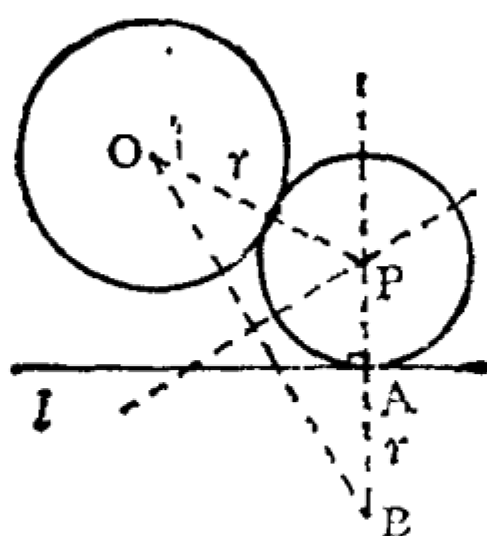


图14-113

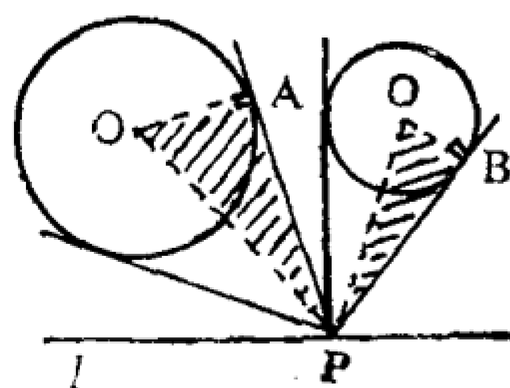


图14-114

关于作图、证明、讨论三步，以下都从略.

例题2. 在定直线 l 上作一点 P，使之到两个定圆的两对切线间的夹角相等.

分析 如图14-114，设已给二圆的圆心为 O、O'，半径分别为 r、r'. 今设定直线 l 上的 P 点是所要求的点. 过 P 向圆 O、O' 各作一条切线. 其切点分别为 A、B，则因要求过 P 向圆 O, O' 分别作出的两对切线之间的夹角相等. 应有

$$\angle APO=\angle BPO'，且\angle A=\angle B=\angle R.$$

由此，$\triangle POA\sim\triangle PO'B$.　　$\therefore\ PO:PO'=OA:O'B=r:r'$.

故 P 在到两定点 O、O' 的距离比等于定比 $r:r'$ 的点的轨迹(阿普尼亚斯圆)上，从而 P 能由这一轨迹与定直线 l 的交点所决定.

用作出部份图的方法求解作图题的例子

例题3. 过已知角 A 的平分角线上定点 $P(AP=m)$，作与角 A 的两边交于 B、C 两点的直线使得 BC 的长等于 l.

分析 在本题中，过 P 作 BC，然后求 A 更为方便. 如图14-115，若 $\angle A$ 是给定的角，过 P 取 BC 为弦，作出含 $\angle A$ 的(确定的)圆 O，再延长 AP 与圆周交于 M，于是 M 是弧 BC 的中点，即有

$$\angle MBP=\angle MAC=\angle MAB,$$

$\therefore\triangle ABM\sim\triangle BMP$，亦即 $BM:AM=MP:BM$，或 $MA\cdot MP=BM^2$(定值). 且因 $MA-MP=AP=m$(定值)，点 A 的位置即可确定了.

例题4. 已知三角形的外接圆半径 r 及一个顶点到对边的高为 h、中线为 m，求作此三角形.

分析 先把所给的线段集中在一起，再作出部分图*，由此来完成所要求的

---

* 这种部分图往往是最易作出三角形，它一旦作出，便奠定了全部图形的基础. 这种作图法称为三角形奠基法。——译注

三角形 ABC 的作图.

如图 14-116，对于$\triangle ADM$，由假设已知两条边及$\angle D=\angle R$，所以能作出来. 其次，作 OM，使$OM\perp BC$，再以 A 为圆心，r 为半径作圆交OM于O，于是外心就被确定了，从而 B、C 的位置也就被确定了.

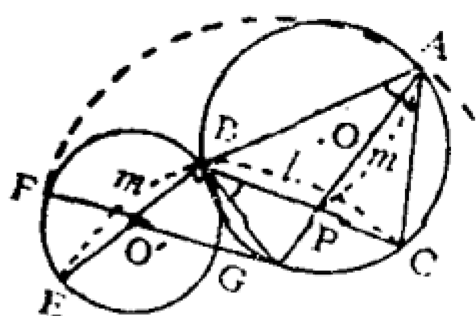


图14-115

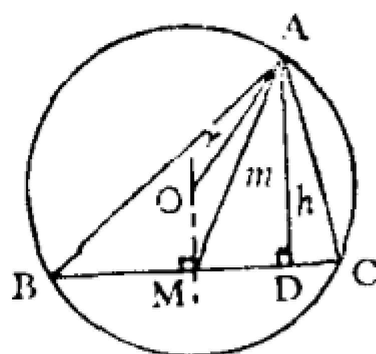


图14-116

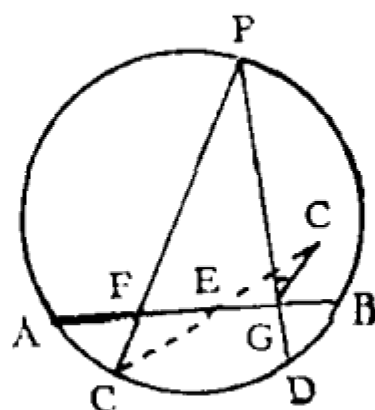


图14-117

用对称移动的方法解作图题的例子

例题5. 已知定圆劣$\overset{\frown}{AB}$上二点 C、D 及弦 AB 上的定点 E，试在优$\overset{\frown}{AB}$上作出一点 P，当 PC、PD 分别与弦 AB 交于 F.G 时使 $FE=GE$.

分析 如图 14-117，设所要求的 P 点已作出，于是有$FE=GE$. 作出 C 关于 E 的对称点 C'，显然 C'是个定点，由于 $FE=GE$，$CE=EC'$，所以 $FCGC'$是平行四边形，即有 $CP\parallel C'G$，亦即$\angle P=\angle PGC'$. $\therefore\ \angle C'GD=2\angle R-\angle P$，又因$\angle P$是$\overset{\frown}{CD}$上的圆周角，所以是定角，从而$\angle C'GD$ 也是定角. 于是 G 就是以 DC' 为弦，含定角$\angle C'GD$的弓形弧与弦AB的交点，故G 确定，P 也就随之而确定了.

例题6. 已知直线XX'及其同侧的定圆o和定点A：试在 XX'上求一点P，使得由 P 向圆 O 引的切线 PB 和 PA 分别与 XX' 所成的角相等。

分析 设 P 点已求出如图 14-118，则有$\angle BPX=\angle APX'$. 作 A 关于 XX'的对称点 A'，则由于$\angle A'PX'=\angle APX'$，必有 B、P、A'共线，从而切线 PB 就是由 A' 到圆 O 所作的切线，于是 P 就被确定了.

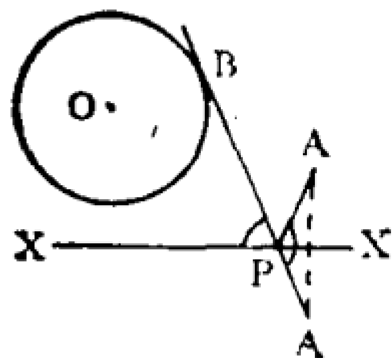


图14-118

用平行移动的方法解作图题的例子

例题7. 作一条具有给定方向 l 的直线使之与已知$\triangle ABC$ 的 AB、BC 边分别交于 P,Q 两点，满足 $AP=QC$.

分析 如图 14-119，设 PQ 是所求的直线，则有 $AP=QC$，作出以 AP、PQ

为二邻边的平行四边形 $APQR$，再连接R和C，由于 $AP=QR=QC$，故△QCR 是等腰三角形，又因∠RQC=∠B，故等腰三角形的顶点是一定的，从而 $\angle BCR=\frac{2\angle R-\angle B}{2}$ 为定值，故可作出 CR、又由于 AR 平行于题设方向，因此定点R即可被找到．再作 RC 的垂直平分线，与 BC 交于 Q，过 Q 引 AR 的平行线交 AB 于 P，则 QP 即为所求．

例题8. 作内接于定圆 O 的三角形 ABC，使其二边 AB，AC 分别过定点 E，F，且边 BC 平行于已知直线 l．

分析 如图14-120之右，设△ABC 是所求的三角形，过 C 作 EF 的平行线交圆 O 于 G．延长 GB 交 EF 于 H，于是

$$\angle A=\angle G(\text{同弧}\overset{\frown}{BC}\text{上的圆周角}),$$
$$\angle G=\angle EHB(GC\parallel EF),$$
$$\therefore\quad \angle A=\angle BHE.$$

因此，A、B、H、F 共圆，　$\therefore\ EB\cdot EA=EH\cdot EF$．

但因 $EB\cdot EA=EK^2$（EK 是圆 O 的切线），$\therefore\ EK^2=EH\cdot EF$．

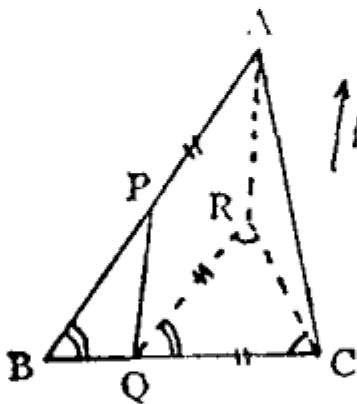


图 14-119

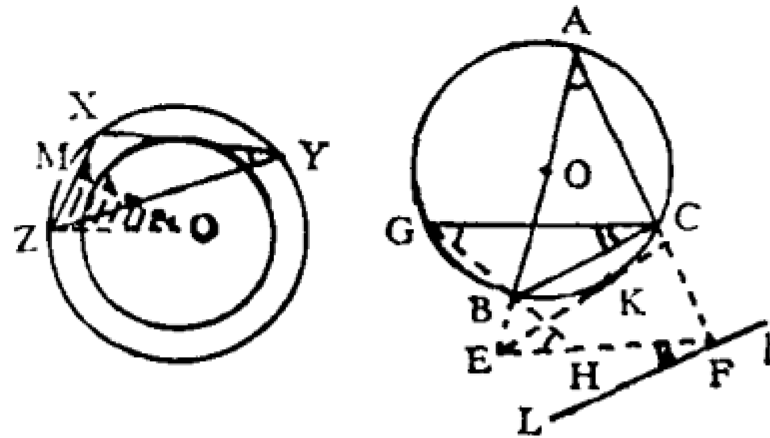


图 14-129

又因 EK、EF 都有确定的长，所以 EH 作为第三比例项可以被算出，从而 H 能被确定．又因∠GCB=∠EFL，而∠EFL 是 EF 与 l 的夹角，所以∠GCB 是定角．这时在(图14-120)之左图中设∠XYZ 是定圆 O 的圆周角，且∠XYZ=∠EFL，由于 XZ 是定长，所以自圆心 O 引出的 XZ 的垂线 OM 也有确定的长．再回到右图中，以 OM 为半径，以 O 为圆心作圆 O 的同心圆，它必与 HEG 相切．从而先作切线 EK，则由 $EK^2=EH\cdot EF$，H 即可确定，再自 H 作同心圆的切线，则点 B 即被确定，从而△ABC 也就立即可得了．

注意 上例实际上是同时混用平行移动法和轨迹交点法的作图题．

例题9. 求作已知圆的内接三角形 ABC，使其三边 AB、BC、CA 分别过已知点 P、Q、R（加斯特伦 *Castillon*（1776年发表）作图问题．）

分析 如图14-121，设△ABC是所求的三角形，过C作PR的平行线交圆O于G，延长GB交PR于H，则因$\angle A=\angle G=\angle BHP$，$A$、$B$、$H$、$R$是共圆，于是$PB\cdot PA=PH\cdot PR$.自$P$作圆的切线$PK$，由$PK^2=PH\cdot PR$及$PK$、$PR$的确定性，$PH$即被确定，亦即$H$被确定.由于△$BGC$内接于圆$o$，二边$BG$、$BC$分别过定点$H$、$Q$，且边$GC$平行于已知方向$PR$.再用与前例相同的步骤，即可求得$B$点，从而△$ABC$即可作出.（该作图题还可以推广到多边形的情形.这是Petersen得到的.）

用相似平行移动的方法解作图题的例子

例题10. 作已知三角形ABC的一个内接正方形，使正方形的一条边落在△ABC的一条边上.

图14-121

图14-122

分析 如图14-122，设$PQRS$是所求的△ABC的内接正方形.自A引BC的垂线AE，再以AE为一边作正方形$AEFD$，则这两个正方形为位似形，于是连接对应顶点的直线必交于同一点B.从而B、S、D共线.由于D是可以直接作出的定点，而从S也可以被确定，所求正方形即可作出.

用旋转移动的方法解作图题的例子

例题11. 已知一个定点A和两条平行线XX'，yy'，试在XX'、yy'上分别找出两点B、C使得△ABC成为正三角形.

分析 如图14-123，设正三角形已作出，过A引yy'的垂线AD，再把直角三角形ADC沿正方向旋转60°，则AC与AB重合，D移到D'.因$\angle DAD'=60°$，$AD=AD'$，于是D'是个定点，且因$\angle AD'B=\angle R$，所以B点也能被找到，从而正三角形ABC也就被确定了.

注意 当题中XX'，yy'不是平行线时也可用同样的方法作图.

用方程式解作图题（代数作图题）的例子

例题12. 在已知线段AB或其延长线上作一点P，使得$AP\cdot AB=BP^2$（黄金分割）.

分析 如图 14-124，取 $AB=a$，$BP=x$，则有

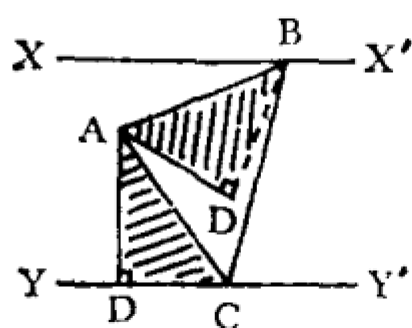


图 14-123

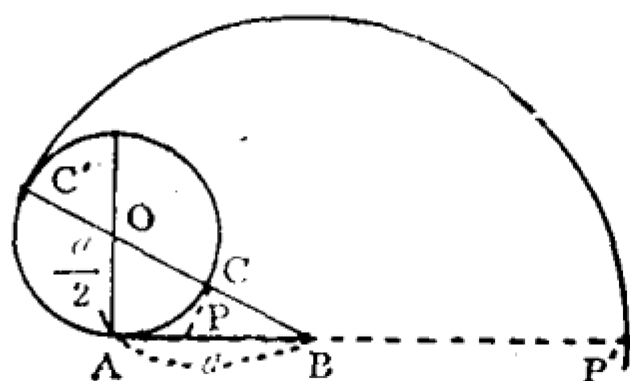


图 14-124

$$a(a-x)=x^2,$$

$$\therefore \quad x^2+ax-a^2=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a^2}}{2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}, & ①\\ -\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}+\frac{a}{2}\right). & ②\end{cases}$$

为了求出 x，分别以 $\frac{a}{2}$ 和 a 为直角边，作直角三角形 OAB 这时 由①在斜边 OB 上 减 去 $OC=\frac{a}{2}$ 后得到 BC，再在 AB 上取 $BP=BC$. P 点即为所求，并称 P 为 AB 的内(黄金)分割点.

或者，根据 x 的表达式②，在斜边 BO 上加以 $\frac{a}{2}$ 后得到 BC'，再在 AB 延长线上取 $BP'=BC'$，P' 也为所求，并称为 AB 的外(黄金)分割点(P' 位于 P 相对于 B 的反方向上，这与②的 符 号 一 致).

例题13. 求作已知圆 O 的内接正十边形.

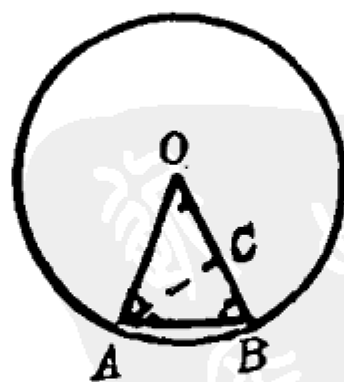


图 14－125

分析 如图14-125，设 AB 是圆 O 的内接正十边形之一边，则 $\angle AOB=36°$，从而 $\angle OAB=72°$. 作 $\angle OAB$ 的角平分线，与 OB 交于 C，则 $OC=AC=AB$ 因而有 $\triangle AOB\backsim\triangle BAC$ 即 $AO:AB=AB:BC$，$\therefore OA\cdot BC=AB^2$，亦即 $OB\cdot BC=OC^2$. 于是 C 点是 OB 的内黄金分割点，从而作 OB 和 BC 的比例中项即得 AB.

7·4 作图不能问题

初等几何的作图问题，是有限次使用圆规和直尺来完成的，对于这种方法是否总能完成呢？我们可以借助解析几何来讨论它。比如，在求联立方程 $\begin{cases}ax+by+c=0.\\x^2+y^2+ax+by+c=0\end{cases}$ 的解时，一旦给出系数 a、b、c，点 (x,y)的位置即可有限次地反复运用这些系数间的四则运算和平方根的作图来求出那末，在这些系数之间进行有限次四则运算和开平方运算得到的又是什么形状的数呢？

可作图的数　若给定一个单位长，则所有整数(倍)长也就可以作出来了，且对于一切整数间四则运算得到的数也能作出图来了．所以一般对于有理数是能作出图来的．设有理数为 a、b、c，…再添上$\sqrt{c}$，构造出形如$a+b\sqrt{c}$的新数，由于$\sqrt{c}$是可作图的，故$a+b\sqrt{c}$也可作图．设此型新数记为a_1、b_1、c_1，…，即

$$a_1=a+b\sqrt{c},b_1=a'+b'\sqrt{c},c_1=a''+b''\sqrt{c},\ \cdots$$

其次，又在 a_1,b_1,c_1…中引入新的$\sqrt{c_1}$，构造新数 $a_1+b_1\sqrt{c_1}$，由于a_1,b_1,c_1，…及$\sqrt{c_1}$皆可作图，因此 $a_1+b_1\sqrt{c_1}$也可作图，再把这种数记为a_2,b_2,c_2…，这里

$$a_2=a_1+b_1\sqrt{c_1},\ b_2=a_1'+b_1'\sqrt{c_1},c_2=a_1''+b_1''\sqrt{c_1},\ \cdots$$

以此类推，每次都产生新的可作图的数这是对有理数作有限次的四则运算和开平方所得到的数，因而可作图的数的一般形式为 $a_n+b_n\sqrt{c_n}$.

【定义】　可约、既约　若 x 的有理系数多项式能分解成具有有理系数的两个以上的至少一次的因式之积，则把这个多项式叫做是可约的，否则叫做是既约的．

【定理】1．若整系数多项式$f(x)$是可约的，则该多项式可分解成具有整系数的因式之积．

说明　该定理的证明属代数学范畴，不宜在此多占篇幅，这里只举一例加以说明：二次方程式 $6x^2-19x+15=0$ 有两个有理数根 5/3，3/2，于是有

$$6x^2-19x+15=6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=(3x-5)(2x-3).$$

亦即可约的整系数多项式能被分解成整系数的因式之积．

【定理】2．若整系数多项式 $f(x)$既约且 $f(x)=0$ 的根是可作图的，则 $f(x)=0$ 的次数是 2^n.

说明 由于 $f(x)$ 是既约多项式，所以 $f(x)=0$ 没有有理数根，但因它的根是可作图的．所以必为 $x=a+b\sqrt{c}$ 型，即 $x-a=b\sqrt{c}$ 型，两边平方得 $x^2-2ax+(a^2-b^2c)=0$，这时，若各系数为有理数，通乘以各分母的最小公倍数，即得整系数二次方程，而且是既约的．

其次，设 $f(x)$ 的根为 $x=a_1+b_1\sqrt{c_1}$，同法可得 $x^2-2a_1x+(a_1^2-b_1^2c_1)=0$，它的系数属于 $a+b\sqrt{c}$ 型，所以有

$$x^2+(a+b\sqrt{c})x+(a'+b'\sqrt{c})=0\Rightarrow$$
$$(x^2+ax+a')=-\sqrt{c}(bx+b').$$

将其两端平方后，经整理得 $x^4+2ax^3+(a^2+2a'-b^2c)x^2+2(aa'-bb'c)x+a'^2-cb'=0$，再通乘以其中各分母的最小公倍数后知，这是不可能分解成整系数因式之积的(既约)整系数四次方程．以此类推可知，一般的既约整系数多项式只能是 2次，4 次，…，2^n次，这不是严格的证明，仅是一种说明而已．

【系】 若整系数三次多项式 $f(x)$ 是既约的，则 $f(x)=0$ 的根不可作图．

说明 因为它是【定理】2 的一个特殊的对偶定理，所以它当然成立．至于[定理]2 的对偶定理的一般形式的叙述则是："若整系数既约多项式 $f(x)$ 的次数不是 2^n次，那么 $f(x)=0$ 的根是不可作图的"．

例题1．若某立方体体积为另一个已知立方体体积的两倍，则作出它的一边是不可能的(这就是著名的立方倍积问题)．

解 设已知立方体的一棱为单位长 1，设要作的立方体的棱长为 x，则有 $x^3=2$，即 $x^3-2=0$，这是一个既约的三次方程，由【系】，它的根是不可作图的．

例题2 三等分任意角是不可作图的．

解 设已知的任意角为 θ，由熟知的恒等式 $\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$，令 $\cos\theta=a$，$\cos\frac{\theta}{3}=x$ 则有 $4x^3-3x=a$，两端通乘以 2 得 $8x^3-6x=2a$．再令 $2x=y$，即有 $y^3-3y=2a$、a 是满足 $-1\leqslant a\leqslant 1$ 的实数．在 $[-1,1]$ 区间内，a 可取得无穷多个有理数．现在先来考虑如下的一种特殊情况．

一般地，令 $a=\frac{n}{m}$ $(m,n$ 为互素的整数$)$ 这时有 $y^3-3y=\frac{2n}{m}\Rightarrow my^3-3my=2n$，两端乘以 m^2 得 $m^3y^3-3m^3y=2m^2n$，再令 $my=z$，则得 $z^3-3m^2z=2m^2n$ 或 $z^3-3m^2z-2m^2n=0$．此为整系数三次方程．当它为既约时，由【系】，它的根不可作图．现设它不是既约的，则由于首项系数为 1，该方程必定有整数根，设 $z=\alpha$ 是它的一个整数根，则回到关于 x 的方程就有 $x=$

$\frac{a}{2m}$为其根.

由 $a^3-3m^2a-2m^2n=0$ 得 $a(a^2-3m^2)=2m^2n$. 所以 $a\left(\left(\frac{a}{m}\right)^2-3\right)=2n$. 此式右端为整数，所以左端也必为整数，从而 a 是 m 的倍数，令 $a=mk$(k 为整数)则有 $mk(k^2-3)=2n$, 由于这里 m, n 是互素的，这就产生了矛盾.

所以上述三次多项式是既约的，因此z是不可作图的，从而 x 也是不可作图的.由此得知，用尺规三等分任意角更是不可能的了.

§8. 空间图形

8·1 直线和平面的位置关系

【定义】1.直线间的位置关系 在同一平面上的两条不相交的直线叫做平行线.不在同一平面上的两条直线是不会相交的，故说它们是异面直线.这时，过其中一条直线上任一点作另一条直线的平行线，把所得的锐角(或直角)叫做二异面直线所成的角.

【定义】2.直线与平面的位置关系 当一直线 l 与某平面 α 不相交时，就说它们是平行的，当两者相交时，若过交点在平面 α 上引出的任一直线都与 l 垂直，则叫直线 l 与平面 α 是垂直的.又当直线 l 与平面 α 相交时，自 l 上不是交点的任一点向 α 引垂线，再连接垂足和交点，把这样得到的直线与 l 的夹角叫做直线 l 与平面 α 所成的角.

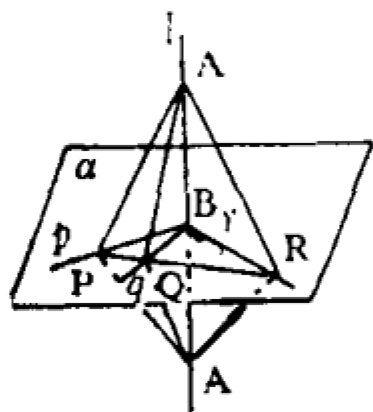


图14-126

【定义】3. 约定用 A、B、C，…来表示点，用a、b、c，…来表示直线，用α、β、γ，…来表示平面.

【定理】1. 对于与平面相交的直线，若过此交点在平面内作出的两条直线都与原直线垂直，则原直线与平面是垂直的.

证明 如图 14-126，设 l 和 α 交于 B 点，过 B 在 α 内作直线 p、q. 且 $l\perp p$, $l\perp q$. 再过 B 在 α 上另作任一直线，再在 α 上引一条分别与 p、q、r 交于 P、Q、R 的直线，并作 l 上一点 A 的关于 B 的对称点 A'. 连接 AP、$A'P$、AQ、$A'Q$、AR、$A'R$，则有 $AP=A'P$，$AQ=A'Q$. $\therefore\triangle APQ\cong\triangle A'PQ$，即$\angle AQR=\angle A'QR$，$\triangle AQR\cong\triangle A'QR$.故有$AR=A'R$.

∴ $BR\perp AA'\Rightarrow l\perp\gamma$.

从而 l 与 α 上过 B 的任意直线垂直.即 $l\perp\alpha$. □

【定理】2.(平面确定定理) 满足如下条件都可决定一个平面.

(i)相交二直线;(ii)平行二直线;(iii)直线与直线外一点.

证明 根据【公理】Ⅰ$_{(2)}$和【公理】Ⅲ$_{(7)}$.结论显然. □

【定理】3.(i)自平面 α 外一点 A 向该平面作垂线,其垂足为 B.又自 B 引平面 α 上的直线 l 的垂线,设其垂足为 C.则 $AC\perp l$.

(ii) 自平面 α 外一点 A 向平面 α 和 α 上的直线 l 分别引垂线,设其垂足分别为 B 和 C.则 $BC\perp l$.

(iii) 自 A 向 α 上的直线 l 引垂线,其垂足为 C,自 C 在 α 上引垂直于 l 的直线 CB,又自 A 引 CB 的垂线,垂足为 B,则 $AB\perp\alpha$.

(这三个定理叫做三垂线定理及其逆定理.)

证明 如图 14-127.

(i) ∵ $AB\perp\alpha$,∴ $AB\perp l$ 且因 $BC\perp l$,∴ $\beta\perp l$(β 是 AC、BC 决定的平面),亦即 $AC\perp l$.

(ii) ∵ $AB\perp\alpha$,∴ $AB\perp l$,且因 $AC\perp l$ ∴ $\beta\perp l$ 亦即 $BC\perp l$.

(iii) ∵ $AC\perp l$, $BC\perp l$,∴$\beta\perp l$,即有 $AB\perp l$ 或 $AB\perp BC$.∴$AB\perp\alpha$.

□

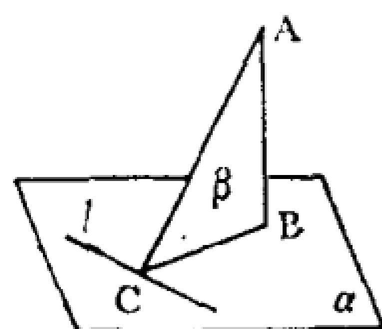


图14-127

【定理】4.若平面与平面相交,必交于且只交于一直线.

证明 根据【如理】Ⅰ$_{(3)(4)}$两相交平面不可能交于一个唯一的公共点,且若有两个公共点,则连接这两点的直线必同时全在两个平面内,于是该二平面有公共直线.设公共直线外还有一个公共点,根据"不共线三点决定一个平面",这时两平面必重合,与题设矛盾,因此相交平面必交于且只交于一直线. □

【定义】4.**二平面的位置关系** 若二平面无公共点,则称它们是平行的.由一条直线引出的两个半平面组成的图形叫做二面角.此直线叫二面角的棱.过棱上任意一点在两个半平面内分别作垂直于该棱的两射线,这两射线的夹角叫做此二面角的平面角.平面角是直角的二面角叫做直二面角.若两平面相交且所成的二面角是直二面角,则称这两个平面垂直.

【定理】5. 设 $a\perp\alpha$ 且 β 包含 a,则 $\beta\perp\alpha$.

证明 如图 14-128,设 α 与 β 的交线为 b,过 a 与 α 的交点 A 在 α 上作 $AB\perp b$,由 $a\perp\alpha$ 有 $a\perp b$,因此 a 与 AB 间的夹角是 α 与 β 间的夹角,

又因 $a\perp\alpha$，所以 $a\perp AB$，即 α 与 β 构成一个直二面角，由【定义】知 $\beta\perp\alpha$. □

【定理】6. 二平行直线中的任意一条直线必平行于只包含另一条直线的平面.

证明　如图 14-129, $a\parallel b$, α 包含 a. 这时设 b 与 α 相交，则交点必在 a, b 决定的平面上. 从而该交点又在二平面的交线 a 上，于是 b 必与 a 相交，这与定理的条件矛盾. □

【定理】7. 设 $a\parallel\alpha$，且含 a 的两个平面 β,γ 分别与 α 交于 b、c 两条直线，则 $a\parallel b\parallel c$.

证明　如图 14-130，设 $b\nparallel c$，且交于 p，则 β，γ 同时以直线 a 和过 p 点的直线 p 为其公共部分，从而 β、γ 重合，又设 $a\nparallel b$，于是其交点必在 b 上即 a 必与 α 相交. 同理若 $a\nparallel c$ 则 a, c 亦必交于 α 上，以上各种情形都与题设矛盾. $\therefore$ $a\parallel b\parallel c$. □

【定理】8. 若直线 a、b、c 不共面，且 $a\parallel b$，$a\parallel c$，则 $b\parallel c$.

证明　如图 14-131，设 a, b 决定的平面为 α，a、c 决定的平面为 β. 并设 b 与 c 上一点 P 决定的平面为 γ，γ 与 β 的交线为 d. 则根据【定理】6 有 $a\parallel\gamma$，从而又根据【定理】7 有 $a\parallel d$, $b\parallel d$. 同理有 $a\parallel c$, $a\parallel d$. 而 c, d 有公共点 P. 所以 c、d 必重合，即 $b\parallel c$. □

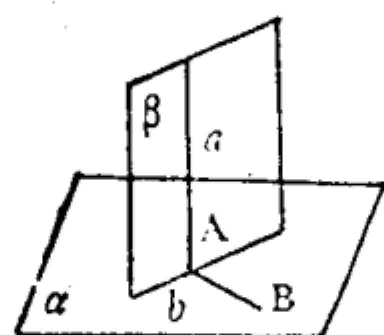


图14-128

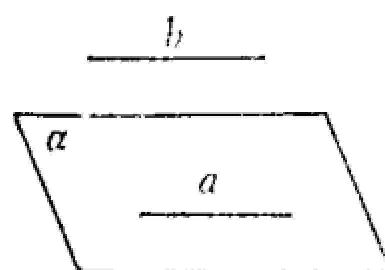


图14-129

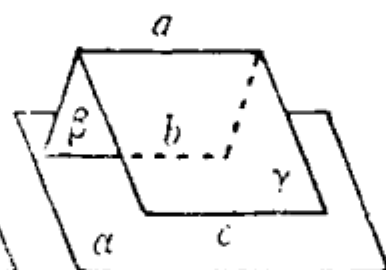


图14-130

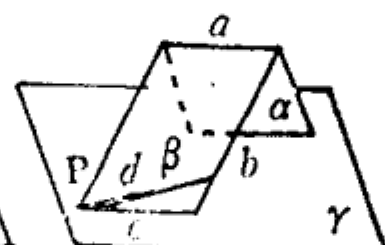


图14-131

【定理】9. 若 $AB\parallel XY$、$AC\parallel XZ$ 则 $\angle BAC=\angle YXZ$，且 AB、AC 决定的平面 α 与 XY、XZ 决定的平面 β 平行.

证明　如图 14-132，取 $AB=XY$，$AC=XZ$，则 $ABYX$、$AXZC$ 是平行四边形，因此有 $AX\underline{\parallel}BY$, $AX\underline{\parallel}CZ$，$\therefore$ 有 $BY\underline{\parallel}CZ$. 从而 $BYZC$ 也是平行四边形. 所以 $BD=YZ$. 从而 $\triangle ABC\cong\triangle XYZ$，故有 $\angle BAC=\angle YXZ$. 根据[定理]6，有 $AB\parallel\beta$、$AC\parallel\beta$，这时若 α 与 β 相交，则 AB、AC 将分别与 XY、XZ 相交，这是不可能的. $\therefore$ $\alpha\parallel\beta$. □

【定理】10. 若 $\alpha\parallel\beta$, γ 分别与 α, β 相交，则交线平行.

证明 ∵ 两条交线都在 γ 上，设这两条直线相交，则 α,β 也必相交，与假设矛盾. 故两条交线平行. □

【定理】11. 设 $\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$，二直线 l,m 与 α,β,γ 的交点分别为 A、B、C 和 D、E、F，则 $AB:BC=DE:EF$.

证明 如图 14-133(连 D、C 与 β 交于 G，则由 $\alpha /\!/ \beta$，有 $AD /\!/ BG$. 由 $\beta /\!/ \gamma$，有 $CF /\!/ GE$.

∴ $AB:BC=DG:GC=DE:EF$. □

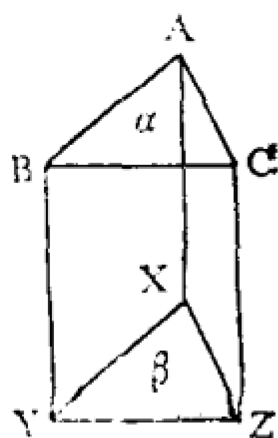


图14-132

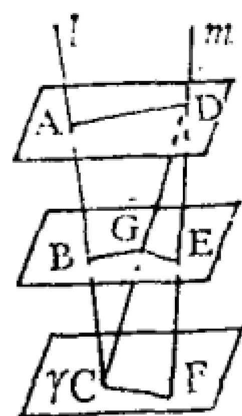


图14-133

【定理】12. 过平面外一点向此平面作垂线，只能作一条.

证明 设平面 α 外一点 A 向 α 能作两条垂线，垂足为 B 和 C，则在 $\triangle ABC$ 中同时有 $\angle ABC=\angle R$，$\angle ACB=\angle R$. 这是不可能的. 所以定理得证.

【定理】13. 设 $\alpha\perp\beta$，自 α 上一点 A 引交线 l 的垂线 AB，则 $AB\perp\beta$.

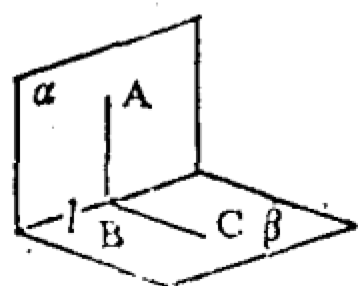


图14-134

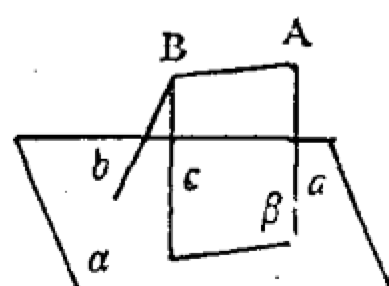


图14-135

证明 如图 14-134，设由 A 向 l 所引垂线的垂足为 B，在 β 上过 B 引 $BC\perp l$，则 $\angle ABC$ 是 α,β 所构成二面角的平面角，由 $\alpha\perp\beta$ 有 $AB\perp BC$，且因 $AB\perp l$，∴ $AB\perp\beta$. □

【定理】14. 若 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则 $a /\!/ b$.

证明 如图 14-135，设 a 和 b 上一点 B 所决定的平面为 β，则 $\beta\perp\alpha$. 又，自 B 向 α 与 β 的交线引垂线 c，则 $c /\!/ a$. 所以根据【定理】13 $c\perp\alpha$. 又因 $b\perp\alpha$. 则根据【定理】12，b,c 重合. ∴ $a /\!/ b$. □

【定理】15. 若 $l\perp\alpha$、$l\perp\beta$，则必 $\alpha /\!/ \beta$.

证明 因 $l\perp\alpha$，可设 l 与 α 交于点 A，又因 $l\perp\beta$，设 l 与 β 交于点 B，今

用反证法，设 α 与 β 相交，取交线上任一点 L，分别连接 LA 和 LB，立得 $\angle ABL=\angle BAL=\angle R$，这是不可能的。 □

【定理】16．设 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，α 与 β 的交线为 l，则 $l\perp\gamma$．

证明 设 α 与 γ 的交线为 a，β 与 γ 的交线为 b，自 l 上一点 L 引 a 的垂线 x，根据【定理】13，$x\perp\gamma$，又自 L 引 b 的垂线 y，则 $y\perp\gamma$．从而根据【定理】12，x 和 y 必重合于 l，$\therefore\ l\perp\gamma$．

8·2 多 面 角

【定义】5．**多面角** 由一点引出若干条不共面的射线，每相邻二射线构成一个角形面，这些角形面组成的空间图形叫做多面角．这些射线叫做多面角的棱，相邻两棱之间的角形面叫做多面角的面．每相邻两个面构成的二面角叫做多面角的二面角．相邻两棱组成的角叫做多面角的面角，所有棱的交汇点叫做多面角的顶点．有三个面(或三条棱)的多面角叫做三面角．有四个面(或四条棱)的多面角叫做四面角．以此类推．

若沿任一面延展后都不可能进入多面角的内部，这样的多面角叫做凸多面角．用字母表示一个多面角，可以先写出表示顶点的字母，在其后画一条短横线，再依次取表示每一条棱的一个字母写在后面即可．例如三面角表示为 $O-ABC$．

【定理】17．在三面角中，两个面角之和大于第三个面角．

证明 如图 14-136，在三面角 $O-ABC$ 中，若 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$，结论显然成立．若 $\angle AOC>\angle BOC$，在面 AOC 内．取 $\angle COD=\angle BOC$ 且取 $OD=OB$，则有 $\triangle BOC\cong\triangle DOC$，从而 $BC=DC$．这时，延长 CD 与 OA

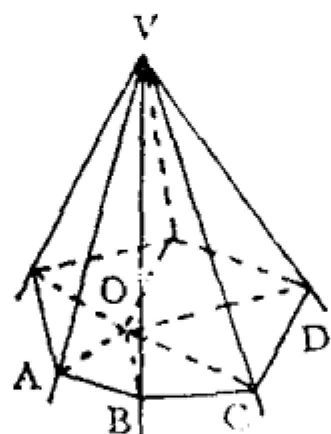


图14-136

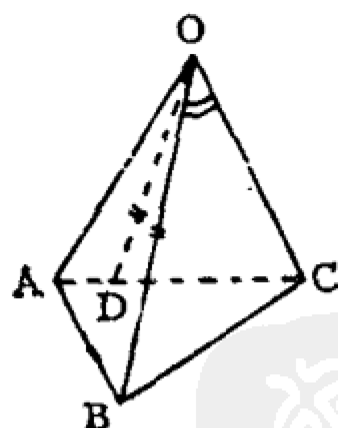


图14-137

交于 A，则在 $\triangle ABC$ 中 $AB>AC-BC=AD$．且 $\triangle AOB$、$\triangle AOD$ 有公共边 OA 及 $OD=OB$．$AB>AD$．$\therefore\ \angle AOB>\angle AOD$，即 $\angle AOB>\angle AOC-\angle BOC$，亦即 $\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC$． □

【定理】18．凸 n 面角的 n 个面角的和小于 $4\angle R$．

证明 如图 14-137，用一平面去截割多面角，设与各棱的交点分别为 A、B、C、D，…，且在该平面上取一点 O.再连接 OA、OB、OC、OD，…，于是在三面角 $B-VAC$ 中有 $\angle ABC<\angle VBA+\angle VBC$,在三面角 $C-VBD$中有 $\angle BCD<\angle VCB+\angle VCD$，…，最后将 n 个不等式的左右两端分别相加即得

$$(\text{多边形 }ABCD\cdots\text{内角和})<(\angle VAB+\angle VBA+\angle VBC+\angle VCB+\cdots)$$

$$=2n\angle R-(\text{多面角 }V-ABCD\cdots\text{各面角之和}).$$

∴ $(2n-4)\angle R<2n\angle R-$(多面角 $V-ABCD\cdots$面角之和).从而(多面角 $V-ABCD\cdots$面角和)$<4\angle R$.

8·3 多面体

【定义】6. 多面体 由若干个多边形面围成的封闭立体图形叫做多面体.这时称各个多边形为它的面，相邻两面的交线叫做多面体的棱，棱的端点叫顶点.若延展任何一面都不可能进入多面体的内部，则这样的多面体叫凸多面体.

【定理】19.（多面体的欧拉定理 1750 年发表)设凸多面体的顶点数为 V.棱数为 E，面数为 F，则 $V+F=E+2$.

证明 在 n 面体中，先对一个面来考虑,这时 $V=E$.若把该面再加在一个(相邻)面来考虑，这时顶点数是原来的两倍减 2，而棱数只减少 1.所以这时有 $V=E-1$. 若再加上一个相邻面而考虑三个面的情形，由于增加的面与原来的两个面有三个公共顶点，两条公共棱，所以这时有 $V=E-2$，如此下去，考虑 $n-1$ 个面时，则有 $V=E-(n-2)$.然而在加上第 n 个面后，顶点数和棱数都没有增加，只是面数增加了一面，所以这时仍有 $V=E-(n-2)$，所以面数 $n=F$，即 $V=E-F+2$. □

注意 欧拉多面体定理与§6 的一笔画定理，都是关于连接方式的问题，也是当代拓扑学的启蒙问题之一.

【定义】7. 正多面体 若多面体的各面为全等的正多边形，且交于每个顶点的棱数相等，则叫做正多面体

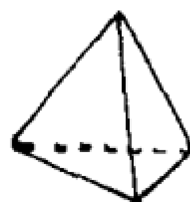
【定理】20. 凸正多面体不多于 5 种.

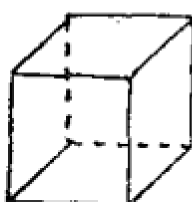
证明 设正多面体的各面为正 n 边形，则一个顶角为$\frac{1}{n}(2n-4)\angle R$ 且设交于一个顶点的有 p 个面，则对于这 p 个面的多面角，根据【定理】18 有 $\frac{1}{n}(2n-4)p<4$ 所以 $p<2+\frac{4}{n-2}$.又因为 $p\geqslant 3$ 所以 $3\leqslant p<2+\frac{4}{n-2}$.

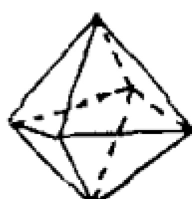
且因 $n\geqslant3$，n、p 是正整数，所以不可能多于下面的五种情形：$n=3$，$p=3$ 时为正四面体；$n=3$，$p=4$ 时为正八面体；$n=3$，$p=5$ 时为正二十面体；$n=4$，$p=3$ 时为正六面体；$n=5$，$p=3$ 时为正十二面体

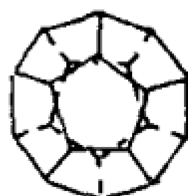
□

n	3			4	5
p	3	4	5	3	3


正四面体


正六面体


正八面体


正十二面体

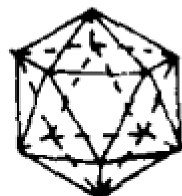

正十二面体

图14-138

【定理】21.（笛沙格空间定理）对于空间中 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，连接 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 的直线交于一点 V，且 AB 与 $A'B'$ 交于 X，BC 与 $B'C'$ 交于 Y，AC 与 $A'C'$ 交于 Z，则 X、Y、Z 共线．逆定理也真．

证明　如图 14-139，设 $\triangle ABC$ 所在的平面为 α．$\triangle A'B'C'$ 所在的平面为 α'，根据假设 AB，$A'B'$ 分别在平面 α，α' 上，且因交于 X，所以 X 同在 α 与 α' 上，同理 BC，$B'C'$ 的交点 Y 也同在 α，α' 上．AC、$A'C'$ 的交点 Z 也同在 α、α' 上，于是根据【定理】4 X、Y、Z 同在 α 与 α' 的交线上．再则，由 AB 与 $A'B'$ 交于 X，则 $ABB'A'$ 决定了一个平面，同理 $BB'C'C$，$AA'C'C$ 也分别决定了一个平面．因此这三个平面交于一点，从而交线 AA'、BB'、CC' 交于这三平面的交点．（在平面的情形，根据§6【定理】37，其证明更为简单．）

□

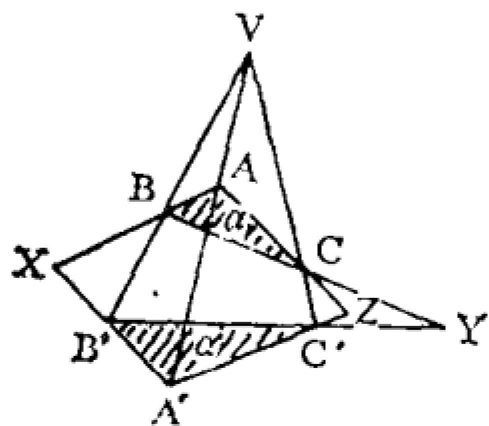


图14-139

关于初等几何方面定理的证明，就介绍到这里，至于一般的面积、表面积、体积等（计算）方面的内容，因与三角学，积分学有关内容重复，这里不再赘述，而只介绍一个著名的体积公理——卡佛来利公理（祖暅定律），利用这个公理、求体积的问题常常可以变得非常简单．

卡佛来利公理（Cavalieri 1598—1647）（祖暅定律）* 置于同一平面上的两个立体，如果用平行于这个平面的平面去截割它们时，所得的切口面积总是相等的，则该二立体的体积必相等．

* 祖暅是祖冲之的儿子，他发现此定理于公元五世纪，比卡佛来利早一千多年．—译注．

第十五章　近世数学

Ⅰ集　　合

§1. 集合与逻辑

1·1　集　　合

【定义】1. 集合　一些具体或抽象的、确定而且可分辨的事物之全体叫做集合，(这个定义是德国数学家康托给出的，他最早明确提出了集合这一概念.)

注意　这里"确定而且可分辨"的意思是指：对集合中任意两个事物，可以判定它们是相同的或是不同的. 在讨论一个集合的时候，判定一个事物是否属于该集合，是件重要的事情

【集合的记号】　通常用大写的拉丁字母 A、B、…X，Y…表示集合. 组成集合的各个事物叫做集合的元或元素，若事物 a 是集合 A 的元素，则记为

$$a\in A \text{ 或 } A\ni a.$$

读作 a 属于 A，A 包含 a 或 a 含于 A 等.反之，若 a 不是 A 的元素，则记为 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$，设集合 A 由元素 a,b,c…组成，则记为

$$A=\{a,\ b,\ c,\ \cdots\}.$$

这叫做 A 的**外延记法**. 同样的，若 A 是满足某条件 $P(x)$ 的事物 x 的全体，则用记号.

$$A=\{x\mid p(x)\}.$$

这叫 A 的**内含记法**.

例　若集合 A 是自然数的全体，则记为

$$A=\{1,2,\cdots,\ n,\cdots\}=\{n\mid n \text{ 是自然数}\}.$$

【定义】2. 单点集　仅含一个元素的集合叫单点集.

注意　a 和 $\{a\}$ 是不同的概念，前者表示一个元素 a，后者表示的是由一个元素 a 构成的集合.

【定义】3．空集合　不含任何元素的集合叫做空集合，记为 ϕ 或 $\{\ \}$.

例　满足方程 $x^2=-1$ 的实数 x 的集合为 ϕ.

【定义】4．子集合　如果集合 A 的每一元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集合.记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.否则，记为 $A\not\subset B$ 或 $B\not\supset A$.

【定义】5．A＝B　集合 A 的元素全部是集合 B 的元素，且 B 的元素全部是 A 的元素，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$.

【定理】1. 如下关系式是成立的.

(i) $A\subset A$;　(ii) $A\subset B,\ B\subset A\Rightarrow A=B$;

(iii) $A\subset B,\ B\subset C\Rightarrow A\subset C$;　(iv) $\phi\subset A$.

这里记号"$\Rightarrow$"是"则"或"那末"的意思.

证明　据上述有关定义，(i)，(ii)，(iii)是显然的，至于(iv)的证明，只要证明它的逆否命题，设 $x\in A$ 则 $x\in\phi$ 就行了，而这一点是明显的事实.　□

【定义】6．和集(并集)　设有两个集合 A，B．由至少属于集合 A、B 之一的元素的全体构成的集合叫做 A,B 的和集，记为 $A\cup B$，记号 $\cup$ 可读为并或 Cup.

例　$\{1,2,3,4\}\cup\{2,4,6,8\}=\{1,2,3,4,6,8\}$.

【定义】7．积集（交集）　设有两个集合 A,B.由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合叫做 A,B 的积集(或叫做 A,B 的交集)，记为 $A\cap B$，记号 $\cap$ 可读为交或 Cap.

例　$\{1,2,3,4\}\cap\{2,4,6,8\}=\{2,4\}$.

【定义】8．全集·补集　设集合 U 有一个子集合 A，把 U 中不属于 A 的元素的全体叫做 A 的补集或叫做 A 的余集，记为 A^c，$\overline{A}$，A' 等，这时 U 叫做全集.

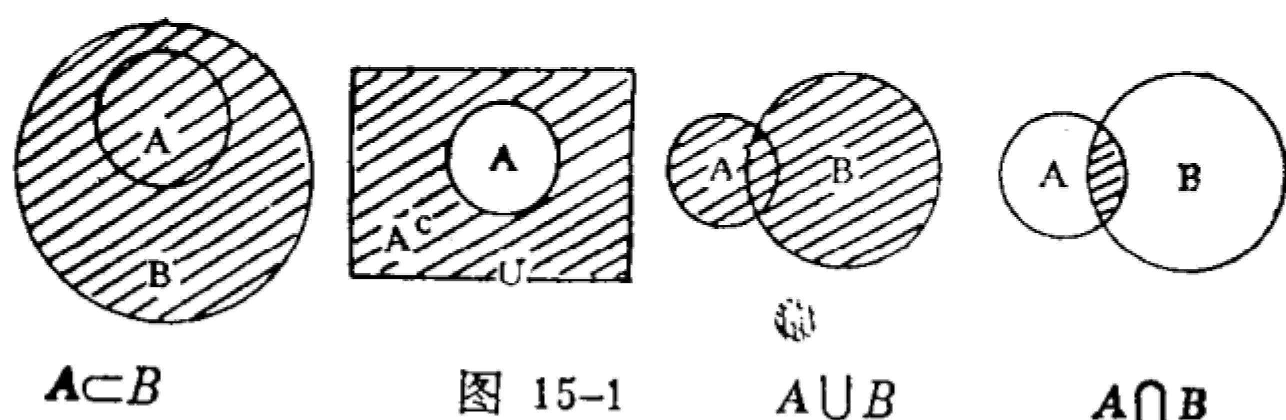
例　(i)　设 U 是全体整数的集合，A 是全体自然数的集合，则有 $A^c=\{0,-1,-2,\cdots\}$.

(ii)　设 U 是全体实数集合，$A=\{x\mid x>1\}$，则 $A^c=\{x\mid x\leqslant 1\}$.

(iii)　$U^c=\phi$，$\phi^c=U$.

【文氏(venn)图】　集合间的关系可用图形来表示，我们把这种图叫做文氏图(图15-1)

【定义】9．不相交　若 A,B 不含其公共元素，即 $A\cap B=\phi$，则称 A,B 为不相交的集合.



$A\subset B$　　图 15-1　　$A\cup B$　　$A\cap B$

【定理】2. 对于全集合 U，下列等式成立：

(1) $A\cup U=U$,　　(1)′ $A\cap U=A$;

(2) $A\cup\phi=A$,　　(2)′ $A\cap\phi=\phi$;

(3) $A\cup A=A$,　　(3)′ $A\cap A=A$;

(4) $A\cup A^c=U$,　　(4)′ $A\cap A^c=\phi$.

【定理】3. 对任意集合 A, B, C，下列各等式成立.

(1) $A\cup B=B\cup A$,　　(1)′ $A\cap B=B\cap A$（交换律）;

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

(2)′ $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$（结合律）;

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

(3)′ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$（分配律）.

证明　作为例子，我们用文氏图证明(3)，其法如图 15-2所示，

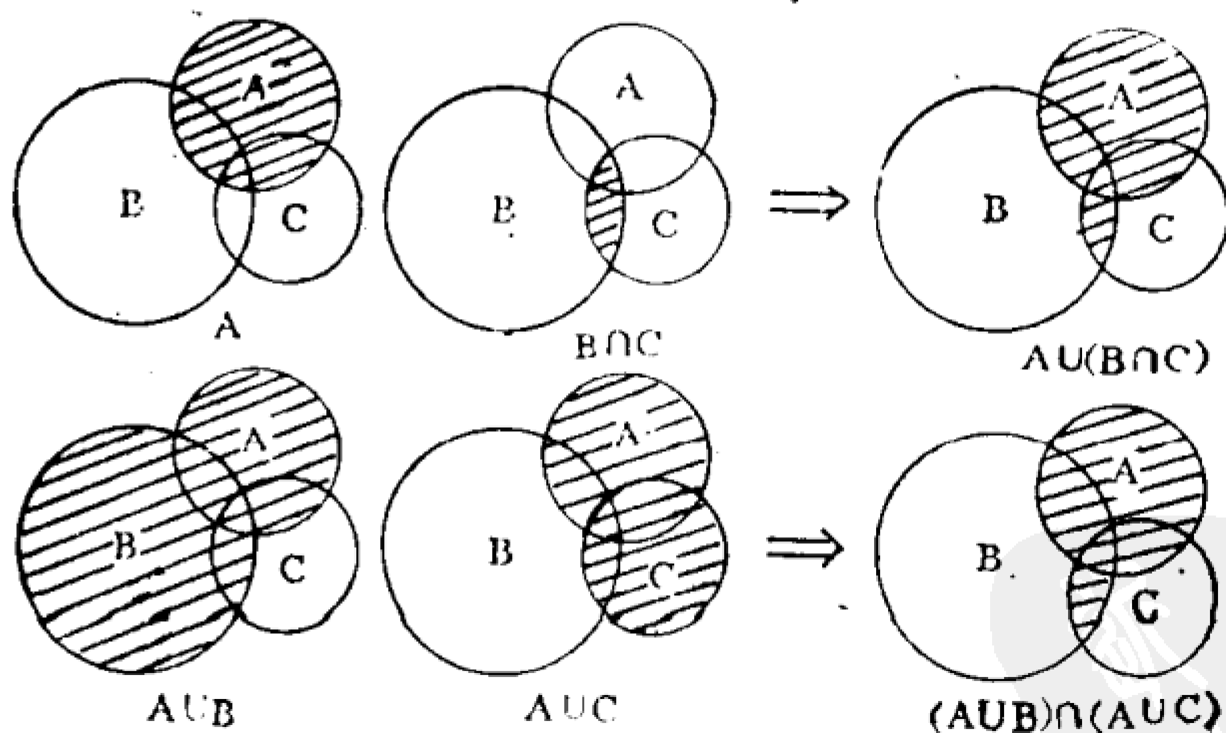


图15-2

【定理】4. 下列等式成立

(1) $A^{cc}=A$,

(2) $U^c=\phi$,　　(2)′ $\phi^c=U$.

【定理】5. 德、摩根法则

(1) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$　　(1)′ $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证明　设$x\in(A\cup B)^c$，则有$x\notin(A\cup B)$

∴　$x\notin A$且$x\notin B$.

亦即$x\in A^c$且$x\in B^c$.

于是$x\in A^c\cap B^c$，　∴　$(A\cup B)^c\subset(A^c\cap B^c)$.　①

反之，设$y\in A^c\cap B^c$，即同时有$y\in A^c$和$y\in B^c$.

因此有$y\notin A$及$y\notin B$，　∴　$y\notin A\cup B$.

于是$y\in(A\cup B)^c$ 亦即 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$　②

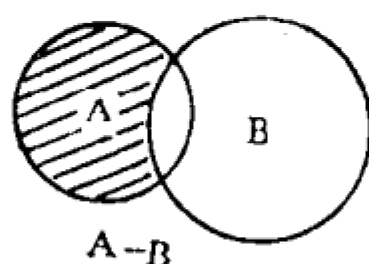


图15-3

由①，②即得　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

同理可证(1)′.

【定理】6. 下列等式成立

(1) $A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B$,

(2) $A\supset B\Longleftrightarrow A\cap B=B$.

证明　证(1)：

因$A\subset B$，故当$x\in A\cup B$时，有$x\in B$，故$A\cup B\subset B$.

若$x\in B$，则显然$x\in A\cup B$，故$B\subset A\cup B$，由上述两点，可得$A\cup B=B$，即必要性得证，至于充分性，是显然的(证略).

同理可证(2)成立.　□

【定义】10. 差集　对于A,B两个集合，由所有属于A但不属于B的元素所构成的集合叫做A减去B的差集，记为$A-B$

由此定义有$A-B=A-(A\cap B)$.设全集合U的子集合为A，则$U-A=A^c$.

【定理】7. 设A,B都是全集合U的子集合，则有等式　$A-B=A\cap B^c$.

证明　设$x\in A-B$，则$x\in A$且$x\notin B$.故$x\in A$，$x\in B^c$，即$x\in(A\cap B^c)$，故$(A-B)\subset(A\cap B^c)$.反之，若$x\in(A\cap B^c)$，则有$x\in A$，$x\in B^c$，故$x\in A$，$x\notin B$，因此，$x\in A-B$，$(A\cap B^c)\subset A-B$.最后得

$$A-B=A\cap B^c.$$
□

【定理】8. $A\cap A=A$，$A\cup A=A$(幂等律).

【定理】9. 下列等式成立：

$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$(吸收律).

证明　设$x\in A\cap(A\cup B)$，则有$x\in A$.且$x\in(A\cup B)$，因而$x\in A$,

$\therefore \quad A\cap(A\cup B)\subset A.$

反之，由 $x\in A$ 有 $x\in(A\cup B)$，从而 $x\in(A\cap(A\cup B))$，

$\therefore \quad A\cap(A\cup B)=A.$

同理可证　　$A\cup(A\cap B)=A.$

【定义】11．直积　设有两个集合 A, B，将 A 中的任意元素 a 与 B 中元素 b 重新组成一个新的二元对 (a, b)，由所有这样的二元对 (a, b) 构成的集合叫做 A 和 B 的直积，记作 $A\times B$.

例　平面上点的坐标是两个实数的(有序)二元对.所有这些坐标的集合就是两个实数集 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ 的直积.

注意　由此例还可以得出：由于 (a, b) 和 (b, a) 一般是两个不同的元素，所以，$A\times B$ 与 $B\times A$ 一般也是不同的集合.

1·2　命　　题

【定义】12．命题　任何一个表示判断的语句称为一个命题，命题表示的判断是真还是假，通常是可以确定的，一般用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示命题.

【定义】13．命题　命题是对某一事物表示肯定或否定判断的语句.

例　“人总是要死的”，“云是黑的”，“5 是素数”等是命题；而“编辑先生，请准于发表我这篇文章吧！”，“你是谁？”等就不是命题.

【定义】14·1　原始命题(初等命题)　不能分解为任何其他命题的命题叫做原始命题(或初等命题).

【定义】14·2　合成命题　由若干命题组合起来的命题叫做合成命题.

例　“花未开，树已绿”，“2 比 3 小，比 1 大”都是合成命题.

【定义】15·1　命题逻辑　研究合成命题之间的逻辑关系而不涉及每个初等命题内的主语和谓词之间的关系，这样的推理过程叫命题逻辑.

【定义】15·2　谓词逻辑　对初等命题的内部结构(主语和谓词)或对合成命题的逻辑形式进行研究的推理过程叫谓词逻辑.

注意　一个合成命题的真假仅仅依赖于包含于其中的命题的真假，而与这些命题的内容无关.

1·3　逻辑演算及符号

用一个或几个命题组成新命题，叫做命题的逻辑演算，也简称为命题**演算**.它通常包括如下的五种演算：命题的否定、命题的乘法、命题的加法、命题的蕴涵、命题的等价，依次用符号“—”、“∧”、“∨”、“→”、“~”表示，下面用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$，$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ 等表示命题.

(1) 命题的否定：$F=\overline{A}$若命题A真，则命题F不真；若A不真，则命题F真，由命题A得到$\overline{A}$的逻辑演算，叫做**命题的否定**，也叫命题A的逻辑非，或叫非A.

(2) 命题的乘法：$P=A\wedge B$，P是由命题A，B构成的一个新命题，若A，B同时真，则P真，否则P不真.那么由A，B得到P的逻辑演算叫做两个命题的合取，也叫命题的乘法(简称逻辑乘)或命题的与．P叫做A，B的逻辑积，符号“$\wedge$”读做“乘”，如，“A且B”或“既A又B”这样的合成命题就是合取命题的例子．

(3) 命题的加法：$S=A\vee B$.S是由命题A，B构成的一个新命题，若A真或B真，或A，B同时真，则命题S真；否则S不真.那么由A，B得到S的逻辑演算叫做两个命题的析取，也叫做命题的加法(简称逻辑加)，命题S叫做A，B的逻辑和，符号“$\vee$”读做“加”，如“A或B”这样的合成命题就是析取命题的例子.

(4) 命题的蕴涵：$I=A\rightarrow B$.I是由命题A，B构成的一个新命题.若A真、B真，或A不真，B不真，或A不真，B真，则命题I真.即，只有A真B不真时I为不真.由A，B得到I的逻辑演算叫做两个命题的蕴涵，用符号“$\rightarrow$”表示.如用逻辑连词“若…则…”把命题A，B联结起来的合成命题“若A则B”，就是A、B的蕴涵命题，“若A则B”又称条件命题．A，B分别称为这命题的前件和后件.

(5) 命题的等价：$E=A\sim B$.E是由命题A，B构成的新命题．当A，B都真，或A、B都不真时，E为真；否则E为不真.A与B等价用符号$A\sim B$(或$A\longleftrightarrow B$或$A\Longleftrightarrow B$或$A\equiv B$,)表示.由命题A，B作出的命题“A当且仅当B”称为双条件命题.

1·4　逻辑法则和布尔代数

【定义】16 真值　命题的真或假，可以用数值来表示.当命题A为真时，说A的值为1；当A为假时，说A的值为0.这时，0或1都称为命题的真值，如下图所示.

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

【定义】17. 真值表　把命题以及命题相互间的真假关系用真值表示出来而写成的表格叫做真值表.这时逻辑演算可用真值表表示出来.

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\to B$	$A\sim B$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

【定义】18．真值函数(亦叫真值函项)　如果一个命题的真假由组成它的命题变项的真或假完全确定，则此命题变量叫做组成它的命题自变量的真值函数．

【定义】19．等价　两个真值函数，对自变量命题的任意一组值，取相同的真值，则称此二真值函数等价，用记号"≡"或"⟺"表示．

【定理】10．(关于0，1，∨，∧的定理)

(1) $0\wedge0\equiv0$，$0\wedge1\equiv0$，$1\wedge0\equiv0$，$1\wedge1\equiv1$；

(2) $0\vee0\equiv0$，$0\vee1\equiv1$，$1\vee0\equiv1$，$1\vee1\equiv1$．

【定理】11．(关于等价的定理)

(1) $\overline{A}\equiv\overline{A}$；　(2) $A\equiv A$；

(3) $A\equiv B$ 必 $B\equiv A$；(4) $A\equiv B$，$B\equiv C$，必 $A\equiv C$；

(5) $A\equiv B$ 必 $\overline{A}\equiv\overline{B}$；

(6) 把命题的一部分命题换成一个等价的命题，则得到与原命题等价的命题．

【定理】12．

(1) $A\wedge B\equiv B\wedge A$；　(1)′ $A\vee B\equiv B\vee A$(交换律)；

(2) $A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C$(结合律)；

(2)′ $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$(结合律)；

(3) $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$(分配律)；

(3)′ $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$(分配律)．

欲证以上各式，还须分别赋予 A，B，C 以0，1值，并对所有可能的组合，证明"≡"两端，具有相同的真值即可．

例如，可用如下的真值表来证明(3)．

A	B	C	$A\wedge C$	$A\vee B$	$A\vee C$	$A\vee(B\wedge C)$	$(A\vee B)\wedge(A\vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

↑ 相同 ↑

注意　在通常的数的运算中，乘法对于加法的分配律(亦称第一分配律)

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

成立，但加法对于乘法的分配律(又称第二分配律)

$$A+(B\cdot C)=(A+B)(A+C)$$

不成立．

【定理】13． $A\wedge A\equiv A$，$A\vee A\equiv A$(幂等律)．

这个定理表明，在一个合取命题或一个析取命题中，当同一命题多次出现时，这个命题只须写一次就可以了．

【定理】14． 由真命题 T 和假命题 F 表出的下列各式成立

$A\wedge T\equiv A$，$A\wedge F\equiv F$，$A\wedge\overline{A}\equiv F$，

$A\vee T\equiv T$，$A\vee F\equiv A$，$A\vee\overline{A}\equiv T$．

证明　由【定理】10，各等式显然．

例　(1) x,y 是实数，若 $x^2+y^2=0$成立，则必同时有$x=0$及$y=0$或$y=0$，及$x=0$这可以表成$(x=0)\wedge(y=0)\equiv(y=0)\wedge(x=0)$．

同样，若 $xy=0$ 时，必有 $x=0$ 或 $y=0$ 也可以说成 $y=0$ 或 $x=0$，由此可以表成$(x=0)\vee(y=0)\equiv(y=0)\vee(x=0)$(交换律成立)．

(2) 设 x,y,z 是实数，若有 $x^2+z^2+z^2=0$，则必有

$(x^2+y^2=0)\wedge(z^2=0)\equiv(x^2=0)\wedge(y^2+z^2=0)$，

$\therefore$　$\{(x=0)\wedge(y=0)\}\wedge(z=0)\equiv(x=0)\wedge\{(y=0)\wedge(z=0)\}$．

同样地，$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 等价于 $\{(x-\alpha)(x-\beta)=0\}\vee(x-\gamma=0)$或$(x-\alpha=0)\vee\{(x-\beta)(x-\gamma)=0\}$

从而，$\{(x=\alpha)\vee(x=\beta)\}\vee(x=\gamma)\equiv(x=\alpha)\vee\{(x=\beta)\vee(x=\gamma)\}$（结合律成立）.

(3) 在解联立方程

$$\begin{cases}x+2y=6,\\x^2-6xy+5y^2=0\end{cases}$$

时，先对第二式作因式分解，得$(x-5y)(x-y)=0$，由此得$(x-5y=0)\vee(x-y=0)$，于是联立方程变成

$$(x+2y-6=0)\wedge\{(x-5y=0)\vee(x-y=0)\}.$$

利用分配律并变形得

$$(x+2y=6)\wedge\{(x-5y=0)\vee(x-y=0)\}$$
$$\equiv\{(x+2y=6)\wedge(x-5y=0)\}\vee\{(x+2y=6)\wedge(x-y=0)\}.$$

'≡'号的右端即是

$$\begin{cases}x+2y=6,\\x-5y=0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x+2y=6,\\x-y=0.\end{cases}$$

【定理】15. $\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$，$\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B}$（德·摩根法则）

A	B	$A\wedge B$	$\overline{A\wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\vee\overline{B}$	A	B	$A\vee B$	$\overline{A\vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\wedge\overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1

（$\overline{A\wedge B}$ 与 $\overline{A}\vee\overline{B}$ 相同；$\overline{A\vee B}$ 与 $\overline{A}\wedge\overline{B}$ 相同）

例　$xy=0$ 的否定即 $xy\neq0$，这时有

$$(\overline{xy=0})=\overline{(x=0)\vee(y=0)}=\overline{(x=0)}\wedge\overline{(y=0)}=(x\neq0)\wedge(y\neq0),$$

因此 $xy\neq0$ 与 $(x\neq0)\wedge(y\neq0)$ 等价.

【定理】16. $A\vee(A\wedge B)\equiv A$，$A\wedge(A\vee B)\equiv A$（吸收律）.

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\vee(A\wedge B)$	$A\wedge(A\vee B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

（A 与 $A\wedge(A\vee B)$ 相同）

【定理】17. $A\to B\equiv\overline{A\wedge\overline{B}}$

A	B	$A\to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$\overline{B}$	$A\wedge\overline{B}$	$\overline{A\wedge\overline{B}}$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

相同

【定理】18. $A\to B\equiv\overline{A}\vee B$

证明　由**【定理】**15，17知，该定理成立。 □

【定理】19. $\overline{A}\to B\equiv A\vee B$

证明　在【定理】18中把A换成$\overline{A}$，由于$\overline{\overline{A}}=A$，则得$\overline{A}\to B\equiv\overline{\overline{A}}\vee B\equiv A\vee B$. □

【定理】20. $A\to B\equiv\overline{B}\to\overline{A}$

证明　$\overline{B}\to\overline{A}\equiv\overline{\overline{B}\wedge\overline{\overline{A}}}\equiv\overline{\overline{B}\wedge A}\equiv\overline{A\wedge\overline{B}}\equiv A\to B$. □

【定理】21. $A\leftrightarrow B\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)$.

证明　因A为真B为假或者B为真A为假都是不可能的，故$(A\to B)\wedge(B\to A)$和$A\leftrightarrow B$取相同真假值，于是，定理得证。

【定理】22. $A\leftrightarrow B\equiv B\to A$.

【定理】23. $A\leftrightarrow B\equiv A\leftrightarrow\overline{\overline{B}}$.

【定理】24. $A\wedge B\equiv\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$, $A\vee B\equiv\overline{\overline{A}}\vee\overline{\overline{B}}\equiv\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}$.

证明　$A\wedge B\equiv\overline{\overline{A}}\wedge\overline{\overline{B}}\equiv\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$, $A\vee B\equiv\overline{\overline{A}}\vee\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}$.

【定义】20. 布尔代数　如果在一个集合中引入了"和"、"积"、"否定"运算，它们满足【定理】10-15，则把这个集合和这些运算构成的代数系统叫做布尔代数。

例　在集合M的子集族$\{M_i\}$中定义通常的并$\cup$为$\vee$，交$\cap$为$\wedge$，补C为$\overline{}$，则$\{M_i\}$是一个布尔代数。在此，全集合M和空集合ϕ分别起着T和$\overline{T}$的作用。

1·5　命题逻辑

【定义】21. 命题变量·命题函数　一个变量，如果在命题集合中取值，则

称为命题变量，通常用大写英语字母表示．由几个原始命题($A, B, C\cdots$等)作为变量而构成的合成命题(可记为 $f(A, B, C\cdots)$)，叫做这些命题变量的命题函数．

【定义】22．逻辑变量·逻辑式　一个命题，它的真值可用 0、1 表示，因此，不管命题的具体意义，只讨论真假性时，命题变量是取值为 0、1 的变量，此即逻辑变量．由逻辑变量经过有限次逻辑演算①～⑤而得到的式子，称为逻辑式．

例　设 A 表命题，其否定为 $\bar{A}$，使命题 A_1，$A_2\cdots$分别对应于$\bar{A}_1$，$\bar{A}_2$，$\cdots$时，若用逻辑函数 f 来表示这个对应关系，则有命题逻辑式

$$f(A_1,\ A_2,\ \cdots)=(\bar{A}_1,\ \bar{A}_2,\ \cdots).$$

【定义】23．永真式与永假式　一个逻辑式，如果对于逻辑变量，A，B，$\cdots$的任一组取值，都恒取真值 1(0)，则它称为永真式(永假式)．

永真(永假)的命题叫做永真(永假)命题．

【定义】24．标准形　把逻辑式中的各个合取演算、析取演算相应地表成代数运算的积、和的形式，所得到的逻辑式叫做标准形，比如把 $A\wedge B$ 表作 $A\cdot B$，把 $A\wedge B$ 表作 $A+B$．

一般地，对于 $f(A, B, C, \cdots)$，用 A, B, C 表示肯定，用 $\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{C}$，$\cdots$表示否定，这些统称为原子，原子的积(合取)为：$ABC\cdots$，$\bar{A}BC\cdots$，$A\bar{B}C\cdots$，$\bar{A}\bar{B}C\cdots$等等，称为合取分子．把命题函数表成合取分子之和的形式时，称这样的形式为**析取标准形**．同样，把命题函数表成原子的和(也就是析取分子)之积的形式时，称此形式为**合取标准形**．

例1． 求 $x(x\to y)$的合取标准形和析取标准形．

首先把$\to$消去，得到$x(\bar{x}+y)$，这就是所求的合取标准形．

其次，该式满足分配法则，所以有$x\bar{x}+xy$，这就是所求的析取标准形．

例2． 求 $\bar{x}\vee\bar{y}\leftrightarrow xy$ 的析取，合取标准形．

首先，
$$\begin{aligned}A\leftrightarrow B&\equiv(A\to B)\wedge(B\to A)\equiv(\bar{A}\vee B)\wedge(\bar{B}\vee A)\\&\equiv\{(\bar{A}\vee B)\wedge\bar{B}\}\vee\{(A\vee B)\wedge A\}\\&\equiv\{(\bar{A}\wedge\bar{B})\vee(B\wedge\bar{B})\}\vee\{(\bar{A}\wedge A)\vee(B\wedge A)\}\\&\equiv(\bar{A}\wedge\bar{B})\vee(A\wedge B).\end{aligned}$$

在该式中，用 $\bar{x}\vee\bar{y}$ 来代替 A，用 xy 来代替 B，即得

$$\overline{x\vee y}\leftrightarrow xy\equiv\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}\,\overline{xy}\vee\overline{\bar{x}\vee\bar{y}}\,xy\equiv(x\vee y)\overline{xy}\vee\bar{x}\vee\bar{y}\,xy$$

$$\equiv(x\vee y)(\bar{x}\vee\bar{y})\vee\bar{x}\,\bar{y}\,xy\equiv x\bar{x}+x\bar{y}+y\bar{x}+y\bar{y}\vee\bar{x}\bar{y}\,xy.$$

此即所求之析取标准形.

其次，为求合取标准形，只须把所给形式表成两个和之积的形式：

$$\overline{x\vee y}\leftrightarrow xy\equiv((x\vee y)\vee\overline{xy})\wedge(\overline{x\vee y}\vee xy)$$

$$\equiv((x+y)+\overline{xy})(\bar{x}\bar{y}+(x+y)))$$

$$\equiv(x+y+x)(x+y+y)(\bar{x}+\bar{y}+x)(\bar{x}+\bar{y}+y).$$

【定义】25. 对偶式 对于公式 a 和 a^*，若其中一个是把另一个中的演算 $\vee$ 或 $\wedge$ 分别换为 $\wedge$ 或 $\vee$ 后得到的公式，则称此二公式为对偶式.

例 $(x\vee\bar{y})\wedge z$ 和 $(x\wedge\bar{y})\vee z$ 是对偶式.

【定理】25. 若公式 a 和 b 是等价的，则它们的对偶式 a^*，b^* 是等价的.

【定义】26. 推理 首先定义真式.然后，由已得到的真式推演出新的公式过程叫做推理，这时所用到的定理叫做推理法则.

【定义】27. 公理 把作为推理依据的真逻辑式叫做公理.

【定义】28. 证明 把从公理出发，使用推理法则而得到真逻辑式的过程叫做证明.

【定理】26. 一个逻辑式是永真式的充分必要条件是：它的合取标准形的各合取项中至少含有两个析取项，其中之一是某个变量，另一个是它的否定.

本定理的对偶定理如下：

【定理】27. 一个逻辑式为永假式的充分必要条件是：它的析取标准形之各个析取项都至少含有两个合取项，其中之一是变量，另一个是这变量的否定.

例题1. 证明 $y\vee x\bar{y}\vee\bar{x}\,\bar{y}$ 是永真式.

证 设所给式为 P，把 P 表成合取标准形，得 $P=\bar{y}\vee y(x\vee\bar{x})\equiv(y\vee\bar{y})(y\vee x\vee\bar{x})\equiv(y+\bar{y})(y+x+\bar{x})$.由于后一个式子的各合取项中含有一个变量和它的否定，所以是永真式.

例题2. 证明 $(x\wedge y\wedge z)\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge Z)\vee(x\wedge y\wedge Z)$ 不是永真式.

证 为把所给逻辑式表成合取标准形，利用分配律，可得到一串由符号 $\wedge$ 连接起来的和式.

$(x\vee\bar{x}\vee x)\wedge(x\vee x\vee y)\wedge\cdots\wedge(x\vee y\vee\bar{z})\wedge\cdots\wedge(z\vee z\vee\bar{z})$ 合取项(例如 $(x\vee\bar{y}\vee\bar{Z})$)中，任意一变量和它的否定都不同时出现，因而不是永真的故所给表达式不是永真式.

【命题逻辑的公理系统】

【公理】 I (1) $A\to(B\to A)$, (2) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.

II (1) $A\wedge B\to A$, (2) $A\wedge B\to B$,

(3) $(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$.

III (1) $A\to A\vee B$, (2) $B\to A\vee B$,

(3) $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$.

IV (1) $(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})$, (2) $A\to\overline{\overline{A}}$, (3) $\overline{\overline{A}}\to A$.

【推理法则】

1. **代入法则**　设真式a中含有文字A，则将a中出现的A全都换成任意的逻辑式b，所得到的逻辑式也是真式.

2. **结论法则**　若逻辑式a和$a\to b$为真，则b也为真.

在命题演算中，有了上述公理和推理法则，新的真式都可以求出.

例题1. $(A\to B)\to(A\to A)$真.

证　在公理 I (2)中将C换成A，则有

$$(A\to(B\to A))\to((A\to B)\to(A\to A)).$$

再由公理 I (1)知，前提$A\to(B\to A)$是真.

从而据结论法则，$(A\to B)\to(A\to A)$亦为真.

例题2. $A\wedge B\to B\wedge A$真.

证　在公理 II (3)中把A换成$A\wedge B$得到真式

$$(A\wedge B\to B)\to((A\wedge B)\to C)\to(A\wedge B\to B\wedge C)).$$

在上式中把C换成A，即得真式

$$(A\wedge B\to B)\to((A\wedge B\to A)\to(A\wedge B\to B\wedge A)).$$

该式的前提是公理 II (2)，从而利用结论法则即得到真式：

$$(A\wedge B\to A)\to(A\wedge B\to B\wedge A).$$

而这里的前提就是公理 II (1)，故再次用结论法则即得　　$A\wedge B\to B\wedge A$.

【定理】28. 若以T表任意的真式，则式$B\to T$亦真.

证明　在公理 I (1)中以T代A，则有$T\to(B\to T)$由假设知T真，故可对T和$T\to(B\to T)$使用结论法则，得

$B\to T$为真　□

【定理】29. $A\to A$为真.

证明　在公理 I (2)中，将C换成A，得

$$(A\to(B\to A))\to((A\to B)\to(A\to A)).$$

前提是公理 I (1)，据结论法则，$(A\to B)\to(A\to A)$为真. 若在此代B为T，则$(A\to T)\to(A\to A)$. 据【定理】28，这里前提为真，再次使用结论法则，得　$A\to A$为真　□

【定理】30. 若逻辑式b可以由逻辑式$a_1, a_2, \cdots, a_n$证明(演绎)，则逻辑式$a_1 \to (a_2 \to (\cdots(a_n \to b\cdots))$为真(演绎定理).

证明 对n用归纳法，即可得证. □

常常用符号$a_1, a_2, \cdots, a_n \vdash b$表示由逻辑式$a_1, a_2, \cdots, a_n$证得逻辑式$b$. 当$n=0$时，只用符号$\vdash b$，它表示$b$为真逻辑式.

【定理】31. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

证明 使用归纳法，由$A \to B$，$B \to C$及A即可推出C，于是据【定理】30，有

$$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))\text{为真.}$$ □

在此式中，代A、B、C为a、b、c，得

$$(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c)).$$

若已知$a \to b$和$b \to c$为真，则对该式用归纳法知，$a \to c$也真. 这关系可用下图表出：

$$\frac{a \to b,\ b \to c}{a \to c} \quad \text{(推理图)};$$

象上面那样的演绎推理方法叫做**三段论法**

【定理】32. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

证明 对$A \to (B \to C)$，B，A用归纳法，可得

$$A \to (B \to C)、B、A \vdash C.$$

成立，再用演绎【定理】30即可. □

由于该式为真，同【定理】29一样，可导出推理法则(推理图)

$$\frac{a \to (b \to c)}{b \to (a \to c)}.$$

我们称此推理法则叫做前提交换的法则.

【定理】33. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$

证明 首先有$A \to (B \to C)$，$A \wedge B \vdash C$成立. 由公理Ⅰ(1)，(2)，$A \wedge B \to A$，$A \wedge B \to B$，为真且A，B可由$A \to (B \to C)$和$A \wedge B$证明为真. □

其次，对A和$A \to (B \to C)$用归纳法，且对B和$B \to C$再用归纳法得

$$A \to (B \to C),\ A \wedge B \vdash C.$$

这时，再用演绎定理，即得本定理，其推理图为

$$\frac{a \to (b \to c)}{a \wedge b \to c}.$$

我们把这个推理法则叫做前提结合的法则.

例1. $a=b \to a-b=b-b$,

$a-b=b-b\to a-b=0$,

∴ $a=b\to a-b=0$(三段论法).

例2. 若 $A\to B$ 且 $B\to A$, 则 $A\longleftrightarrow B$; 反之亦真.

如果把这个命题用逻辑符号表示, 则得

$$(A\to B)\wedge(B\to A)\equiv A\longleftrightarrow B.$$

现在, 设 a,b,c 为实数, 命题 P 为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有异号二实根. 命题 Q 为 $ac<0$. 若能证明 $P\to Q$ 及 $Q\to P$, 则 $P\leftrightarrow Q$. 于是有 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)\equiv P\longleftrightarrow Q$.

证明 先证 $P\to Q$, 设 P 真, 即 $ax^2+bx+c=0$ 有异号二实根, α, β. 由根与系数的关系得 $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{ac}{a^2}$. 因 $\alpha\beta<0$, 故 $ac<0$, 此即命题 Q.

其次, 再证 $Q\to P$. 设 Q 真, 即 $ac<0$. 于是二次方程 $ax^2+ax+c=0$ 的判别式 $b^2-4ac>0$, 故它有二实根 α,β, 且 $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{ac}{a^2}<0$, 即 P 真.

1·6 谓词逻辑

【定义】29. 个体变元·单元命题函数·n 元命题函数 表示对象集合 m(叫做场)中的不定元(对象), 叫做个体变元. 只含一个个体变元的命题函数, 叫做单元命题函数. 含 n 个变元的函数, 叫做 n 元命题函数. 个体变元常用拉丁文小写字母 $x,y,g,\cdots$ 等表示.

【定义】30. 真值集合 集合 m 中使命题函数 $A(x)$ 为真的元素 x 的集合, 叫做 $A(x)$ 的真值集合, 常用希腊文小写字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 等来表示.

【定义】31. 命题变元 以真(T)或以假(F)为取值的变元叫做命题变元, 常用拉丁文大写字母 $A,B,\cdots X,Y,A_1,A_2,\cdots$ 等来表示.

【定义】32. 谓词·一元谓词·二元谓词·谓词变元 设对象集合为 m, m 中元素的某个性质或关系可以用符号来表示, 称为谓词, 以 $F(x)$, $G(x\cdot y)$, $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 等表示之. 如"是偶数", "是奇数"等叫做一元谓词. 表示二元关系的, 如"小于", "整除"等叫做二元谓词. 一般地, 不考虑哪个领域中的哪个具体关系时, 把谓词叫做谓词变元.

【定义】33. 基本式 含有命题变元, 确定的个体或个体变元的谓词叫做基本式. 基本式中的演算符号, 与命题逻辑的演算符号一样, 也用∧, ∨, ━, →等表示.

【定义】34. 量词 设 $R(x)$ 是在场 m 上处处有定义的谓词, 命题"$R(x)$ 对 m 的所有元 x 都成立"可用命题"对所有的 x, $R(x)$ 为真"来代替, 并记为 $\forall xR(x)$, 记号 $\forall$ 称为**全称量词**, 它是英文 *Any* 的第一个字母 A 的倒写.

同时，把"在m中存在x，使$R(x)$真"这一命题用命题"假如取适当的x，则$R(x)$为真"或"使$R(x)$为真的x存在"代替，并以记号$\exists xR(x)$表示.记号$\exists$是$Exist$的第一字母E的反写.记号$\exists$叫做**存在量词.**

【定义】35. 自由变量·约束变量 不属于全称量词和存在量词的变量叫做自由变量；属于这两个量词的变量叫做约束变量.

例 1. $\forall xF(x,y)$中，x是约束变量，y是自由变量，它可以看作是一个变量y的谓词$g(y)$.命题$\forall yg(y)$，$\exists yg(y)$可分别用$\forall y\forall xF(x,y)$，$\exists y\exists xF(x,y)$表示.

例2. 设$F(x,y,z)$是三个变量x,y,z的谓词.在$\forall xF(x,y,z)$中，x是约束变量，而y,z是自由变量.故$\forall xF(x,y,z)$是两个变量y,z的谓词.

又，在$\exists y\forall xF(x,y,z)$中，$x,y$是约束变量，$z$是自由变量，该式是一个变量$z$的谓词.

【定义】36. 等式 在谓词逻辑中，我们也有一个等价关系.若把场m上的两个表达式a,b的谓词变元，命题变元和自由变量分别用定义在m上的确定的谓词，确定的命题和属于m的确定的个体去置换两者同真或同伪，则称这样的两个表达式在m上等价.如果a,b在m上是等价的，则简单地称a,b等价，记为$a\leftrightarrow b$或$a\equiv b$.

注意 在各变元进行置换时，a,b中相应的变量必须进行相同的置换。

例 (1) $a\to b\equiv\overline{a}\vee b$.

(2) $\exists x(a(x)\to\forall yb(y))\equiv\exists x(\overline{a}(x)\vee\forall yb(y))$.

(3) $\forall xa(x)\to(b(y)\to\forall xc(x))\equiv\overline{\forall xa(x)}\vee(\overline{b(y)}\vee\forall xc(x))$

【定理】34. $\forall xA(x)\to\exists xA(x)$.

证明 因对所有x，$A(x)$真，故对某个x_1，$A(x_1)$真.故定理得证. □

【定理】35. $\overline{\forall xa(x)}\equiv\exists y\overline{a}(y)$, ①

$\overline{Exa(x)}\equiv\forall y\overline{a}(y)$. ②

证明 $\overline{\forall xa(x)}$表示$\forall xa(x)$为假，与"存在y使$a(y)$为假"，或与"使$\overline{a}(y)$为真的y存在"这一命题等价，故①成立.

再证②式$\overline{\exists xa(x)}$表示"$\exists xa(x)$为假"，它等价于"对一切y，$a(y)$都假"，即等价于"对于一切y，$\overline{a}(y)$都真"，故②得证. □

由①，②可见，可以把否定号"—"下的$\forall$，$\exists$分别换成$\exists$，$\forall$，同时使否定号向后移动.

例 $\overline{\exists x(A(x)\to\forall yB(y))}\equiv\overline{\exists x(\overline{A(x)}\vee\forall yB(y))}$

$\equiv\forall x\overline{(\overline{A(x)}\vee\forall yB(y))}\equiv\forall x(A(x)\wedge\overline{\forall yB(y)}$

$\equiv \forall x(A(x) \wedge \exists y \overline{B}(y))$.

【定理】36. $\forall x(a(x) \wedge b(x)) \equiv (\forall x a(x)) \wedge (\forall x b(x))$, ①

$\exists x(a(x) \vee b(x)) \equiv (\exists x a(x)) \vee (\exists x b(x))$, ②

$(\forall x a(x)) \vee (\forall x b(x)) \rightarrow \forall x(a(x) \vee b(x))$, ③

$\exists x(a(x) \wedge b(x)) \rightarrow (\exists x a(x)) \wedge (\exists x b(x))$. ④

证明 设 $a(x)$, $b(x)$ 的真值集合分别为 α, β, 全体集合是 m.

由于$(a(x) \wedge b(x))$的真值集合显然是$\alpha \cap \beta$, 故 $\forall x(a(x) \wedge b(x))$为真等价于 $\alpha \cap \beta = m$, 即等价于 $\alpha = m$ 和$\beta = m$, 亦即等价于 $(\forall x a(x)) \wedge (\forall x b(x))$为真. 故①成立.

又, 由于有, $(\alpha = m) \vee (\beta = m) \rightarrow \alpha \cup \beta = m$, 故③式成立.

再由

$$(\alpha \neq \phi) \vee (\beta \neq \phi) \leftrightarrow \alpha \cup \beta \neq \phi.$$

可见②式成立. 由于有

$$\alpha \cap \beta \neq \phi \rightarrow (\alpha \neq \phi) \wedge (\beta \neq \phi).$$

所以④成立. □

【定理】37. $\forall x(a(x) \rightarrow b(x)) \longleftrightarrow (\alpha \subseteq \beta)$, ①

$\forall x(a(x) \longleftrightarrow b(x)) \longleftrightarrow (\alpha = \beta)$ ②

证明 设 α, β, m 的定义与【定理】36 相同. 因此有

$$(\alpha \neq m) \vee (\beta = m) \rightarrow (\alpha = \phi)) \vee (\beta = m) \rightarrow \alpha \cup \beta = \phi \cup \beta = \beta.$$

$\therefore \quad \alpha \subseteq \beta$.

即①成立.

又 $\forall x(a(x) \longleftrightarrow b(x)) \equiv \forall x((a(x) \rightarrow b(x)) \wedge (b(x) \rightarrow a(x)))$

$\equiv \forall x(a(x) \rightarrow b(x)) \wedge \forall x(b(x) \rightarrow a(x))$.

将上式('≡'三号右边)换成真值集合表示式, 得$(\alpha \subseteq \beta) \wedge (\beta \subseteq \alpha)$, 它显然与 $\alpha = \beta$ 等价. 由此, ②已得证.

【谓词逻辑的公理体系】 这一体系由命题逻辑的公理体系 I — Ⅳ 再加上如下的公理Ⅴ得到.

【公理】 Ⅴ (1) $\forall x F(x) \rightarrow F(y)$,

(2) $F(y) \rightarrow \exists x F(x)$.

【推理法则】

1. 关于命题变元和谓词变元的代入法则 在谓词逻辑中, 有一个把命题变元和谓词变元用逻辑式来置换的问题:

命题变元的置换 设式 $a(A)$含有命题变元 A, 则 A 可用满足下列条件的式 b 置换它

① b 中所含自由变量不是 a 中所含约束变量，且 b 中所含约束变量不是 a 中所含自由变量.

② 若 A 在 a 中任何字母所表示的量词的作用范围内，则 b 不含这个字母.

把这样的置换叫做式 b 代入变元 A.

谓词变元的置换 设式 $a(F)$ 含有谓词变元 F，F含有 n 个个体变元，且给定了含 n 个自由变量 t_1，t_2，…，t_n 的逻辑式 $b(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，其中t_1，t_2，…，t_n 与含于 a 的任何一个个体，变元都不同．若 b 满足条件①和下列条件③，则可以把 b 代入 F。

③ 在 a 中，若 F 在约束所有字母的量词的作用范围内，则 b 不含这个字母.

例 在 $A\vee\forall xF(y)$中，把$U(x)$代替 A，得$U(x)\vee\forall xF(x)$.U所含的自由变量与 F 所含的约束变量相同，故条件①不满足，从而这个式子不成立。

2．**结论法则** 若 a 和 $a\to b$ 式为真，则 b 式也真.

3．**关于自由变量的置换法则** 设式 a 关于谓词演算为真，则将 a 的任意自由变量用其它的自由变量来置换而得到的新的式子 a' 也真.

例 在式 $\forall x(F(x)\to G(y))\wedge(\overline{F}(y)\to\exists xG(x))$ 中，以 z 代替 y，得
$\forall x(F(x)\to G(z))\wedge(F(z)\to\exists xG(x))$

4．**关于约束变量的改名法则** 设式 a 关于谓词演算为真，则把 a 的约束变量用与其任一自由变量都不同的其他约束变量来代替而得到的新式a'也真.这时，a 中某变元的置换应遍历约束这个变元的量词的作用范围，即使在这个量词之中也必须置换.

5．**关于由量词来约束的法则**

第Ⅰ法则：若 $b\to a(x)$为真，且 b 不含变量 x，则 $b\to\forall xa(x)$也真.

第Ⅱ法则：若 $a(x)\to b$ 为真，且 b 不含变量 x，则 $\exists xa(x)\to b$也真.

【关于对偶的法则】 由于记号$\wedge$ 与$\vee$ 及$\forall_x$ 与$\exists_x$是对偶的，在式a中，把记号$\wedge$，$\vee$；$\forall_x$，$\exists_x$ 分别换成它们的对偶记号，得到式b，则b 与a是对偶的。

例 $\forall_x(A\vee(B(x)\wedge B(y)\vee\overline{B}(x)))$与$\exists x(A\wedge(B(x)\vee B(y)\wedge\overline{B}(x))$是对偶的。

【定理】 38．$\vdash\forall_xF(x)\to\exists xF(x)$。

证明 据公理Ⅴ（1)和(2)有

$$\forall xF(x)\to F(y),\ F(y)\to\exists xF(x).$$

再用三段论法即可得证。

【定理】39. $\forall x\forall yF(x, y)\leftrightarrow\forall y\forall xF(x, y)$。

证明　两次使用公理 V (1)后，得

$$\forall x\forall yF(x, y)\to F(u, v)。$$

在该式中，使用量词约束的第一法则，先约束 u，再约束 v，便得

$$\forall x\forall yF(x, y)\to\forall v\forall uF(u, v)。$$

在此，进行变量的改名，将 u 改为 x，v 改为 y，即得

$$\forall x\forall yF(x, y)\to\forall y\forall xF(x, y)。$$

同理可证反方向的结论。最后，根据法则"若 a，b 为真，$a\wedge b$ 也真"，可以得到所求证的等价式。

【定理】 40. $\exists x\forall yF(x, y)\to\forall y\exists xF(x, y)$。

证明　在公理 V(1) 中，置换自变量，得 $\vdash\forall vF(x, y)\to F(x, y)$;

同样由公理 V(2) 可推得 $\vdash F(x, v)\to\exists wF(w, v)$。

在这些式中，用三段论法，又得 $\vdash\forall vF(x, v)\to\exists wF(w, v)$。再在该式中，运用关于量词约束的第 I 法则后，再用第 II 法则，即得

$$\vdash\exists x\forall yF(x, y)\to\forall v\exists wF(w, v)。$$

最后用关于约束变量的改名法则，将 W 改为 x，v 改为 y 即得证。

【定理】41. $\vdash\forall x(F(x)\to G(x)\to(\forall xF(x)\to\forall xG(x)$。　①

$\vdash\forall x(F(x)\to G(x))\to(\exists xF(x)\to ExG(x)$、　②

证明　这里只证明②。

由真式：$\vdash\forall x(F(x)\to G(x)\to(F(x)\to G(x))$，用结论法则，式 $F(x)\to G(x)$ 可由 $\forall x(F(x)\to G(x))$ 导出，由该式又导出式 $G(y)\to\exists xG(x)$ 和 $F(y)\to G(y)$，再用三段论法、可得式 $F(y)\to\exists xG(x)$，该式还可以由 $\forall x(F(x)\to G(x)$ 导出、最后用关于量词约束的第 II 法则，把约束变量改名，即得式

$$\exists xF(x)\to\exists xG(x)。$$

该式也可由 $\forall x(F(x)\to G(x))$ 导出，因此②成立。　□

【定理】42. $\exists xF(x)\longleftrightarrow\overline{\forall x\overline{F(x)}}$,　①

$\exists x\overline{F(x)}\longleftrightarrow\overline{\forall xF(x)}$,　②

$\overline{\exists xF(x)}\longleftrightarrow\forall x\overline{F(x)}$　③

$\overline{\exists x\overline{F(x)}}\longleftrightarrow\forall xF(x)$。　④

证明　这里只证①，其余可类似证明。　□

由公理V①，有 $\vdash\forall x\overline{F(x)}\to\overline{F(y)}$，取其对偶，则因法则 $(\frac{a\to b}{b\to a})$ 有 $\vdash\overline{\overline{F(y)}}\to\overline{\forall x\overline{F(x)}}$。由此式及 $\vdash F(y)\to\overline{\overline{F(y)}}$，并利用三段论法，得

$\vdash F(y)\to\overline{\forall x\overline{F(x)}}$。由关于量词约束的第Ⅱ法则，把约束变量改名，即得 $\vdash \exists xF(x)\to\overline{\forall x\overline{F(x)}}\cdots\cdots a$

反之，在公理V(2)中，利用对偶法则，有$\vdash\overline{\exists xF(x)}\to\overline{F(y)}$，再用关于量词约束的第Ⅰ法则，把约束变量改名，该式就成为 $\vdash\overline{\exists xF(x)}\to\forall x\overline{F(x)}$ 在此，取对偶，即得 $\overline{\forall x\overline{F(x)}}\to\overline{\overline{\exists xF(x)}}$。又在该式与真式

$\overline{\overline{\exists xF(x)}}\to\exists xF(x)$中，用三段论法得

$$\overline{\forall x\overline{F(x)}}\to\exists xF(x)$$

在(a)，(b)中使用法则$\dfrac{a,\ b}{a\wedge b}$，即证得①。 □

§2．集合与运算

2.1半群

在高中代数学的对象是：实数，复数，二维向量，三维向量，而进行的演算是四则运算，即加、减、乘、除，以及开平方，开立方，求n次方根等。现在，代数学的对象变成任意集合了。此时，当如何规定它们的运算呢？为此，对集合及其运算，叙述规定运算的过程。

现设S为某一非空集合，S不必是数的集合。设a，b是S的任意二元。如果有序元素对$(a,\ b)$按一定的规则，与S中的元c对应，则称这样的对应关系为S的运算。我们用记号·表示该运算，故$c=a\cdot b$，叫做a，b经运算得c。

比如，在自然数集中，a加b得c，这一运算叫加法，用记号＋表示，写为$c=a+b$。同样，对二维向量a、b可定义加法运算，得到和向量。

例　设R是全体实数的集合（以后也这样假设）。使两个实数a，b的有序数对$(a,\ b)$对应于a，b之较大者，就得到R上的一种运算，记为

$$a\cdot b=\max(a,\ b)$$

设在集合S的元素中已定义了运算，而a，b，c是S的任意三个元，这时，$a\cdot b$是S的一个元，它再与C结合得$(a\cdot b)\cdot c$，今改变这一结合的先后顺序，即先作$(b\cdot c)$，再由a与$(b\cdot c)$结合，得$a\cdot(b\cdot c)$。显然，$(a\cdot b)\cdot c$与$a\cdot(b\cdot c)$一般是不等的。若对于S的任意三个元a，b，c有$a\cdot(a\cdot b)=(a\cdot b)\cdot c$。则称集合$S$关于运算满足结合律。

不难举出不满足结合律的例子．在R上定义运算$a\cdot b=a-b$．显然，有

③ $a-(b-c)\neq(a-b)-c$。

【定义】1 **半群** 若在非空集合 S 中定义的运算·恒满足结合律，则称 S 关于这个运算构成半群。

例1 R 关于加法运算构成半群。

例2. 全体整数的集合 Z，关于运算 $a\cdot b=a+b$ 构成半群，且关于运算 $a\cdot b=ab$ 也构成半群。

例3. 设 $C[0,1]$ 是闭区间 $[0,1]$ 上连续函数的全体。对于 $C[0,1]$ 的任意二元 $f(x)$，$g(x)$，定义运算 $(f\cdot g)(x)=f(x)+g(x)$，则 $C[0,1]$ 关于此运算构成半群。此外，它关于运算 $(f\cdot g)(x)=max\{f(x),g(x)\}$ 也构成半群。

证明 前半部分是明显的，只证后半部分。

首先，由 $\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)\}$ 知，

$(f\cdot g)(x)$ 是连续函数，所以 $(f\cdot g)(x)$ 是 $C[0,1]$ 的元素。

其次，设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 是 $C[0,1]$ 的任意三个元，则

$$(f\cdot(g\cdot h))(x)=max\{f(x),(g\cdot h)(x)\}=\max\{f(x),\max(g(x),h(x))\}=max\{f(x),g(x),h(x)\},$$

$$((f\cdot g)\cdot h)(x)=\max\{(f\cdot g)(x),h(x)\}=\max\{max(f(x),g(x)),h(x)\}=\max\{f(x),g(x),h(x)\}$$

因此得 $f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$。

故 $C[0,1]$ 关于这个运算成半群。

在半群 S 上，对于 S 的任意二元 a，b，若

$$a\cdot b=b\cdot a$$

成立，则称 S 为**可换半群**。

例4. Z，R 关于加法都构成可换半群，关于乘法也构成可换半群。

例5. 把自然数 a，b 的最大公约数表作 $a\cdot b$。则全体自然数的集合，关于这个运算，构成可换半群。若取 $a\cdot b$ 为 a，b 的最小公倍数，则全体自然数关于这一运算构成可换半群。

例6. 设集合 M 的所有子集构成的集合为 S，对 S 的两个元 A，B，定义运算 $A\cdot B=A\cup B$，则 S 关于这个运算是可换半群。若取 $A\cdot B=A\cap B$，则 S 对该运算也构成可换半群。

【定义】2. **左(右)单位元，单位元** 若 S 为半群，对于 S 的任意元 a，有 S 中的元 e 存在，使 $e\cdot a=a$ 恒成立，则称 e 是 S 的左单位元，同样，若这时有 S 中的元 e' 存在，使 $a\cdot e'=a$ 成立，则称 e' 为 S 的右单位元。若 e

既是 S 的左单位元，又是 S 的右单位元，就把 e 叫做 S 的单位元。

例 在 Z 上若取 $a \circ b = a + b$，关于这个运算，Z 的单位元为 0。又，若取 $a \cdot b = ab$，则 Z 的单位元为 1。

【定理】1. 若半群 S 既有左单位元又有右单位元，则这时 S 的左、右单位元是同一个元，而且唯一。

证明 设 e^* 是 S 的左单位元，$e^{\prime}$ 是 S 的右单位元，显然有

$$e^* = e^* \circ e^{\prime} = e^{\prime}。$$

即 $e^* = e^{\prime}$，故 S 的左、右单位元相同。

其次，证明左单位元只是一个，为此，设 $e^{*\prime}$ 也是 S 的左单位元，则

$$e^{*\prime} e^* = e^{\prime}。 e^{\prime} \circ e^* = e^{*\prime}。$$

故 $e^{*\prime} = e^{\prime}$，又因 $e^* = e^{\prime}$，故 $e^{*\prime} = e^*$，即左单位元存在唯一。同理，右单位元也存在唯一。 □

【定理】2. 若半群 S 有单位元，则它是唯一的。

证明 单位元既是左单位元又是右单位元因而是唯一的。即若单位元存在，必唯一。 □

【定义】3. 左(右)逆元 逆元 设 S 是有单位元 e 的半群。若 a，b 是 S 的两个元，且 $a \cdot b = e$ 成立，则称 a 是 b 的左逆元，b 是 a 的右逆元，当 b 同时是 a 的左逆元和右逆元时，b 叫做 a 的逆元，即当 $a \cdot b = b \circ a = e$ 时，b 叫做 a 的逆元。

【定理】3. 设 S 是有单位元 e 的半群，对于 S 的元 a 有左逆元 b 存在，则仅当 $c_1 = c_2$ 时 $a \circ c_1 = a \circ c_2$ 成立。

证明 在 $a \circ c_1 = a \circ c_2$ 两端分别左乘以 b，

得 $b \cdot (a \circ c_1) = b \cdot (a \circ c_2)$。

或 $(b \cdot a) \circ c_1 = (b \circ a) \circ c_2$，

因 $b \cdot a = e$，故 $c_1 = c_2$。 □

【定理】4. 设 S 是有单位元 e 的半群，a、c 是 S 的元。如果 a 的左逆元 b 存在，则满足 $a \cdot x = c$ 的解存在而且唯一。

证明 在 $a \cdot x = c$ 的两端同时左乘以 b，

得 $b \cdot (a \cdot x) = b \circ c$

即 $x = b \circ c$。

又由【定理】3，若有 $a \circ x_1 = a \circ x_2$，必 $x_1 = x_2$

故解 $x = b \cdot c$ 是唯一的。 □

【定理】5. 设 S 是有单位元 e 的半群，当 S 的元 a 既有左逆元又有右逆元时，这样的左、右逆元是同一个而且是唯一的。

证明 设 b, b' 分别是 a 的左逆元和右逆元，

则 $$b=b\circ e=b\circ(a\circ b')=(b\circ a)\circ b'=e\circ b'=b',$$

即有 $b=b'$，b, b' 是 a 的逆元，又设左逆元不唯一，且 b_1, b_2 同是 a 的左逆元，则有

$$b_1=b_1\circ e=b_1\circ(a\circ b_2)=(b_1\circ a)\circ b_2=e\circ b_2=b_2,$$

即 $b_1=b_2$。故左逆元唯一，又因左、右逆元相等，故右逆元也唯一。

【系】 设 S 是有单位元的半群，若 S 的元 a 有逆元，则它唯一。

证明 因 a 的逆元同时是它的左逆元和右逆元，利用【定理】5 该逆元必唯一。

【定理】6. 若 a 的逆元存在，并用 a^{-1} 表示它，则 a^{-1} 的逆元 $(a^{-1})^{-1}$ 必存在且为 a。

证明 因 a^{-1} 既是左逆元，又是右逆元，故

$$a^{-1}\circ a=a\circ a^{-1}=e.$$

因此，$(a^{-1})^{-1}=a$。 □

【定理】7 设 a, b 是半群 S 的元.若 a^{-1}, b^{-1} 存在，则 $a\circ b$ 的逆元也存在，且有 $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$.

证明 $$(b^{-1}\circ a^{-1})\circ(a\circ b)=b^{-1}\circ(a^{-1}\circ a)\circ b$$
$$=b^{-1}\circ e\circ b=b^{-1}\circ b=e,$$
$$(a\circ b)\circ(b^{-1}\circ a^{-1})=a\circ(b\circ b^{-1})\circ a^{-1}=a\circ e\circ a^{-1}=a\circ a^{-1}=e,$$

故 $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$. □

2·2 群

在半群中仅假设了运算的结合律对其所有的元皆成立；而未涉及单位元和逆元的存在性. 若在半群中假定单位元存在，各元的逆元也存在，那么在实数中进行的四则运算或许也能顺利进行. 这就蕴含了群的概念，下面，首先给群下个定义。

【定义】4. 群 设在集合 G 中定义了运算 $\circ$，当下列条件都满足时，则称 G 关于这个运算成群.

(i) G 是关于这个运算的半群；

(ii) G 有单位元；

(iii) 对 G 中的任意元 a，其逆元也在 G 中.

因半群的单位元唯一，故 G 的单位元也唯一.把它记为 e，把 a 的唯一的逆元记为 a^{-1}.若在半群中，运算不能交换，则对相应的群而言，运算也不能交换，假若在群中运算可交换，则得如下定义。

【定义】5. 可换群(阿贝尔群) 对于群 G 中的任意二元 a,b，当 $a\cdot b=b\cdot a$ 成立时，G 称为可换群或阿贝尔群.

群 G 的元素个数有限时，称为**有限群**. 当其元素个数无限时，称为**无限群**，对于有限群，把群中元素的个数叫做该群的**阶数**

群的运算，一般都采用乘法记号表示. 用乘法记号表示的群叫**乘群**，在乘群中，元素 a 的逆元记为 a^{-1}，有时用 1 表示单位元.显然，

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{-1}=a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$

特别地，a 的乘幂的逆元满足等式

$$(a^n)^{-1}=(a^{-1})^n.$$

这时，若定义 $a^0=1$，$a^{-n}=(a^n)^{-1}$(n 为正整数)，则当 m,n 是任意整数时，

$$a^ma^n=a^{m+n},$$
$$(a^m)^n=a^{mn}$$

成立.若 $ab=ba$，则还有

$$(ab)^n=a^nb^n$$

成立.

阿贝尔群中运算符号用加号"+"，元 a 和元 b 运算的结果表示为 $a+b$. 当使用"+"号时，把该运算形式地叫做加法，把运算的结果叫做和，把用"+"号表示运算的(阿贝尔)群叫做加法群或加群.

在加群中，群的单位元叫零元，用 0 表示，这里的 0 是由 $a+0=a$ 唯一确定的元，同时，a 的逆元，即是满足 $a+a'=0$ 的元 a' 用 $-a$ 表示.

$$a+(-a)=0,\ (-a)+a=0.$$

把 $a+(-b)$ 写成 $a-b$，叫做由 a 减去 b 的差. $a-b$ 是 $x+b=a$ 的解. 作为逆元的性质，以下各式成立：

$$-(-a)=a,\ -(a+b)=-a-b,\ -(a-b)=-a+b.$$

在乘群中的乘幂 $a\cdot a\cdots a$ 表作 a^n. 在阿贝尔群中，把 n 个 a 连续相加所得的和 $a+a+\cdots+a$ 表作 na. 特别地，有 $1a=a$.

又因 $-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(-a_1)+(-a_2)+\cdots+(-a_n)$，故有

$$-(na)=n(-a)\ (n\text{ 为正整数}).$$

这时若定义 $0a=0$，$(-n)a=-(na)$，则当 n 为任意整数时，下列各式成立：

$$ma+na=(m+n)a,$$
$$m(na)=(mn)a,$$
$$m(a+b)=ma+mb.$$

下面列举群的一些例子.

例1. Z, R 关于加法成群，单位元是 0，元 a 的逆元是 $-a$.

例2. 二维向量空间，关于向量的加法成群.单位元是零向量，向量 a 的逆元是向量 $-a$.

例3. 设行列式值为 1 的所有二阶矩阵的集合为 G，则 G 关于矩阵的乘法成群.

证明 设 A, B 是两个二阶矩阵，它们的行列式的值都为 1.

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},\quad (a_id_i-b_ic_i=1;\ i=1,2)$$

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+c_2d_1 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

AB 的行列式为

$$\begin{aligned} |AB| &= (a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2)-(a_1b_2+b_1d_2)(c_2a_2+d_1c_2) \\ &= a_1d_1(a_2d_2-b_2c_2)-b_1c_1(a_2d_2-b_2c_2) \\ &= (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2)=1. \end{aligned}$$

故 AB 也是 G 的元，通过计算易证：在 G 中结合律是成立的.

G 的单位元为矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆元为 $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. 故 G 关于乘法成群.

例4. 设 G 为 $f(x)=\dfrac{ax+b}{ex+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 的全体，对于 G 的二元 $f(x)$, $g(x)$，定义 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的积为 $fg(x)=f(g(x))$，则 G 关于此运算成群.

证明 设 G 中二元 $f(x)=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$，$g(x)=\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ $(a_id_i-b_ic_i\neq 0,\ i=1,2)$，则

$$fg(x)=f(g(x))=\frac{a_1g(x)+b_1}{c_1g(x)+d_1}=\frac{a_1\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+b_2}+b_1}{C_1\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}+d_1}$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1c_2)x+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+c_2d_1)x+c_1b_2+d_1d_2}.$$

若让 $f(x)$, $g(x)$ 分别对应于例 3 中的矩阵 A, B，则 $fg(x)$ 对应于 AB，故运算结合律显然成立，这时，群的单位元为

$$\frac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}=x.$$

对于元$\frac{ax+b}{cx+d}$容易求得其逆元为$\frac{dx-b}{-cx+a}$，故G关于乘法成群。

例5. 设G是1的n次方根：

$$a^n=1,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{n-1}\left(a=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$的全体，则

G关于复数乘法构成阶数为n的有限群，单位元是1，a^k的逆元是a^{n-k}。

例6. 设G是集合$M=\{1,2,3\}$到其自身的映射∂的全体。例如，若$\partial(1)=2$，$\partial(2)=1$，$\partial(3)=3$，则∂可表成下形：

$$\partial=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

易知G由如下6个映射所构成：

$$\partial_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \partial_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},\quad \partial_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$\partial_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad \partial_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad \partial_6=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

定义∂_j与$\varrho_j(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$的积$\delta i\delta j(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$为先作置换$\delta i$再作置换$\delta j$所得到的置换。例如，

$$\partial_2\partial_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\partial_1,\quad \partial_3\partial_5=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\partial_4.$$

于是，可以证明G关于以上运算成群.

证明$\partial_i=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}\partial_j=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ j_1 & j_2 & j_3\end{pmatrix}$，$\partial_k=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}$.

$$\sigma_i(\sigma_j\sigma_k)(m)=(\sigma_j\sigma_k)\sigma_i(m)=\sigma_k(\sigma_j(\sigma_i(m))).$$
$$(\sigma_i\sigma_j)\sigma_k(m)=\sigma_k(\sigma_i\sigma_j(m))=\sigma_k(\sigma_j(\sigma_i(m))),$$
$$(m=1,2,3).$$

因此，结合律成立，G的六个元素中，两两相乘的积，可列表如下、由表看出，G的单位元为σ_1，σ_1，σ_2，σ_3，σ_4，σ_5，σ_6的逆元分别为σ_1，σ_2，σ_3，σ_4，σ_5，σ_6，故G关于上面定义的乘法运算成群(它叫做置换群)

先 后	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	σ_6	σ_4	σ_5
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	σ_5	σ_4	σ_6
σ_4	σ_4	σ_5	σ_6	σ_1	σ_2	σ_3
σ_5	σ_5	σ_6	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2
σ_6	σ_6	σ_4	σ_5	σ_2	σ_1	σ_1

例7. 若两个整数 a,b 的差 $a-b$ 能被正整数 $n(n\geqslant 2)$整除，则 a,b 叫做模 n 同余，记为

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n).$$

这时，下列等价关系成立：

$a\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$.

若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$，则 $b\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$.

若 $a\equiv b$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\,n)$，则 $a\equiv c(\mathrm{mod}\,n)$.

若把与整数 a 同余的全体整数的集合记为$C(a)$，则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)\Longleftrightarrow C(a)=C(b)$成立.事实上，若$x\in C(a)$，则$\dfrac{x-b}{n}=\dfrac{x-a}{n}+\dfrac{a-b}{n}$为整数，故 $x\in C(b)$，反之，由 $y\in C(b)$易得 $y\in C(a)$.因此，$C(a)\supseteq C(b)$，且 $C(b)\supseteq C(a)$，所以 $C(a)=C(b)$.

反之，若$C(a)=C(b)$，则因 $a\in C(a)$，得$a\in C(b)$故$\dfrac{a-b}{n}$为整数，即 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$.

若 $a\not\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$，则 $C(a)\neq C(b)$，且 $C(a)\cap C(b)=\phi$成立，因为，若是 $C(a)\cap C(b)\neq\phi$，则存在公共元 c，c 是与 a,b 都同余的，从而 a 与 b 也同余，因此 $C(a)=C(b)$，这与假设相矛盾.

对于任意的整数 a 和正整数 n，总有整数 q,r 满足等式

$$a=nq+r,\ 0\leqslant r<n.$$

故有 $a\equiv r(\mathrm{mod}\,n)$且 $a\in C(r)$.对于 $r=0,1,2,\cdots,n-1$，可得 n 个两两不含公共元的集合$C(0)$，$C(1)$，$C(2)$，$\cdots$，$C(n-1)$.因此，全体整数可分为 n 个类 $C(0)$，$C(1)$，$\cdots$，$C(n-1)$.凡属同一类的数都同余，属不同类的数都不同余，我们把这样的类$C(r)$叫做模 n 的同余类.

比如，当 $n=2$ 时，有两个同余类 $C(0)$，$C(1)$，也就是说，它把所有整数分成了奇数类和偶数类. 当 $n=3$ 时，有 $C(0)$，$C(1)$，$C(2)$，于是全体整数被分成了 $\{3m\}$，$\{3m+1\}$，$\{3m+2\}$ 三类，整数的同余问题，是经常被用到的.

对于整数的同余，如下关系成立.

若 $a\equiv a'$，$b\equiv b'(\bmod n)$，则 $a+b\equiv a'+b'(\bmod n)$.

若 $a\equiv a'$，$b\equiv b'(\bmod n)$，则 $ab\equiv a'b'(\bmod n)$.

因此，若 $C(a)=C(a')$，$C(b)=C(b')$，则 $C(a+b)=C(a'+b')$，$(ab)=C(a'b')$. 如果在同余类中，加法和乘法按如下方式定义：

$$C(a)+C(b)=C(a+b),\ C(a)C(b)=C(ab),$$

则同余类的全体关于上述加法构成可换群，它显然满足结合律：

$$C(a)+\{C(b)+C(c)\}=C(a)+C(b+c)=C(a+b+c),$$

$$\{C(a)+C(b)\}+C(c)=C(a+b)+C(c)=C(a+b+c).$$

单位元是 $C(0)$，$C(a)$ 的逆元是 $-C(a)=C(-a)$.

又同余类的全体，关于乘法构成可换半群，该半群的单位元是 $C(1)$.

下面我们对子群作一简要介绍.

【定义】6. 子群　若群 G 的子集 H 对于群 G 的运算也成群，则称 H 为 G 的子群，也就是说，群 G 的子集 H 满足如下条件时，构成子群：

(i)　若 $a,b\in H$，则 $ab\in H$；

(ii) 若 $a\in H$，则 $a^{-1}\in H$.

例1　加群 $\mathbf{Z}$ 是加群 $\mathbf{R}$ 的子群.

例2　6 个分式线性变换

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=\frac{1}{-x+1},\ f_2(x)=\frac{x-1}{x},$$

$$f_3(x)=-x+1,\ f_4(x)=\frac{1}{x},\ f_5(x)=\frac{x}{x-1}$$

是分式线性变换群 $\left\{\dfrac{ax+b}{cx+d}\right\}(ad-bc\neq 0)$ 的子群.

2·3　半群的同态·群的同态

【定义】7. 同态映射　设 X，Y 是半群各有一个运算 $\circ$，$\bar{\circ}$，f 是 X 到 Y 的映射. 如果对于 X 的任意二元 x_1，x_2 有

$$f(x_1\circ x_2)=f(x_1)\,\bar{\circ}\,f(x_2)$$

成立，则称映射 f 为 X 到 Y的同态映射.

例1. 设 $X\subset R$ 为加法半群，$Y\subset R$ 为乘法半群. 若 $f(x)=e^x$，则

$$f(x_1+x_2)=e^{x_1+x_2}=f(x_1)\cdot f(x_2),$$

故它是加法半群 X 到乘法半群 Y的同态映射.

例2. 设 $X=C[0,1]$，$Y=R$. 定义 X 到 Y的映射 F 为

$$F(f(x))=\int_0^1 f(x)dx,(f(x)\in C[0,1])$$

则 F 是由加法半群 $C[0,1]$到加法半群 R 的同态映射.

例3. 设 X 是可微函数的全体. Y是单值函数全体的集合，定义 X 到 Y的映射 D 为：对 X 的所有元$f(x)$，有

$$Df(x)=\frac{d}{dx}f(x),$$

则 D 是由加法半群 X 到加法半群 Y的同态映射

下面谈谈同构映射：

【定义】8. 单一同态映射、同构映射 若由半群 X 到半群 Y的同态映射是一对一的，则此映射叫做单一同态映射，如果 X 到 Y的单一同态映射是X 到 Y上的满映射，则叫做同构映射.

例 $f(x)=e^x$ 是由加法半群 R 到乘法半群 $R^+=\{x \mid x>0$ 的实 数$\}$上的同构映射.

关于半群的同态及同构的概念对群也完全适用.

要对群进行深入地了解，请参考专门的书藉，下面我们转向环和域的介绍.

2·4 环

至此，我们在一个集合上只定义了一种运算，但是，正如在作数的计算时，使用加法和乘法一样，在很多情形，对于一个集合需要同时定义它的元素间的两种运算，这样，环的概念就产生了.

【定义】9. 环，可换环 假设在集合 S中定义了两种运算，一种叫做加法，另一种叫做乘法，把 S的元 a,b 的加法运算写成 $a+b$，乘法运算 写 成 $a\cdot b$. 当 S关于加法和乘法满足下列条件时，就叫做环.

(i) S关于加法是可换群，该加法群的单位元叫做零元，记为0.

(ii) S关于乘法是半群.

(iii) 设 a,b,c 是 S 的任意三个元素，则乘法对于加法的分配律成立.

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$，$c(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$.

若环 S关于乘法可换，则称S为可换环.

例 1. Z关于通常意义下的加法和乘法成环.这时，Z 叫做**有理整数环.** Z 是可换环.

例 2. 在$C[0,1]$中定义两个元素$f(x)$，$g(x)$的和为$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，积为$f\cdot g(x)=f(g(x))$，则按上述定义$C[0,1]$成环.

下面叙述环的性质.

【定理】8. 设S是环，其关于加法的单位元(零元)是0. 则对于S的任意元a，成立.

$$a\cdot 0=0\cdot a=0$$

证明 $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$,

在其两端加上$a\cdot 0$关于加法的逆元$-(a\cdot 0)$，得

$$0=a\cdot 0.$$

又在　$0\cdot a=(0+0)\cdot a=0\cdot a+0\cdot a$

两端加上$-(0\cdot a)$，得

$$0=0\cdot a,$$

$$\therefore\quad a\cdot 0=0\cdot a=0.$$ □

【定理】9. 设S是环，a、b是S的元，则下式成立：

$$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b).$$

证明 $(-a)+a=0$,

$$0=0\cdot b=((-a)+a)\cdot b=(-a)\cdot b+a\cdot b,$$

$$\therefore\quad (-a)\cdot b=-(a\cdot b),$$

$$0=a\cdot 0=a\cdot(b+(-b))=a\cdot b+a\cdot(-b).$$

$$\therefore\quad a(-b)=-(a\cdot b),$$

$$\therefore\quad (-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b).$$ □

【定理】10. 设S是环，a、b是S的元，则当m、n是任意整数时，有

(1) $ma+na=(m+n)a$;

(2) $ma+mb=m(a+b)$;

(3) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

(4) $(ma)\cdot(nb)=(mn)(a\cdot b)$

成立.

证明 (1)，(2)，(3)显然成立，至于(4)，使用分配律即可得证. □

现在给出子环的定义，我们象在群的情况一样，自然地引入.

【定义】10. 子环　设S是环且A是S的非空子集合. 当A满足如下条件时，叫做S的子环.

(i) S作为加群时，A 是 S的子群.

(ii) S作为乘法半群时，A 是S 的子半群.

例1. 若 S是环时，则$\{0\}$ 是S 的子环.证明从略.

例2. 设 n 是 Z 的任意元，则 $Z\cdot n$ 是环 Z 的子环.

证明 对设 an，bn 为$Z\cdot n$ 的任意二元，则

$an+bn=(a+b)n\in Z\cdot n.$

$z\cdot n$ 的单位元是 $0\cdot n=0$，

an 的逆元取作$(-a)n$.

又由于　$(an)(bn)=(abn)\cdot n\in \cdot Zn,$

故 $Z\cdot n$ 是 Z 的子环.

例3. 以整数为元素的二阶矩阵的全体 L，关于矩阵的加法，乘法成环，这时 L 关于乘法的单位元是$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

若取 L 的子集合 A 为

$$A=\left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\middle| x\in Z\right\}.$$

则 A 是 L 的子环，这时 A 的单位元为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，它与$L$ 的单位元不同，但是关于加法的零元都是$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例4. 定义在$[0,1]$上的多项式的全体$P[0,1]$，其加法，乘法按$C[0,1]$ 的加法，乘法定义，

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),$$

则 $P[0,1]$构成 $C[0,1]$的可换子环.

2·5 域

在环的定义中，关于加法是可换群，关于乘法是半群，而在本节我们希望关于乘法也成群，在这种情形下，当考虑乘法的逆元时，就在加法的单位元，即零元的逆元的存在问题上产生了困难，为此，我们假定去掉零元也就关于乘法成群了.这就导致了所谓域的概念.

【定义】11. 域　若在非空集合 F 中定义了两种运算，加法和乘法，且满足如下的条件，则称 F 为域.

(i) F 关于加法，乘法成环.

(ii) 设 0 是环 F 的零元，令 $F-\{0\}=F^*$，则 F^*关于乘法成群(令 F^*

的单位元为 I，则它也是 F 的单位元)。

【定义】12. 可换域　非可换域　若域 F 作为环是可换的(也就是 F^* 是可换群)，则 F 叫做可换域；F 作为环不可换时，叫做不可换域。

例1. Q(有理数的全体)，R，C(复数的全体)，分别是可换域。

例 2. 把 $\{x+y\sqrt{2} \mid x,y\in Q\}$ 表成 $Q+Q\sqrt{2}$。这时 $Q+Q\sqrt{2}$ 对于通常的加法和乘法构成可换域。

证明　设 $x_1+y_1\sqrt{2}$，$x_2+y_2\sqrt{2}$ 是 $Q+Q\sqrt{2}$ 的任意二元。

则 $$(x_1+y_1\sqrt{2})+(x_2+y_2\sqrt{2})=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\sqrt{2}\in Q+Q2$$

$$(x_1+y_1\sqrt{2})(x_2+y_2\sqrt{2})=(x_1x_2+2y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\sqrt{2}$$

$$\in +QQ\sqrt{2}.$$

关于加法和乘法的单位元分别是 $0+0\sqrt{2}$ 和 $1+0\sqrt{2}$，

关于加法，$x+y\sqrt{2}$ 的逆元是 $-x+(-y)\sqrt{2}$。

关于乘法 $x+y\sqrt{2}\,(\neq 0)$ 的逆元是

$$\frac{1}{x+y\sqrt{2}}=\frac{x-y\sqrt{2}}{x^2-2y^2}=\frac{x}{x^2-2y^2}+\frac{-y}{x^2-2y^2}\sqrt{2}.$$

∴ $Q+Q\sqrt{2}$ 是可换域

【定理】11. 设 F 是域，a，b 是 F 的元素，则只要 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 必有 $a\cdot b\neq 0$。

证明　据域的定义，$F^*=F-\{0\}$ 关于乘法成群，故 $a\cdot b\neq 0$。

【定义】13. 子域　扩张域　设 k 是域，k 是 k 的子集合，若 k 满足下列条件，则称 k 为 k 的子域，同时称 k 为 k 的扩张域。

(*i*) 把 k 作为环来考虑时，k 是 k 的子环。

(*ii*) $k^*=k-\{0\}$ 是 $k^*=k-\{0\}$ 的子群。

例　Q 是 R 的子域，R 是 C 的子域。

2·6　有序域

我们先讲有序集合。若在集合 M 的元素间确定了一个关系≤，且当下列三个条件

(1)　$x\leqslant x$　(自反性)

(2)　$x\leqslant y$，$y\leqslant x$，则 $x=y$　(对称性)

(3)　$x\leqslant y$，$y\leqslant z$　则 $x\leqslant z$　(传递性)

都满足时，把≤叫做 M 上的**序或半序**，而把 M 叫做关于这个序的**(半)序集**，又把同时满足 $x\leqslant y$ 和 $x\neq y$ 的关系，记成 $x<y$。记号 $x\leqslant y$，$x<y$ 也可以分别写成 $y\geqslant x$，$y>x$。

对于半序集的任二元，当关系式 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 中至少有一个成立时，称 $\leqslant$ 为全序，称 M 为关于 $\leqslant$ 的全序集合。

若把半序集 M 的子集合 A 的元素间的半序用 M 上的半序来定义，则 A 也是半序集，A 叫做**子(半)序集**。

例1. Z，Q，R 对于大小关系 $\leqslant$ 分别构成全序集。

例2. 设非空集 M 的全体子集合组成的集合为 F，对于 F 的两元 A，B，若 $A\subset B$，则定义为 $A\leqslant B$，那末 F 关于该序构成半序集。

当可换域 K 是有序集，加法群是有序群，且满足公理：

若 $x>y$，$z>0$ 则 $xz>yz$

时，K 叫做**有序域**

【定理】12. 有序域 K 为全序集的充分必要条件是：当 K 的一切正元的集合为 P 时，有 $K=P\cup\{0\}\cup(-P)$。

证明 设 K 是全序集，故对于 K 中的任意二元 x，y，必然以下关系之一成立：

$$x>y,\ x=y,\ x<y。$$

当 $x>y$ 时，有 $x-y>0$，从而 $x-y\in p$；当 $x=y$ 时，有 $x-y=0$；当 $x<y$ 时，则 $x-y\in -p$。故必有 $K=p\cup\{0\}\cup(-p)$。

反之，设 $K=p\cup\{0\}\cup(-p)$，则对于 K 的任意二元 x,y，由于 $x-y\in K$，必有 $x-y\in p$，$x-y=0$，$x-y\in -p$，三者之一成立，故

$$x>y,\ x=y,\ x<y$$

中也必有一个成立，即 K 是全序集 □

【定理】13. 设有序域 K 是全序集，则 K 含有和 Q 同构的有序域。

证明 据【定理】12，$K=P\cup\{0\}\cup(-P)$，设 $1\in -P$ 则 $-1\in P$，从而 $(-1)(-1)=1\in P$，矛盾，故 $1\in P$。由于对于 $n\in N$，$n\mathrm{I}=\mathrm{I}+\mathrm{I}+\cdots+\mathrm{I}\in P$，$(n\mathrm{I})(n\mathrm{I})^{-1}=1$，故 $(n\mathrm{I})^{-1}\in P$，设 Q 到 K 的同构映射为 φ：$\varphi\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{m\mathrm{I}}{n\mathrm{I}}(m\in Z,\ n\in N)$。于是，若 $x\in Q$，则有 $\varphi(x)>0$。反之，也成立，因此 φ 是把 Q 映入 K 的有序同构映射。

【定理】14. 设有序域 K 是全序的，且 $K\supset Q\supset Z$，若对任意的 $x\in K$，存在 n 使 $x<n$，则称 K 为阿基米德有序域。对于阿基米德有序域 K 总有关系式 $Q\subset K\subset R$ 成立。 □

证明 今证明：对任意 a，$b\in K$，若 $a<b$，则有 $r\in Q$ 使 $a<r<b$。据假设，有 m，$n\in Z$ 使 $m<a<b<n$。取一个 $I\in N$ 使 $(b-a)^{-1}<I$。这时，记集合 $\{m+kI^{-1}|k=0,1,\cdots,I(n-m),m+kI^{-1}<b\}$ 中最大元为 $m+k_0\cdot I^{-1}$，

则 $m+k_0I^{-1}\in Q$，且 $a<m+k_0I^{-1}<b$，令 $m+k_0I^{-1}=\bar{r}$，这就是所要求的 $\bar{r}$。对于 $x\in K$，取 $\bar{r}_1$，$S_1\in Q$ 使 $x-1<\bar{r}_1<x<S_1<x+1$，$\bar{r}_1$，…，$\bar{r}_n$，S_1，…，S_n 确定之后，再取 $\bar{r}_{n+1}$，$s_{n+1}\in Q$ 使 $\max\left(y_n,\ x+\frac{1}{n+1}\right)<\bar{r}_{n+1}<x<s_{n+1}<\min\left(s_n,\ x+\frac{1}{n+1}\right)$ 成立，显见，数列 $\{\bar{r}_n\}$ 是单调增加有上界的，$\{s_n\}$ 是单调减少下有界的，因 $s_n-\bar{r}_n<\frac{2}{n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{r}_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n\in R$ 存在，设这个极限值为 y 它与有理数列的选取方式无关，只随 x 而定，故 $K\ni x\longleftrightarrow y\in R$ 是 K 到 R 中的保序的同构映射，于是 $K\subset R$。由于 $Q\subset K$ 是已知条件，∴定理完全得证。 □

2.7 格

对于集合 M 的两个子集合 A，B，和集记为 $A\cup B$，交集记为 $A\cap B$，M 的子集全体就包含关系 $\supset$ 构成有序集，在这样的序的意义下 $A\cup B$ 为 $\{A,B\}$ 的上限，$A\cap B$ 为 $\{A,B\}$ 之下限。将此概念推广，即可得格的定义

【定义】14．格 设 L 为有序集，对于 L 的任意二元 a，b，若 $\{a,b\}$ 的上下限存在，且属于 L，则称 L 为格

设 L 是格，且对于 a，$b\in L$，$\{a,b\}$ 的上限 $Sup\{a,b\}$ 和下限 $inf\{a,b\}$ 分别记为 $a\cup b$ 和 $a\cap b$，则如下的(1)≈(4)成立

(1) 幂等律 $a\cup a=a$，$a\cap a=a$；

(2) 结合律 $(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$，
$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$；

(3) 交换律 $a\cup b=b\cup a$，$a\cap b=b\cap a$；

(4) 吸收律 $(a\cup b)\cap a=a$，$(a\cap b)\cup a=a$。

把 $\cup$，$\cap$ 作为 L 上的运算时，随便对哪一种运算，结合律，交换律都成立；故 L 关于这些运算构成可换半群；而且关于此二运算的两个吸收律皆成立。能不能把格认为是满足上述(1)、(2)，(3)，(4)等运算的有序集合呢？对此，有下面的定理

【定理】15． 设在集合 L 上，定义了两种运算 $\cup$，$\cap$，且 L 关于每一种运算构成可换半群，两个算法间的幂等律(1)和吸收律(4)也成立。则当在 L 上定义了顺序关系 $\leqslant$ 时，$(L,\ \leqslant)$ 成为格，且 $a\cup b$，$a\cap b$ 分别与 $(L,\ \leqslant)$ 上 $\{a,b\}$ 的上、下限一致，

证明 设对 L 的任意两个变元 a，b，定义序的关系为 $a\leqslant b$ $a\cup b=b$，$a\cap b=a$，于是，可以证明 L 关于这个顺序满足如下序公理(1)，(2)，(3)，

(1) $a\leqslant a$,

(2) $a\leqslant b$, $b\leqslant c$ 则 $a\leqslant c$,

(3) $a\leqslant b$, $b\leqslant a$, 则 $a=b$。

事实上，由幂等律，(1)显然成立。以下证明(2)成立。

$a\leqslant b$, $b\leqslant c$，改写出来便是 $a\cup b=b$, $b\cup c=c$，利用结合律有

$a\cup c=a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c=b\cup c=c$，故 $a\cup c=c$。

又据，$a\cap b=a$, $b\cap c=b$ 有

$a\cap c=(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)=a\cap b=a$，故 $a\cap c=a$,

所以 $a\leqslant c$ 成立

至于(3)，由 $a\cup b=b$, $b\cup a=a$，及 $a\cup b=b\cup a$，即得 $a=b$。

剩下要证明，在此顺序下，$\{a, b\}$的上，下限分别与 $a\cup b$ 和 $a\cap b$ 一致。

由吸收律，交换律有

$a\cap(a\cup b)=a$, $b\cap(a\cup b)=b$。

$\therefore$ $a\leqslant a\cup b$, $b\leqslant a\cup b$，即 $\sup\{a, b\}\leqslant a\cup b$，又，据结合律 $a\cup c=c$, $b\cup c=c$，故 $(a\cup b)\cup c=c$。因此，由 $a\leqslant c, b\leqslant c$ 得 $a\cup b\leqslant c$，即 $a\cup b$ 与 $\{a, b\}$ 的上限一致。

通过交换 $\cup$, $\cap$ 的位置同理可证，$\{a, b\}$的下限与 $a\cap b$ 一致。 □

根据这个定理，可以把格定义为满足结合律，交换律、吸收律的两个运算 $\cup$, $\cap$ 所确定的集合，这三个定律也叫做**格的公理**。运算 $\cup$、$\cap$ 分别叫做并运算和交运算。

例 在 $\mathbf{R}$ 上，对于两个实数 a, b，定义 $a\cup b=\max(a, b)$, $a\cap b=\min(a, b)$，则

关于这个运算，$\mathbf{R}$ 成格。

证明 $a\cup a=a$ 这一条，由 $\mathrm{Max}(a, a)=a$ 而得证。$a\cap a=a$ 这一条，由 $\mathrm{Min}(a, a)=a$ 得证，所以幂等律成立。又对三个数 a, b, c 有

$$\max(a, \max(b, c))=\max(a, b, c),$$

$$\max(\max(a, b), c)=\max(a, b, c),$$

故结合律成立。

因为可用 min 来代替 max，故

$$a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c.$$

也成立。

交换律显然成立。现在证明对 $a\geq b$ 吸收律也成立，此即

$(a\cup b)\cap a=\min\{\max(a, b), a\}=\min(a, a)=a$,

$(a\cap b)\cup a=\max\{\min(a,\ b),\ a\}=\max(b,\ a)=a$。

故 R 成格

下面就布尔代数作一简要的介绍，若某集合 M 的全体子集合 L，关于包含关系成格、则这个格满足如下三个条件：

(1) 对于 L 的任意元 x，y，z，分配律

$$x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z),$$
$$x\cup(y\cap z)=(x\cap y)\cup(x\cup z)。$$

成立。

(2) 对 L 的任意元 x，有 L 的元 I 和 0 存在，使

$$I\geqslant x\geqslant 0$$

成立，即是说 I，0 分别是 L 的最大元和最小元。

(3) 对 L 的任意元 x，有 L 的元 x' 存在，满足

$$x\cup x'=I,\qquad x\cap x'=0。$$

事实上，由集合的运算，(1) 显然成立，至于(2)，只要取 $I=M$，$0=\phi$ 即可，对于(3)，只要取 x 的补集合为 x' 即可，一般地有：

〔定义〕15．布尔代数·布尔格·相补格·补元 当一个非空格满足上述三个条件时，我们把它叫做布尔代数或布尔格，把 (2)，(3) 一起叫做相补律，把 x' 叫做 x 的补元。

若不考虑相补律，则把只满足分配律的格叫做**分配格**。若不考虑分配律，则把只满足相补律的格叫做**相补格**。

在条件(3)中只说及补元的存在，而实际上在布尔代数中，补元还是唯一的，若不是这样，假设相应于 x 有两个补元 x'，x''，则由于

$$x\cup x'=x\cup x''=I,\quad x\cap x'=0,\quad x\cap x''=0,$$

有 $x'=x'\cap I=x'\cap(x\cup x'')=(x'\cap x)\cup(x'\cap x'')=0\cup(x'\cap x'')=x'\cap x''$，同理有 $x''=x''\cap I=x''\cap(x\cup x')=(x''\cap x)\cup(x''\cap x')=0\cup(x''\cap x')=x''\cup x'$．

根据 $x'\cap x''=x''\cap x'$，

则得 $x'=x''$．

同时，在布尔代数中，集合的运算，满足德·摩根法则：

$$(x\cup y)'=x'\cap y',\ (x\cap y)'=x'\cup y'.$$

事实上因 $(x\cup y)\cup(x'\cap y')=((x\cup y)\cup x')\cap((x\cup y)\cup y')$

$$=((x\cup x')\cup y)\cap(x\cup(y\cup y'))$$
$$=I\cap I=I,$$

$$(x\cup y)\cap(x'\cap y')=(x'\cap y'\cap x)\cup(x'\cap y'\cap y)$$

$=o\cup o=0$.

所以　$(x\cup y)'=x'\cap y'$.

又因　$(x'\cup y')\cup(x\cap y)=(x'\cup y'\cup x)\cap(x'\cup y'\cup y)$

$I\cap I=I$,

$(x'\cup y')\cap(x\cap y)=(x'\cap x\cap y)\cup(y'\cap x\cap y)=o\cup o=0$,

所以　$(x\cap y)'=x'\cup y'$.

2·8　数

数是数学中最基本的概念之一，在各种数当中最基本的又是自然数。我们所关心的不是个别数的问题，而是数的集合．数的集合，也不仅仅是个单纯的集合，而是在其中定义了一些运算和关系以及有关的数学结构的集合，象这样的数集，叫做**数系**．现在从自然数讨论起．

所谓**自然数系** N 是由无定义谓词 1，后继元以及下述的五条公理(称之为皮亚诺公理)所构成：

【公理】1．$1\in N$

2．对于 N 的任意元素 x，叫做 x 的后继元的自然数 x' 是唯一的．

3．在 N 中不存在以 1 为后继元的元素．

4．若 $x'=y'$，则 $x=y$.

5．设 M 是 N 中具有如下两个性质的子集：

(i) $1\in M$,

(ii) 若 $x\in M$，则 $x'\in M$.

那么 $M=N$.

在自然数系 N 中，叫做**加法**的运算按如下方式来定义：

(i) 对于 $x\in N$，有 $x+1=x'$.

(ii) 对于 $x,y\in N$，有 $x+y'=(x+y)'$.

这时 N 关于加法构成半群，实际上，可以证明对于任意 $x,y,z(\in N)$，结合律

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

成立.

证明　对 z 使用归纳法

$z=1$ 时，左边 $=x+(y+1)=x+y'=(x+y)'=(x+y)+1=$ 右边.

设 $z=k$ 时结合律成立：$x+(y+k)=(x+y)+k$.

则当 $z=k'$ 时，左边 $=x+(y+k')=x+(y+k)'$

$$=(x+(y+h))'=((x+y)+k)'$$
$$=(x+y)+k'.$$

这就证明了，对所有自然数，结合律均成立.由此，N 关于加法构成半群.

下面，在 N 中按如下方式来定义乘法运算.

(i) 对于 $x\in N$，则 $x\cdot 1=x$.

(ii) 对 $x,y\in N$，则 $x\cdot y'=x\cdot y+x$

在 N 中，加法和乘法这两个运算法则被定义后，有次之定律成立

(1) $x+y=y+x$，$xy=yx$.　　(交换律)

(2) $x+(y+z)=(x+y)+y$，$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.　　(结合律)

(3) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$.　　(分配律)

证明　这里只证明(3).这只要对 z 使用数学归纳法即可.

$z=1$ 时 $x\cdot(y+1)=x\cdot y'=x\cdot y+x=x\cdot y+x\cdot 1$，

故(3)式为真.

设 $z=z_0$ 时(3)式正确，即 $x\cdot(y+z_0)=x\cdot y+x\cdot z$.

则在 $z=z_0'$ 时，有

$$x\cdot(y+z_0')=x(y+z_0)'=x\cdot(y+z_0)+x$$
$$=(x\cdot y+x\cdot z_0)+x=x\cdot y+(x\cdot z_0+x)$$
$$=x\cdot y+x\cdot z_0'.$$

故对于所有的自然数，(3)式成立.

下面来定义顺序关系.对于两个自然数 x,y，若有自然数 u 存在，使 $x=y+u$ 成立，则称 x 比 y 大，记为 $x>y$.同样的，若有自然数 v 存在，使得 $y=x+v$ 成立，则称 x 比 y 小，记为 $x<y$.由这个定义知道，$x>y$ 和 $y<x$ 是等价的.

对于两个自然数 x,y,下面三个关系

$$x>y,\ x=y,\ x<y$$

中，必有一个且只有一个成立.这个顺序是满足顺序公理的，所以 N 是全序集.

N 关于加法成半群.故可引入一个新数 0，使得对所有 $x\in N$，等式

$$x+0=0+x=x$$

成立.这个 0 为半群 N 中加法运算的单位元.由于 0 的引入，就有条件考虑 N 的元 x 关于加法的逆元了.也就是说，可以引入负整数的概念.我们把包含自然数、零和负整数的全体叫做**整数系**，用 I 来表示.这时自然数 N 叫做正整数，用 I^+ 来表示.负整数的全体表成 I^-.于是有

$I=I^+\cup I^-\cup\{0\}$.

下面为了定义顺序关系,先定义绝对值.设 a 是正整数,α 是整 数, 则有

$\alpha=a$时 $|\alpha|=a$,

$\alpha=0$时 $|\alpha|=0$,

$\alpha=-a$时 $|\alpha|=a$,

象这样定义的数 $|\alpha|$, 叫做整数 α 的**绝对值**。

对于两个整数 α,β,若

α,β 为正时, 有 $|\alpha|>|\beta|$;

α,β 为负时, 有 $|\alpha|<|\beta|$;

$\alpha=0$ 时, β 为负;

α 为正时, β 为负;

α 为正时, $\beta=0$;

对其中每一种情况, 都说 α 比 β 大,表成 $\alpha>\beta$。同理可定义 α 比 β 小, 亦即可以定义 $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$ 和 $\beta<\alpha$ 是等价的。

由这个定义, 对于两个整数 α, β。下述三个关系式:

$\alpha>\beta$, $\alpha=\beta$。$\alpha<\beta$。

中有一个且仅有一个成立。

据定义, 正整数 α 大于 0, 负整数小于 0, 这个大小关系满足顺序公理, 所以 I 构成全序集合。下面对整数系, 给出加法和乘法的定义。

加法

对于两个整数 α, β, 定义它们的和 $\alpha+\beta$ 如下:

$\alpha<0$, $\beta<0$ 时, $\alpha+\beta=-(|\alpha|+|\beta|)$;

$\alpha>0$, $\beta<0$ 时, 若$|\alpha|=|\beta|$, 则 $\alpha+\beta=|\alpha|-|\beta|$;

$\alpha>0$。$\beta<0$ 时, 若$|\alpha|=\beta$, 则 $\alpha+\beta=0$;

$\alpha>0$, $\beta<0$ 时, 若$|\alpha|<\beta$, 则 $\alpha+\beta=-(|\beta|-|\alpha|)$;

$\alpha<0$, $\beta>0$ 时, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

$\alpha=0$ 时, $\alpha+\beta=\beta$;

$\beta=0$ 时, $\alpha+\beta=\alpha$;

象这样定义的加法, 交换律、结合律显然成立。

乘法

对两个整数 α, β, 定义它们的积 $\alpha\cdot\beta$ 如下

$\alpha>0$, $\beta>0$ 或 $\alpha<0$, $\beta>0$ 时 $\alpha\cdot\beta=|\alpha|\cdot|\beta|$;

$\alpha>0$, $\beta<0$ 或 $\alpha<0$, $\beta>0$ 时 $\alpha\cdot\beta=-|\alpha|\cdot|\beta|$;

$\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 时　　$\alpha\cdot\beta=0$；

这样定义的乘法，交换律、结合律及分配律都成立。所以，对于这样定义的两个运算(加，乘)，整数系构成可换环。

整数系 I 关于加法成群，关于乘法构成可换半群。如果要使得对于乘法也成群，就得将整数系加以扩张。

当 a，b 是整数时，引入满足

$$x\cdot a=b,\ c\neq 0$$

的 x，把它叫做**分数**，表为 $\frac{b}{a}$，对于两个分数 $\frac{b}{a}$ 和 $\frac{d}{c}$，当 $ad=bc$ 时叫做是等价的，表作 $\frac{b}{a}\sim\frac{d}{c}$。对于这种等价关系，次之等价律成立。

(反射律)　$\frac{b}{a}\sim\frac{b}{a}$.

(对称律)　若 $\frac{b}{a}\sim\frac{d}{c}$ 则 $\frac{d}{c}\sim\frac{b}{a}$.

(传递律)　若 $\frac{b}{a}\sim\frac{d}{c}$，$\frac{d}{c}\sim\frac{f}{e}$，则 $\frac{b}{a}\sim\frac{f}{e}$.

它的证明是容易的，故省略。利用分数的等价关系，可将分数分类，把等价分数的集合，叫做**分数类**。分数全体的集合可被分成分数类。把分数类叫做**有理数**，例如与 $\frac{1}{2}$ 等价的分数类，用 $\frac{1}{2}$ 来代表，记为 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$，一般地，把与 $\frac{a}{1}$ 等价的分数类表作 $\left\{\frac{a}{1}\right\}$，或 $\{a\}$，与 $\frac{0}{1}$ 等价的分数类表成 $\left\{\frac{0}{1}\right\}$，或 $\{0\}$，或者就以 0 来表示。

在直线上来表示整数系时，等价分数表示同一点。故对有理数 $\left\{\frac{b}{a}\right\}$，凡属于这一类的分数，都把它视为同一分数。总之，属于同一类的分数，都当作是相等的。

现在定义有理数的加法和乘法。

加法

对两个有理数 $\alpha=\left\{\frac{b}{a}\right\}$，$\beta=\left\{\frac{d}{c}\right\}$，$\alpha$，$\beta$ 的和 $\alpha+\beta$ 定义为

$$\alpha+\beta=\left\{\frac{bc+ad}{ac}\right\}.$$

对于加法，下列各式成立：

(1)（交换律）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$。

(2)（结合律）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$。

(3) 对所有有理数 α，$\alpha+0=\alpha$。

(4) 对所有的 α，使 $\alpha'+\alpha=0$ 的有理数 α' 存在且唯一，这一 α' 写作 $-\alpha$。

乘法

对两个有理数 $\alpha=\left\{\frac{b}{a}\right\}$，$\beta=\left\{\frac{d}{c}\right\}$，$\alpha$，$\beta$ 的积 $\alpha\cdot\beta$ 定义为

$$\alpha\cdot\beta=\left\{\frac{bd}{ac}\right\}.$$

对于这样定义的乘法，下列法则成立：

(1)（交换律）$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$。

(2)（结合律）$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$。

(3) 对所有有理数 α，$\alpha\cdot1=\alpha$，

(4) 对非零有理数 α，满足 $\alpha'\alpha=1$ 的有理数 α' 存在且唯一。再则，有如下的分配律成立

(5) 对任意的三个有理数 α，β，γ

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

由上所述易知有理数关于加法构成可换群，除 0 以外，关于乘法也构成可换群。因此有理数的全体，关于这两个运算构成域。

现在我们来定义有理数系的顺序关系，对任意非零有理数 $\alpha=\left\{\frac{b}{a}\right\}$，作如下定义：

当 $ab>0$ 时，$\alpha>0$，这时称 α 为**正**，

当 $ab<0$ 时，$\alpha<0$，这时称 α 为**负**。

对于两个有理数 α，β。

当 $\alpha-\beta>0$ 时，称 α 比 β 大，表成 $\alpha>\beta$。

当 $\alpha-\beta<0$ 时，称 α 比 β 小，表成 $\alpha<\beta$。$\alpha<\beta$ 与 $\beta>\alpha$ 是等价的。

这时，我们对任意两个有理数 α，β，三个关系

$$\alpha>\beta,\ \alpha=\beta,\ \alpha<\beta$$

中必有一个且只有一个成立，而且把这样的大小关系作为顺序时，容易知道，有理数系是满足顺序公理的。所以有理数域是有序域。

下面介绍怎样把有理数系扩张成实数系。

若把有理数的全体分成两个子集合 A_1，A_2，且满足

(i)　$A_1 \neq \phi$，$A_2 \neq \phi$。

(ii)　$A_1 \cap A_2 = \phi$，$A_1 \cup A_2 =$ 有理数的全体。

(iii)　对任意的 $x_1 \in A_1$，$x_2 \in A_2$，$x_1 < x_2$。则称 A_1，A_2 组成的一对集合(A_1，A_2)为**有理数的分割**，这时有如下的四种情形：

(1) A_1 有最大数，A_2没有最小数；

(2) A_1没有最大数，A_2有最小数；

(3) A_1没有最大数，A_2没有最小数；

(4) A_1有最大数，A_2有最小数。

在(4)的情形，因两个有理数之和的一半仍然是有理数，所以该情形不可能发生。在(1)，(2)的情形，是以一个属于 A_1 或 A_2 的有理数为边界的分割，这叫做**有理分割**。这时，若 A_1 中的最大数为 a，或设 A_2 中的最小数为 a，就把分割(A_1，A_2)视为有理数 a，表作 $a=(A_1, A_2)$，把这个分割(A_1，A_2)叫做**有理数**。对(3)的情形，称之为无理分割，这样的分割叫做**无理数**。把有理数，无理数总称为**实数**。把实数全体的集合叫做**实数系**。在实数系中，可以通过定义加法、乘法两个运算而构或实数域，也可以定义顺序关系而构成有序域，详情从略。

现在我们给出复数的概念。设两个实数 x，y 的有序对(x，y)的集合为 C，C中的加法和乘法定义如下：

加法：$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，

乘法：$(x_1, y_2)(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$。

这时，C 关于加法形成可换群，且容易证明，除去关于加法的单位元(0，0)以外，关于乘法也形成可换群，所以 C是可换域，这时称C 为复数域。

§3. 集合与拓扑

3·1　拓扑的概念

数学研究的对象，在经典意义上来讲，就是数和图形．直到二十世纪才把它推广到一般事物的“集合”上．数可以当作图形而图形可以当作由数构成的空间内的特殊部分，而经典的数学对象，却只是用文字来表示

示的数值．布尔巴基学派将数的各种性质大致加以区别，分为代数、序、拓扑三类结构．这里说的代数，即前节介绍的运算．至于序，简单地说就是大小的关系．有关集合论更深入的问题，本书不打算作详细介绍．要想作更多了解，可参考一般的集合论书，如松板和夫著的"集合、位相入门"(岩波书店)等．所谓**拓扑**，是指集合的元素间的邻近关系．拓扑概念的叙述方式有多种，常常因书而异，这里介绍有代表性的说法．最近流行的拓扑入门书(前述松板氏的书先后出得不少)中，以"什么是拓扑学"为题的章节可以说是必定要写的．门斯菲尔德的"Introduction to Topology"中说，拓扑学研究的是，一个橡皮做的物体，只要不撕破它，将其任意拉伸或压缩变形时它所具有的种种构造中的不变性质．

图15—6中X是一个物体，a、b、c是它的三点，只把X作为一个一般集合来看时，a、b、c只是作为三个孤立元素属于X，并不考虑诸如a和b是否比a和c更邻近的关系．现在若把X视为橡皮物体，则X的各点间就有了某种关系、即邻近关系，这时它已经不是一个简单的集合了．象这样的X具有拉伸和压缩时的不变关系，叫做**拓扑空间**，而把这种关系叫做X的**拓扑**．当X不仅是一个集合，而且还存在拓扑T时，可表成(X,T)，用以和集合X相区别．若对同一个X，取不同的T，比如得到(X,T_1)和(X,T_2)，则它们是不同的空间．

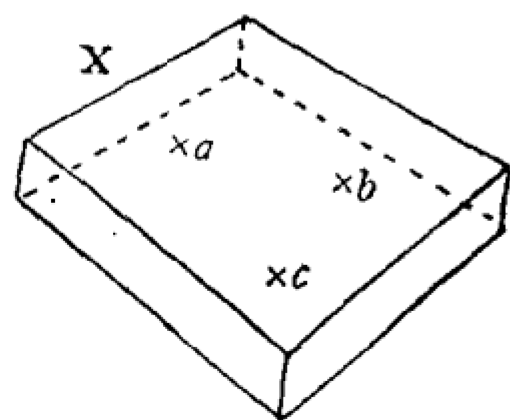


图 15-6

事实上，所谓"时而拉伸时而压缩而不撕破"是怎么回事，这里都不去过问，只把具有拉伸或压缩而不破的作用叫做研究这个拓扑映射的不变性，就是所谓拓扑学．

为了了解拓朴学，象上面所述，需要对母体集的性质和关于集合与集合间的映射的基础知识，作必要的准备．关于集合，§1已作了叙述，这里只对映射的性质，先作一些介绍．

3·2　映射的基本性质

【定义】1．映射．像　所谓由X到集合Y中的映射(mapping)f，是指对于X的任一元有Y的唯一一个元与之对应的关系．这时称f为映入的映射(或函数)．设$x\in X$，对应着$y\in Y$，则写成$y=f(x)$，y叫做由f得到的x的**像**(image)．

注意　映射的最突出的特点是，对于X的每一个元x，都有Y的一个元y与

之对应，从全局来看，可自X的每一个元各引出一条映射线，再从Y来看，Y的各元可有映射线穿入，也可能有X的两条线或三条线等等穿入y的一个元，这种情况叫做多对一(many to one)。

【定义】2. 定义域、值域　当f是由X到Y的映射时，把集合X叫做f的定义域，而集合$\{f(x)\mid x\in X\}$作为Y的子集合叫做f的值域．若记$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$，则$f(X)\subset Y$．

例1. 当X, Y是实数的全体时，把$Y=x+1$所表示的函数写成$Y=f(x)$，则f是把X映到Y中的映射，其定义域、值域皆为实数的全体．

例2. 当X，Y是实数的全体时，把函数$Y=f(x)$取作$Y=\sin x$，则f是把X映到Y中的映射，其定义域为实数的全体，值域是闭区间$[-1,1]$．

例3. 设自然数的全体是X，实数的全体是Y，当X到Y中的映射f被给定后，也就同时决定了一个数列．

【定义】3. 常值映射　当X到Y中的映射是$f(X)=\{c\}$，$c\in Y$时，把这种映射叫做常值映射(Constant mapping)．(图 15-7)

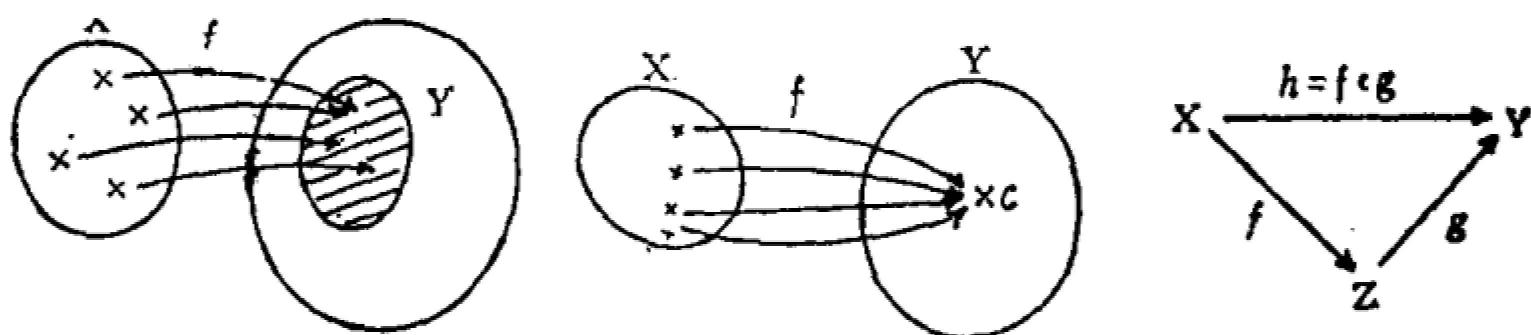


图 15-7

【定义】4. 恒等映射　由X到X的映射，若对于X的所有元x，有$f(x)=x$，则f叫做X上的恒等映射(identity mapping)．把它写成I或I_x．

【定义】5. 复合映射　给定X到Y中的一个映射为f，Y到Z中的映射为g，若用z的元$g(f(x))$来对应X的元x，则得出了X到Z的一个映射．把这个映射写成$g\cdot f$，叫做f和g的复合(Composition)．一般地还可以考虑有限个映射复合．

例　对于函数$Z=\sin^2 x$，取X为实数的全体，$y=[-1,1]$，$z=[0,1]$时，有X到Y的映射$f: y=f(x)=\sin x$；Y到z的映射$h: z=g(y)=y^2$，于是$z=\sin^2 x$是这两个映射的复合，即

$$z=h(x)=(g\cdot f)(x)=g(f(x))=(\sin x)^2=\sin^2 x.$$

【定义】6. 一一映射·单射　对于X到Y中的映射f，若满足“$f(x_1)=f(x_2)$，必有$x_1=x_2$”的条件．则把f叫做X到Y的一一映射(one to one)或叫做

单射,(injection).

【定义】7. 上映射·满射 对于X到Y的映射f,若Y的每个元都是X的元经f的像,则称f为X到Y的上(onto)的映射,或叫做满射(surjection).

注意 不用说,"映上"的映射是包含于"映入"映射的,反之却不然.("映上"y的映射是把y充满的映射(也叫满射)).

【定义】8. 满单映射 既是单射又是满射的映射叫做满单映射(bijection).

例 设X,Y都是实数全体的集合,把函数$f(x)=x^2(x-a)$视为由X到Y的映射,则f是满射,若$a=0$,则f成为满单射.

【定理】1. 集合X到Y的映射f是满单射的充要条件是:存在Y到X的映射g,使得

$$g\cdot f=I_X,\ f\cdot g=I_y$$

此外,这时g还是满单射.

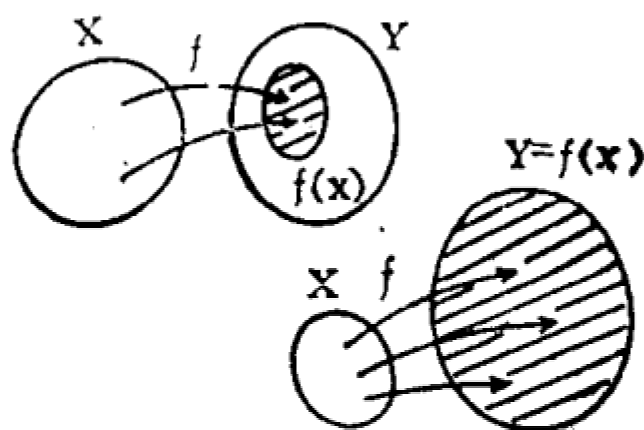


图 15-8

证明 充分性:

由$f(x_1)=f(x_2)$,

$\therefore\ g(f(x_1))=g(f(x_2))$.

从而$(g\cdot f)(x_1)=(g\cdot f)(x_2)$,

即 $I_X(x_1)=I_X(x_2)$. $\therefore\ x_1=x_2$.

因此f是单射.

同时,对于y的任意元y,$y=I_y(y)=(f\cdot g)(y)=f(g(y))$.

所以y是X的元$g(y)$的像,即是说f是满射.

必要性:

由于f是满射,对于Y的元y,存在X的元x,使得$f(x)=y$,同时,这样的x有一个

这是因为,若$f(x_1)=f(x_2)=y$,则由f是单射知$x_1=x_2$.

这时,设g是使Y的各元y对应于满足$f(x)=y$的X的元x的映射,则$g(y)=x$与$f(x)=y$等价.

于是对于X的任意元x,有

$$(g\cdot f)(x)=g(f(x))=g(y)=x,\quad \therefore\ g\cdot f=I_X.$$

对Y的任意元y有

$$(f\cdot g)(y)=f(g(y))=f(x)=y.\quad \therefore\ f\cdot g=Iy.$$

现在来证明g是满单射.

设$g(y_1)=g(y_2)$,则$f(g(y_1))=f(g(y_2))$,

从而 $(f\cdot g)(y_1)=(f\cdot g)(y_2)$.

即有 $Iy(y_1)=Iy(y_2)$, $\therefore\ y_1=y_2$,

所以 g 是单映射.

同时，对应于 X 的任意元 x，有 $x=I_X(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$.

所以 x 是 Y的元 $f(x)$的像.即 g 是满射. □

【定义】9. 逆映射 仅当 X 到 y 的映射 f 是满单射时,由【定理】1 求得的映射 g 才是 Y到 X 的满单射.满足 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_y$. 这个 g 叫做 f 的逆映射(inverse mapping)，记为 f^{-1}.即是说 $f^{-1}(y)=x$ 和 $f(x)=y$ 是等价的.

【定理】2. 当 f 是 X 到 Y的满单射时，它的逆映射是唯一的.

证明 设 f 有逆映射 g_1, g_2，即 $f\circ g_1=f\circ g_2=I_y$. 则对 Y的任意元 y，有 $f(g_1(y))=f(g_2(y))$.

由于 f 是单射，故 $g_1(y)=g_2(y)$.

又由于对 Y的一切元 y，上式皆成立，故 $g_1=g_2$. □

例 设 X,Y都是全体实数的集合，取映射 f 为 $f(x)=2x+1$，则有

$$f^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y-1),\ (f\circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$=2\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=y,$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2x+1)=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}=x.$$

【定理】3. 设 X 到 Y的映射为 f，Y 到 Z的映射为 g，则

(1) 若 f, g 皆为单射，那么 $g\circ f$ 也是单射;

(2) 若 f, g 皆为满射，那么 $g\circ f$ 也是满射;

(3) 若 f, g 皆为满单射,那么 $g\circ f$ 也是满单射,且有 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

证明 (1) 设 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$,则 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.由于 g 是单射，故 $f(x_1)=f(x_2)$.

又因 f 是单射，故 $x_1=x_2$.

(2) 由于对 Z的任意元 z，g 是满射，故在 Y 中存在 y 使得 $z=g(y)$，又，对应于这个 y，f 也是满射，故存在 X 的元 x，使得 $y=f(x)$，

亦即 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=z$.

所以 $g\circ f$ 也是满射.

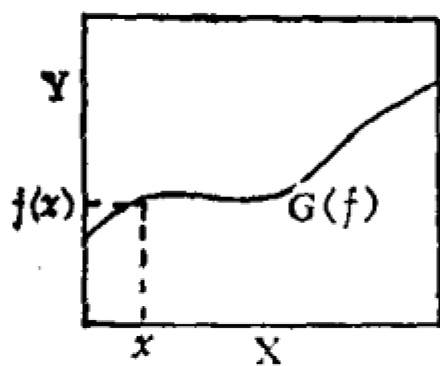


图 15-9

(3) 据(1),(2)，$g\circ f$ 是满单射，设 $(g\circ f)(x)=z$，那么

$f(x)=g^{-1}(z)$,

$\therefore \quad x=f^{-1}(g^{-1}(z))=(f^{-1}\circ g^{-1})(z)$,

$\therefore \quad (g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$. □

【定义】10.映射的图象 当 f 是 X 到 Y 的映射时，把 X×Y 的子集$\{(x, f(x))|x\in X\}$叫做映射 f 的图象(*graph*)，表作 $G(f)$，如图 15-9.

例 当 X, Y 是实数集合时，常值映射的图象是平行于 X 轴的直线；恒等映射的图象是纵轴和横轴间夹角的平分线.

单射的图象是与平行于 X 轴直线至多有一交点的曲线. 满射的图象是与平行于 X 轴的直线必有交点的曲线.满单射的图象是与 X 的平行线必相交且只相交一次的曲线.

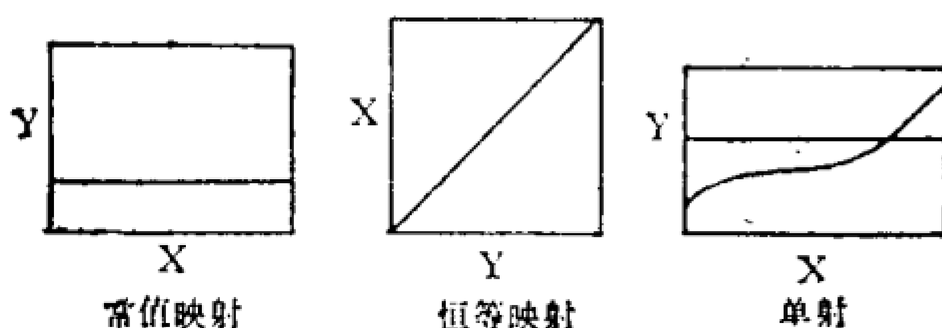


图15-10

3·3 拓扑空间

象前面谈到的，在一个集合中给定一个拓扑，如果它在拓扑映射下不变，那么这个集合就是拓扑空间. 用不同方式给出的拓扑各有其有趣的特色. 最近出版的各种书籍中采用的是，给定一个开集族来引入拓扑，本书也采用这一方法.

【定义】11. 拓扑·拓扑空间 设 X 是非空集合，把满足如下公理的 X 的子集合族 T 叫做 X 的拓扑(*topology*)，把 X 和 T 的二元组$(X、T)$叫做拓扑空间、(topological space).

$[o_1]$ X 和 ϕ 属于 T,

$[o_2]$ T 中任意多个集合的并也属于 T,

$[o_3]$ T 中有限集合的交也属于 T.

而把 T 的元叫做 T **开集合**(T-open set)或者就叫做**开集合**(open set)

例1. 设 $X=\{a, b, c\}$，$T_1=\{X, \phi\}$，则(X, T_1)是拓扑空间.这是因为，首先它显然满足$[o_1]$，其次$[o_2]$中的并为 X 或 ϕ，$[o_3]$中的交为 X 或 ϕ，都属于 T_1.又设 $T_2=\{X, \phi, \{a\}\}$，则(X, T_2)也是拓扑空间.这是由于，首先$[o_1]$显然满足，其次$[o_2]$中的并为 X, ϕ 或$\{a\}$，$[o_3]$中的交也是 $X、\phi$ 或$\{a\}$，都属于 T_2.同样可知 $T_3=\{X, \phi, \{a\}, \{b, c\}\}$或者 $T_4=\{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，

都是 X 的拓扑.

例2. 对于任意非空集合 X，设 $T=\{X,\phi\}$，则据例 1 可知，T 是 X 的一个拓扑.我们称这个拓扑为**平凡拓扑**或密着拓扑(indiscrete topology).

例3. 对任意非空集合 X，设 T 是 X 的一切子集合构成的集族.这时，不仅 $[o_1]$ 被满足，而且由于子集合的和与积也都是子集合，所以 $[o_2]$，$[o_3]$ 也当然满足.这样的拓扑叫做**离散拓扑**(discrete topology).例如，$X=\{a,b,c\}$ 的离散拓扑是 $T=\{X,\ \phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{b,c\},\ \{c,a\}\}$.

例4. 设 X 是实数全体的集合(记为R)，且设具有如下的性质的 R 的子集合和空集合 ϕ 组成的集合族为 u，即是说，在 R 的子集合 U 上，对应于 U 的任意一点 x，必存在包含 x 的开区间 (a,b)，使得 $x\in(a,b)\subset U$，u 就是由这样的 U 构成的集合族，它满足 $[o_1]$，因 ϕ 是已定义了的，至于说 R，当 $x\in R$ 时，比如只要取 $(x-1,x+1)$，则有 $x\in(x-1,x+1)\subset R$，于是 $R\in u$.对于 $[o_2]$，先记 u 的任意多个集合为 U_λ，$\lambda\in\Lambda$。考察 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，若 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，则存在 λ_0 属于 Λ，使得 $x\in U_{\lambda_0}$，由于 $U_{\lambda_0}\in u$，所以存在开区间 $(a_{\lambda_0},\ b_{\lambda_0})$ 满足 $x\in(a_{\lambda_0},\ b_{\lambda_0})\subset U_{\lambda_0}$，故 $x\in(a_{\lambda_0},\ b_{\lambda_0})\subset U_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，从而 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in u$.至于 $[o_3]$，设 u 的有限个集合为 U_1，U_2，……U_n，取 $\bigcap\limits_{i}U_i$ 的一个点为 x，则对一切 i 都有 (a_i,b_i) 存在，满足关系 $x\in(a_i,b_i)\subset U_i$，再取 $\max a_i=a_0$，$\min b_i=b_0$，则对一切 i，都有 $(a_0,b_0)\subset(a_i,b_i)$.

由于显然 $x\in(a_0,b_0)$ 故 $x\in(a_0,b_0)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i$，故 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in u$.

总之这个 u 是 R 的拓扑，把这个拓扑称为 R 的**通常拓扑**(usual topology).

当我们涉及到实数的拓扑结构问题时，总是把 R 视为通常拓扑意义下的拓扑空间.

例5. R 的拓扑不一定是通常拓扑，比如例 2，例 3 中平凡、离散两种拓扑，显然也是 R 的拓扑，这是容易证明的.下面再介绍一个颇为有趣的拓扑 我们把由 ϕ 集合和满足如下性质 $[\varphi]$ 的集合 V 构成的集族 φ 叫做 R 的 **φ 拓扑**.

$[\varphi]$ 对于 V 的任意点 x，存在包含 x 的半开区间 $[a,b)$，使得 $x\in[a,b)\subset V$.

这个集族 φ 是构成拓扑的.其证明与例 4 中的完全一样，这里从略.

我们来证明，R 的 u 开集是 φ 开集，而 φ 开集不一定是 u 开集.

事实上，设 $U\in u$，则对于 U 的任意一点 x，存在 (a,b)，使 $x\in(a,b)\subset U$，

这时由于 $a<x$，故若 $a'=\frac{a+x}{2}$ 则 $a<a'<x$.

$\therefore$　$x\in[a',b)\subset U$，于是 $U\in\varphi$.

其次，$[0,1)$是 φ 的元，而不是 u 的元，若取 x 为 0，则不存在含于 $[0,1)$的包含 0 的开区间.

【定理】4. 设 T_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 为 X 的有限个拓扑，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}T_i$ 也是 X 的拓扑.

证明　由于对所有的 i，有 $T_i\ni\phi, T_i\ni X$，故 $\bigcap T_i\ni\phi$，$\bigcap T_i\ni X$，亦即是说，$[o_1]$被满足，又，记 $\bigcap T_i$中任一元为 U_λ，$\lambda\in\Lambda$，则对所有的 i，有 $U_\lambda\in T_i$，由此 $\bigcup\limits_{\lambda}U_\lambda\in T_i$.

$\therefore$　$\bigcup\limits_{\lambda}U_\lambda\in\bigcap T_i$，同时 $\bigcap\limits_{i}U_{\lambda_i}\in T_i$，　　$\therefore$　$\bigcap\limits_{i}U_{\lambda_i}\in\bigcap T_i$.

也就是说$[o_2]$，$[o_3]$被满足.　□

注意　对 X 的两个拓扑 T_1,T_2，$T_1\bigcup T_2$不一定是拓扑.

设 $X=\{a,b,c\}$，$T_1=\{X,\phi,\{a\}\}$，$T_2=\{X,\phi\{b\}\}$，则T_1，T_2是扑拓，但 $T_1\bigcup T_2=\{X,\phi,\{a\},\{b\}\}$，由于它不包含$\{a,b\}$，所以不是拓扑.

【定义】12. 闭集合　把拓扑空间(X,T)的开集合的补集合，叫做**闭集合**(closed set).

例1. $X=\{a,b,c\}$，$T=\{X,\phi\{a\}\}$，这时(X,T)的闭集合是 X，ϕ，$\{b,c\}$.

例2. 在(R,u)上，开区间(a,b)是开集合，闭区间$[a,b]$是闭集合．(a,b)是开集合是因为对应于(a,b)中任一点x必有$x\in(a,b)\subset(a,b)$；$[a,b]$的补集合是$(-\infty,a)\bigcup(b,+\infty)$，由于$(-\infty,a)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a-i,a)$，$(b,+\infty)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(b,b+i)$其中$(a-i,a)$和$(b,b+i)$全是开集合，所以$(-\infty,a)\bigcup(b,+\infty)$是开集合，从而$[a,b]$是闭集合.

【定义】13. 闭包　把包含(X,T)的子集合 A 的最小闭集合叫做 A 的闭包(closure)，记作$\overline{A}$.

【定理】5. A 的闭包是包含 A 的所有闭集合的交.

证明　设 F_λ 为包含 A 的闭集合，并令$\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda=A_0$由于$\overline{A}$是包含 A 的最小闭集合，所以是 F_λ 中的一个，$\therefore\overline{A}\supset\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda=A$.

其次，由于$\overline{(\bigcap\limits_{\lambda}F_\lambda)}=\bigcup\limits_{\lambda}\overline{F_\lambda}$，$F_\lambda$是闭集合，$\therefore\overline{F_\lambda}$是开集合，根据公理$[o_2]$，$\bigcap\limits_{\lambda}\overline{F_\lambda}$ 也是开集合，从而，$\bigcap\limits_{A}F_\lambda$是闭集合.

由于各F_λ都包含A，$\therefore \bigcap_\lambda F_\lambda \supset A$.又因$\overline{A}$是含$A$的最小集合，$\therefore$又有

$$\bigcap_\lambda F_\lambda \supset \overline{A},\ \therefore A = A_0 = \bigcap_\lambda F_\lambda. \qquad \square$$

【定义】14．闭包算子 使(X,T)的各子集合A对应着它的闭包$\overline{A}$，则X的子集合的全体$P(X)$到$P(X)$的这个映射叫作闭包算子(closure operator).

【定理】6．闭包算子满足如下性质：

$[k_1]$　$\overline{\phi}=\phi$；

$[k_2]$　$\overline{A}\supset A$；

$[k_3]$　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$[k_4]$　$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

注意 上述$[k_1]\sim[k_4]$也叫做库拉托夫斯基公理(Kuratowski).

证明 $[k_1]$　$\because$　$\overline{\phi}\supset\phi$，而$\overline{\phi}$是最小闭集合$\therefore\overline{\phi}=\phi$.

$[k_2]$　由定义即得.

$[k_3]$　$\because$ $\overline{A}\supset A$，$\overline{B}\supset B$，$\therefore$ $\overline{A}\cup\overline{B}\supset A\cup B$.或者说，由于$\overline{A}$,$\overline{B}$都是闭集合，因此$\overline{A}\cup\overline{B}$也是闭集合(这点的证明是容易的)，
又因$\overline{A}\cup\overline{B}\supset A\cup B$，而$\overline{A\cup B}$是包含$A\cup B$的最小闭集，$\therefore\overline{A}\cup\overline{B}\supset\overline{A\cup B}$.
其次因$A\cup B\supset A$，故包含$A\cup B$的最小闭集当然也包含A.所以

$$\overline{A\cup B}\supset\overline{A}，同理\overline{A\cup B}\supset\overline{B}\quad\therefore\quad\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}.$$

从而　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$.

$[k_4]$　据$[k_2]$有$\overline{\overline{A}}\supset\overline{A}$，并且因$\overline{A}$是闭集合，$\therefore$ $\overline{A}\supset\overline{\overline{A}}$ 从而左端$\overline{A}$应包含右端$\overline{A}$的闭包$\overline{\overline{A}}$，即有$\overline{A}\supset\overline{\overline{A}}$，　$\therefore$　$\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.　$\square$

【定理】7．设X是非空集合，f为$P(X)$到$P(X)$的映射，它满足库拉托夫斯基的四个公理，这时，把X的子集合A中满足$f(A)=A$的子集定义为X的闭集合，而把闭集合的补集合定义为开集合．设X的所有开集合为T，则T是X的一个拓扑.用这个拓扑定义闭包算子，记A的闭包为$\overline{A}$时，有

$$\overline{A}=f(A).$$

注意 该定理证明较长，故省略．但由于证明起来并不困难，有兴趣的读者不妨自己去试一试.用闭包算子来引入扑拓，是库拉托夫斯基提出来的.

【定义】15．邻域·开邻域 把含(X,T)的点x的开集合包含于其内的子集叫做x的邻域(neiborhood).特别地，把含x的开集叫做x的开邻域(openneiborhood).

【定理】8. (X,T)的非空子集合U为开集合的必要充分条件是：对于U的任意点x，U是x的邻域.

证明　其必要性由定义已明.

至于充分性，因为相应于任意U的x，U是x的邻域，所以这时必存在开集合U_x，使得$x\in U_x\subset U$，　$\therefore$　$U=\bigcup_x U_x$.

即U是开集合.　□

【定义】16. 邻域系　把(X,T)的点x的邻域的全体叫做x的邻域系(neiberhood system).记为$V(x)$.

【定理】9. 在(X,T)的各点x的邻域系$V(x)$中，下列各条成立：

$[V_1]$　若$V\in V(x)$，则$x\in V$;

$[V_2]$　若$V\in V(x)$且$V\subset V'$，则$V'\in V(x)$;

$[V_3]$　若$V_1,V_2\in V(x)$.则$V_1\cap V_2\in V(x)$;

$[V_4]$　对于$V\in V(x)$，存在$W\in V(x)$，使得W的任意点y，有$V\in V(y)$.

证明　$[V_1]$，$[V_2]$，由定义自明.

$[V_3]$ 由于$V_1\in V(x)$，故存在$U_1\in T$，使得$x\in U_1\subset V_1$，同理，存在$U_2\in T$使得$x\in U_2\subset V_2$，从而有$x\in U_1\cap U_2\in T$，又因$U_1\cap U_2\subset V_1\cap V_2$，所以有

$$V_1\cap V_2\in V(x).$$

$[V_4]$ 由$V\in V(x)$，故存在$W\in T$使得$x\in W\subset V$，显然，对于W的任意点y，有$W\in V(y)$，从而据$[V_2]$，得$V\in V(y)$.　□

【定理】10. 对于非空集合X的各点x，给定相应的X子集合族$V(x)$，它满足【定理】9的公理$[V_1]\sim[V_4]$，在X的子集合中，$U\subset X$时，对应于U的任意点x，$U\in V(x)$则U定义为X的开集合，X的开集合全体构成的集族T是X的一个拓扑. 对应于X的任一点x，设由(X,T)确定的邻域系为$V_1(x)$，则$V_1(x)=V(x)$

注意　本定理的证明也省略. 在闭包的情形像所见到的，首先给出开集合族，然后引入拓扑. 此外，闭包、邻域等，当满足适当的公理时，也可以引出等价拓扑来. 本书省略了给定闭集合族、使用开核算子、运用收敛性质等多种引入拓扑的方法.

【定义】17. 聚点·导集合　对于(X,T)的子集合A和1个点x，若$V(x)$的任意元V都满足$(V-\{x\})\cap A\neq\phi$，则称x为A的聚点. A的聚点的集合叫做A的导集合(derived set).记为A'.

【定理】11. $\overline{A}=A\cup A'$.

证明 若 $x \notin \overline{A}$，则$x \in (\overline{A})^c$. $\overline{A}$是闭集合，由此$(\overline{A})$ 是开集合，从而存在$U \in T$，使得 $x \in U \subset (\overline{A})^c \subset A^c$ ($\because$ $\overline{A} \supset A$) $\therefore$ $x \notin A$，且 $x \notin A'$ $\therefore$ $x \notin A \cup A'$.

于是$\overline{A} \supset A \cup A'$.

反之，若 $x \notin A \cup A'$，则 $x \notin A$ 且 $x \notin A'$. 由于 $x \notin A'$，故存在开集合U，使得 $x \in U \subset A^c$，这样的 x 必属于集合$\cup U$，它是开集合，对各U，有$U \subset A^c$. 因此$\cup U \subset A^c$ 故$(\cup U)^c \supset A$，由于$\overline{A}$是包含A的最小闭集合，所以$(\cup U)^c \supset \overline{A}$ $\therefore$ $x \notin \overline{A}$即$A \cup A' \supset \overline{A}$，从而$\overline{A} = A \cup A'$. □

【定理】12. $A' = \{x | \overline{A - \{x\}} \ni x\}$

证明 设$x \in A'$，则存在$V(x)$的元V，使得$(V - \{x\}) \cap A = \phi$,

$\therefore$ $V \cap (A - \{x\}) = \phi$.

$\therefore$ 存在含 x 的开集合 U，使得$U \cap (A - \{x\}) = \phi$. 因与 $A - \{x\}$不相交的全部开集合之和的补集合为 $\overline{A - \{x\}}$，则 $x \notin \overline{A - \{x\}}$.

$\therefore$ 若$\overline{A - \{x\}} \ni x$，必$x \in A'$.

反之，若 $x \notin \overline{A - \{x\}}$，则$x \in (\overline{A - \{x\}})^c$由于$(\overline{A - \{x\}})^c$是开集合，

$\therefore$ 存在$V \in V(x)$，使得 $x \in V \subset (\overline{A - \{x\}})^c$.

$\therefore$ $V \cap \overline{A - \{x\}} = \phi$，即$V \cap (A - \{x\}) = \phi$. 亦即$(V - \{x\}) \cap A = \phi$.

$\therefore$ $x \in A'$， $\therefore$ 若 $x \in A'$，则 $\overline{A - \{x\}} \ni x$.

从而$A' = \{x | \overline{A - \{x\}} \ni x\}$. □

【定义】18. 连续映射 由(X, T)到(X', T')的映射f满足次之条件时，称为 X 到 X'的连续映射(continuous mapping).

(条件) 当$U' \in T'$时$f^{-1}(U') \in T$. ($f^{-1}(U') = \{x | f(x) \in U'\}$).

注意 由(X, T) 到(X', T') 的连续映射，意为 T 比T'具有更多的开集合.

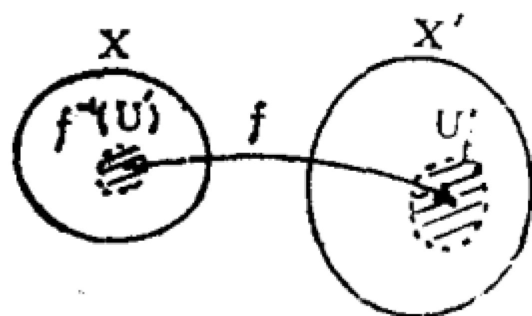


图 15-11

例1. 设(X', T')是平凡空间，则无论在怎样的映射f之下，皆有$f^{-1}(X') = X$， $f^{-1}(\phi) = \phi$，且是(X, T)的开集合，故由(X, T)到(X', T')的映射全部是连续映射，如图 15-11.

例2. (X, T)是离散空间，且对于(X', T')的任意子集合A，$f^{-1}(A)$是T的元，于是由离散空间(X, T)到任意空间(X', T')的任意映射f都是连续映射.

例3. 考察(R, u)和(R, φ)时，恒同映射$I_R^{(1)}$:$(R, u) \to (R, \varphi)$，因为 $(I_R^{(1)})^{-1}$

$([a,b))=[a,b)$不是开集合，所以是不连续的；但当$A\in u$时必有$A\in\varphi$，故恒等映射$I_R^{(2)}:(R,\phi)\to(R,u)$，是连续映射。

【定义】19. 开映射 当(X,T)到(X',T')的映射f满足次之条件时，叫做X到X'的开映射(open mapping)。

（条件） 当$U\in T$时，$f(U)\in T'$。

注意 所谓存在由(X,T)到(X',T')的开映射，是指T'比T含有更多开集合的映射*。

【定义】20. 拓扑映射·拓扑同胚 由(X,T)到(X',T')的映射f是满单射的且是连续的开映射时，称f为同胚映射(homeomorphism)。当(X,T)和(X',T')间存在同胚映射时，称此两个空间是拓扑同胚的(homeomorphic)。

注意 1. 同胚映射也可以定义为：f和f^{-1}都是连续的满单射。

2. 所谓(X,T)和(X',T')同胚，是指"两个空间的点与点之间及开集合之间是完全对应的"。在同胚意义下的两个拓扑空间是不加区别的。

例 上面例3的$I_R^{(2)}$是连续的满单射，但$(I_R^{(2)})^{-1}=I^{(1)}$却不是连续的，∴ $I_R^{(2)}$不是同胚映射。

前面讲过，拓扑学研究的是在"橡皮物体"的各种结构中，给以"拉伸或压缩而不破"的变形时的不变性质，为使事物的集合成为橡皮物体，用各种各样的方法引入了拓扑。至此，当初叫做拉伸或压缩而不破的变形，按现在的定义就是同胚映射了。于是正确的叙述应该是，拓扑学是研究在拓扑空间X到拓朴空间X'的同胚映射f所给出的变换下的不变性质的。象这样的性质有哪些呢？诸如前面谈到的开集合、闭集合、集合的闭包，集合的导集合等等都是。迄今为止，研究这种"橡皮物体"的手段是多种多样的。采用了一种，其它的就归为拓扑性质。其它的拓扑性质中主要的是**紧性**和**连通性**两种。

所谓拓扑空间(X,T)是紧(compact)的，指的是，X的子集合族A_λ，$(\lambda\in\Lambda)$，当$\bigcup_\lambda A_\lambda\supset X$时，有有限个子集合$A_1$，$A_2$，…，$A_n$使得$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\supset X$。这叫做覆盖(cover)X，而把$\{A_\lambda\}$叫做$x$的覆盖(covering)。

※ 这个注意是错的。见反例：令$X=\{0.1.2\}$，$T=\{X、\phi、\{0\}、\{1,2\}\}$，$X'=\{c、b、c\}$，$T'=\{x、\phi、\{a\}\}$，$f(0)=f(1)=f(2)=a$，则$f:(X,T)\to(X'、T')$是开映射，但$T'$的开集比$T$少。〔定义〕18的注意也有错。——校注

换句话说，(X,T)是紧的，是指X的任意覆盖必有有限子复盖。

同时，拓扑空间(X,T)的子集合E是**连通**的(connected)，是指E不可能是两个非空的满足$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\phi$的集合$A,B$的和。

本书中对紧性集和连通集讲得很少，有兴趣的读者可参阅前面提到过的松板氏的书。

3·4 分离公理

象前面所说的，数学研究的对象由数转移到集合后，在集合中引入了代数、序和拓扑三种结构，研究这些结构的性质就是数学。但是，这些结构都具有怎样的必然性呢？我们在前面的介绍就是吗？事实上，这里的结构或者叫做模型，或者叫做理想，都是一回事。逐渐地把结构复杂化，终于得到了实数的概念。反过来说，这只是一种手段，要弄清楚实数具有的各种性质，从本质上讲，依赖于实数的不同结构。拓扑学可以说是研究点之间的相邻性的，相邻性也有多种层次，它研究在各层次中成立或不成立的各种性质，在这里，橡胶制成的物品也是这样，从结构粗糙的东西到细致的东西都有。

拓扑空间是在X中引入拓扑T，且这个T是满足公理$[o_1]$，$[o_2]$，$[o_3]$的，而对于这样的一般拓扑作稍许深入的研究，又要涉及到近似于实数的距离空间。

【定义】21. T_0空间 拓扑空间(X,T)满足次之柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)公理$[T_0]$时，叫做T_0空间。

$[T_0]$ 对于X的相异二点x,y,存在包含一点而不包含另一点的开集合。

注意 在这个公理中，只要求满足$x\in U_x\in T$、$y\notin U_x$的U_x存在，或满足$y\in U_y\in T$，$x\notin U_y$的U_y存在，而不要求两者同时存在。

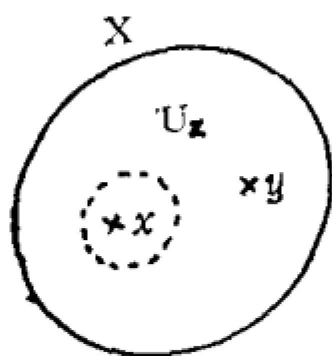


图 15-12

【定理】13. (X,T)是T_0空间的充要条件是相异点的闭包是相异的。

证明 充分性：

若$x\neq y$,则$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$,由此，必有这样的点$z$,满足$z\in\overline{\{x\}}$,$z\notin\overline{\{y\}}$或$z\notin\overline{\{x\}}$,$z\in\overline{\{y\}}$，现在先就$z\in\overline{\{x\}}$,$z\notin\overline{\{y\}}$的情形讨论。设有$x\in\overline{\{y\}}$，则有$\overline{\{x\}}\subset\overline{\overline{\{y\}}}=\overline{\{y\}}$，于是有$z\in\overline{\{y\}}$矛盾。$\therefore$ $x\notin\overline{\{y\}}$。这时令$\overline{\{y\}}^c=U_x$，则$U_x\in T$，$x\in U_x$且$y\notin U_x$，所以(X,T)是T_0空间。对$z\notin\overline{\{x\}}$，

$z\in\overline{\{y\}}$ 的情形同理可证.

必要性：

设 X 是 T_0 空间，x,y 是 X 的相异二点，则有满足 $x\in U_x\in T$，$y\notin U_x$ 的 U_x 存在，或满足 $y\in U_y\in T$，$x\notin U_y$ 的 U_y 存在．设存在 U_x，这时 $U_x{}^c$ 是含 y 的闭集合，有 $U_x{}^c\supset\overline{\{y\}}$，

$\therefore\quad x\notin\overline{\{y\}}$ 且 $x\in\overline{\{x\}}$，$\therefore\quad \overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.

至于存在 U_y 的情形，同理可证. □

【定义】22. T_1 空间 拓扑空间 (X,T) 满足如下的弗雷谢 (Erechet) 公理 $[T_1]$ 时，叫做 T_1 空间.

$[T_1]$ 对于 X 的相异二点 x,y 分别存在包含其中一个而不含另一个的开集合.

注意 这个公理中 $x\in U_x\in T, y\notin U_x$ 与 $y\in U_y\in T\,x\notin U_y$ 两种情形都存在，但是 U_x 和 U_y 也可以相交，如图 15-13.

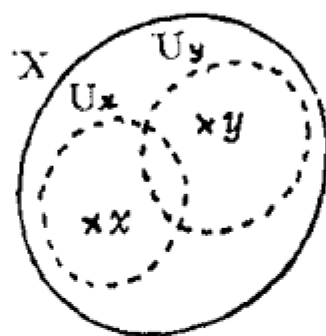


图 15-13

【定理】14. (X,T) 是 T_1 空间的充要条件是只含一个点的集合是闭集合

证明 充分性：

设 x,y 是 X 的相异二点，$\{x\},\{y\}$ 是闭集合，则取 $U_x=\{y\}^c$，$U_y=\{x\}^c$ 即成.

必要性：

设 X 是 T_1 空间，$x\in X$，取与 x 相异的点 y，则存在 U_y 使得

$$y\in U_y\in T,\quad x\notin U_y.$$

这时 $\quad \{x\}^c=\bigcup\{y\ \ y\neq x\}\subset\bigcup\{U\ |\ y\neq x\}\subset\{x\}^c$,

$\therefore\quad \{x\}^c=\bigcup\{U_y\ |\ y\neq x\}\in T$.

$\therefore\quad \{x\}$ 是闭集合. □

【定义】23. T_2 空间・豪斯道夫空间 拓扑空间 (X,T) 满足次之豪斯道夫 (Hausdorff) 公理 $[T_2]$ 时，叫做 T_2 空间.

$[T_2]$ 对于 X 的相异二点 x,y，有互不相交的开集合存在，各包含一点，如图15-14

注意 $[T_2]$ 里还可以加上表达式 $U_x\cap U_y=\phi$

关于豪斯道夫空间，有着丰富的应用，它使得很多定理成立，这里省去了证明，也省去了严密的定义，仅将主要的定理罗列于后.

【定理】15. 若 (X,T) 是 T_2 空间，则其紧子集必是闭集合.

【定理】16. 具有无限个点的T_2空间(X, T)含有无限个不相交的开集合族.

【定理】17. 在T_2空间里，任何收敛点列有唯一的一个极限点.

【定义】24. **正则空间** 拓扑空间(X, T)满足次之维托利(Vietoris)公理[R]时，称为正则空间(regularspace).

[R] 设X的一个点x和闭集F，且$x \notin F$. 这时存在不相交的开集合U_x，U_F满足

$$x \in U_x, F \subset U_F, \text{且} U_x \cap U_F = \phi. \quad x \notin U_F$$

【定义】25. T_3空间 拓扑空间(X, T)既是T_1空间又是正则空间时，叫做T_3空间.

注意 T_3空间是T_2空间，但正则空间不一定是T_2空间.

【定义】26. **正规空间** 拓扑空间(X, T)满足次之乌利逊(Uryshon)公理[N]时，叫做正规空间(normal space).

[N] 对于X的两个不相交闭集合F_1, F_2，存在不相交的开集合U_{F1}，U_{F2}使得$F_1 \subset U_{F1}$，$F_2 \cap U_{F1} = \phi$，$F_2 \subset U_{F2}$，$F_1 \cap U_{F2} = \phi$，如图 15-16.

【定义】27. **T_4空间** 拓扑空间(X, T)既是T_1空间又是正规空间时，叫做T_4空间.

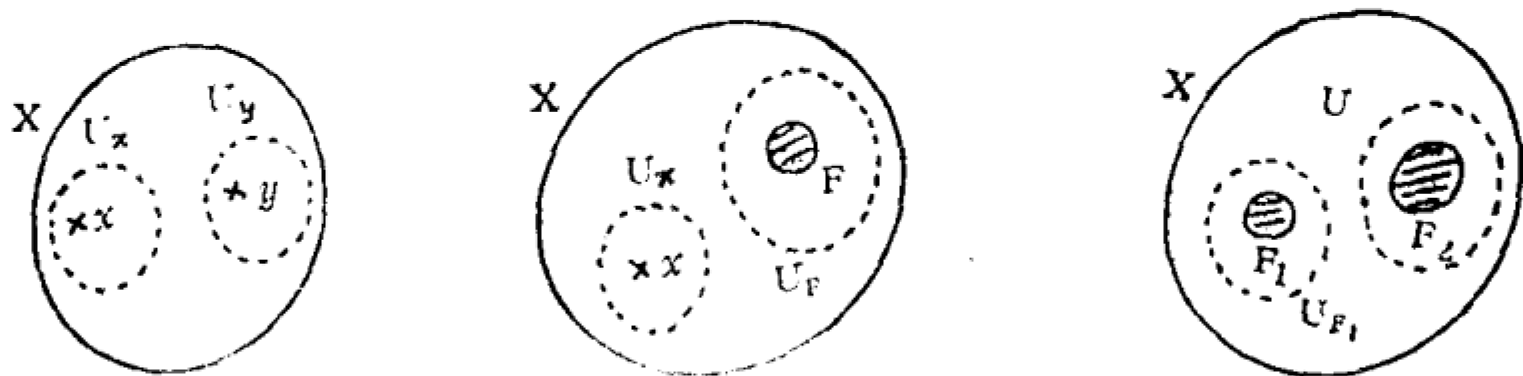


图 15-14

注意 T_4空间是T_3空间，但正规空间不一定是正则空间.

分离公理更向着完全正规(complelely normal)和完全正则(completely regular)的概念扩张，这些都意味着更接近实数具有的结构，实数的任二点间的距离是可以确定的. 研究拓扑空间与定义了距离的空间，距离空间，之间的联系是 1920 年左右开始的，完全解决这个问题，是进入五十年代以后的事.

【定义】28. **距离** 给定集合X，若存在由$X \times X$到非负实数的映射d，满足如下公理，则称d是X上的距离(metric).

[M_1] $d(x, x) = 0$,

[M_2] $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$,

[M_3]　$d(x,y)=d(y,x)$,

[M_4]　若 $x\neq y$, 则 $d(x,y)>0$.

其中 $d(x,y)$叫做 x 和 y 的距离(distance).

【定义】29. 球　对于具有距离 d 的集合 X 的点x, 把集合 $\{y \mid d(x,y)<\varepsilon\}$,叫做中心为 x, 半径为$\varepsilon(\varepsilon>0)$的球(ball), 记为 $B(x,\varepsilon)$.

【定理】18. 由具有距离 d 的集合X中所有的球构成的族是X的一个拓扑基.

注意　拓扑基(base)这个概念在前面没有定义过, 可这样来解释. 对应于一个点 x 及包含这个点的任意开集 U_x, 必存在一个基的元 B 使得$x\in B\subset U_x$, 由这样的 B 的集合族可以决定出 T, 因此可以用来代替 T.

【定义】30. 距离空间　具有距离 d 的集合 X, 有以球作为基的拓扑, 把这样拓扑叫做由 d 诱导的拓扑. 把 X 和这个拓扑组成的空间叫做距离空间(metric space). 记为(X,d)

【定义】31. 可度量　对于拓扑空间(X,T), 存在 X 的距离 d, 当 d 能诱导出 T 时, (X,T)叫做可度量的(metrizable).

例　在离散空间上定义 $d(x,x)=0$, $d(x,y)=1$, $(x\neq y)$, 则成为距离空间. 由这个距离诱导出的拓扑与原拓扑一致, 所以离散空间是可度量的.

【定义】32. 第二公理空间　一个拓扑空间(X,T)满足次之第二可数公理[c_2]时, 叫做第二公理空间(Second axiom space).

[c_2] 对于 T, 存在可数个基.

【定理】19. 满足第二公理的 T_3空间是可度量的空间(乌利逊定理).

(证明略).

【定理】33. 局部有限　设(X,T)的子集合族为 ε, 若在 X 的各点处, 具有这样的邻域, 使得这个邻域最多与 ε 的有限个元具有非空交集, 则 ε 叫做局部有限(locally finite).

【定义】34. σ局部有限　(X,T) 的子集合族 ε 是可数个局部有限族的个和时, 叫做 σ 局部有限(σ-locally finite).

【定理】20. 拓扑空间(X,T)是可度量的, 其充要条件是, 这个空间是具有 σ 局部有限基的 T_3空间. (长田——斯米尔洛夫定理.)

(证明略)

3·5　距离空间

实际上, 距离的概念并不是拓扑性质, 因为很明显, 一个橡胶体变形时, 或伸或缩, 距离是变动着的. 但是, 距离空间却是作为拓扑空间最终目标的实数空间的最重要的一个落脚点.　因此以上的叙述就说到拓扑空

间可具有距离为止，下面再举几个距离空间所具备的性质.

我们知道，距离空间是 T_4 空间，但其证明却是很繁的，这儿只给出如下定理的证明.

【定理】21. 距离空间是 T_2 空间.

证明　设距离空间 (X,d) 的相异二点为 x,y，且 $d(x,y)>0$，这时取适当的 ε，满足 $0<2\varepsilon<d(x,y)$. 再取两个球 $B(x,\varepsilon)$，$B(y,\varepsilon)$，它们分别是包含 x，y，的开集合. 若 $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)\neq\phi$ 则该两球有公共点 z 存在，在此，据 $[M_2]$，$[M_3]$ 有 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)<\varepsilon+\varepsilon<d(x,y)$ 矛盾，$\therefore$ $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\phi$，即是说 (X,T) 是 T_2 空间. □

【定理】22. 距离空间是完全正规的.

关于这个定理的证明，由于没有完全正规的定义，故省略。这里只须知道，距离空间比 T_4 空间进一步满足前面分离公理.

【定义】35. 第一公理空间　对拓扑空间 (X,T). 当满足次之第一可数公理 $[cI]$ 时，叫做第一公理空间(first axiom space).

$[cI]$　对应于 X 的所有点 x，存在包含 x 的可数多个开集合族 $\{B_n(x)\}$，使得对于含 x 的任意开集合 G，存在适当的 $B_n(x)$，使 $x\in B_n(x)\subset G$.

还把这个 $\{B_n(x)\}$ 叫做 x 的可数开基.

【定理】23. 距离空间是第一公理空间.

证明　设对距离空间 (X,d) 的点 x，有 $B_n(x)=B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$ 这里右端的 $B\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$ 是以 x 为中心，半径为 $\dfrac{1}{n}$ 的球. 设含 x 的任意开集合为 G，这时若考察由距离诱导出来的拓扑，就会知道，只要适当地选取 ε(正数)，就会有 $B(x,\varepsilon)\subset G$，这时再取 n 满足 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即有 $x\in B_n(x)\subset B(x,\varepsilon)\subset G$，也就是说，$(X,d)$ 是第一公理的空间. □

关于紧性，在本节就不准备再讲了，这里只把与距离空间有关的一个最有名的定理叙述于下：

【定理】24. 在距离空间上，要使一个集合为紧集合，其充要条件是，这个集合为可数紧集合.

证明省略，以下介绍可数紧性的定义，不过在实数空间内，紧性、可数紧性、有界闭集这三个概念是等价的.

【定义】36. 可数紧性　(X,T) 的子集 A 是可数紧的(Countable compact)是指 A 的可数无限子集合至少存在一个聚点.

3·6 实数的连续性

本节我们讲的是在集合上引入拓扑结构，并考察与这个结构有关的空间的属性，逐次把这个结构复杂化，最终到达距离空间.当然这样研究的最终目标还是实数空间。首先介绍在实数集合中引入 u拓扑和 φ拓扑．当然其它各种各样的拓扑也可以引入．这里所说的实数空间，是指引入了u拓扑的实数集，自然，若再赋以适当的距离它就会成为距离空间，不仅如此，它还具有一些单是距离空间没有的属性，在这些属性中，最重要的是**连续性**和**一致性**，我们只对连续性作较少的叙述．

【定义】37．上(下)有界·有界 实数集合 R 的子集合 A是上有界的(upper bounded)，是指存在一个实数 a 使得对 A 的任意元 x 均有$x\leqslant a$ 成立.这个 a 叫做 A 的上界(upper bound)． 用同样的方式，可定义下有界和下界(lower bound)若实数集合 A 既上有界又下有界，就简单地叫做有界(bounded)．

【定义】38.上确界·下确界 把实数的集合 A 的最小上界叫做上确界(leas upper bound)，同样地，最大的下界叫做下确界(greatest lower bound)．

[c·c] **条件完备性公理** (axiom conditional complete)上有界的实数集合必有上确界．

实数作为满足[c·c]的有序域，利用[c·c]和有序公理及域的公理就可以把实数的全部性质诱导出来.把满足[c·c]这一性质叫做具有连续性．

实数具有连续性，所以对实数列$\{a_n\}$，如下的几个定理成立．

【定理】25. 上有界的单增数列必收敛．

证明 把数列$\{a_n\}$看成是实数的集合则它存在上限 a．由上限的性质，对任意正整数 ε，存在一个序号 n_0，使得 $a-\varepsilon<a_{n0}\leqslant a$ 成立.又由于$\{a_n\}$是单增的，则对满足 $n\geqslant n_0$ 的所有的 n 有 $a_n\geqslant a_{n0}$．

∴ 若$n\geqslant n_0$。则 $a-\varepsilon<a_n\leqslant a<a+\varepsilon$．

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$． □

【系】 下有界的单减数列必收敛．

【定义】39．数列的聚值 对于数列$\{a_n\}$，所谓 a 是$\{a_n\}$的聚值(cluster value)，指的是$\{a_n\}$有一个子列$\{a_{\psi(n)}\}$收敛于 a．

【定理】26． 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 a 是数列$\{a_n\}$的唯一聚值。

证明 设$\{a_n\}$的另一个聚值为 b，则有一个子数列$\{a_{\varphi(n)}\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_{\varphi(n)}=b$，

但已有 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)}=a$.

$\therefore\ a=b$. □

【定理】27. 若数列$\{a_n\}$是有界数列，则它至少有一个聚值.（波尔查诺一外尔斯特拉斯(Bolzano—Weierstrass)定理.）

证明 由于$\{a_n\}$有界，故存在b,c，使对所有的n有$b\leqslant a_n\leqslant c$，这时我们用如下的方式来确定数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$.

先设$b_1=b$，$c_1=c$.

其次，取$\frac{b_1+c_1}{2}=d_1$，这时$\{a_n\}$中必有无限项属于$[b_1,d_1]$或$[d_1,c_1]$

当有无限项落在$[b_1,d_1]$中时，取$b_2=b_1$，$c_2=d_1$；有无限项落入$[d_1,c_1]$中时，取$b_2=d_1$，$c_2=c_1$.这样就确定了b_2,c_2，以此类推，设已确定了b_n,c_n，这时又取$\frac{b_n+c_n}{2}=d_n$，于是$\{a_n\}$必有无限项落入$[b_n,d_n]$或$[d_n,c_n]$之中，若$[b_n,d_n]$中落入了无限项，则记$b_{n+1}=b_n$，$c_{n+1}=d_n$；若是$[d_n,c_n]$中落入了无限项，则记$b_{n+1}=d_n$，$c_{x+1}=c_n$，于是确定了b_{n+1},C_{n+1}.再利用归纳法，即可确定出数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$了·由于对所有的b_n有$b_n<c_1$，对所有的c_n有$c_n<b_1$，而$\{b_n\}$是单调增加的，$\{c_n\}$是单调减少的，所以必存在a，a'满足$\lim_{n\to\infty} b_n=a$，$\lim_{n\to\infty} c_n=a'$.由于对所有的n，有$b_n<c_n$，所以$a\leqslant a'$.若$a<a'$，则令$a'-a=\varepsilon$.由于$c_n-b_n=\frac{1}{2^{n-1}}(c-b)$，对充分大的$n$.有$c_n-b_n<\varepsilon$，然而由于$b_n\leqslant a$，$a'\leqslant c_n$，有$c_n-b_n\geqslant a'-a=\varepsilon$矛盾.$\therefore\ a=a'$.

现在，再来确定$\{a_n\}$的子序列，令$\varphi(1)=1$，一般地，若$\varphi(n)$为自然数的集合$\{k\mid a_k\in[b_n,c_n]\}-\{k\mid k\leqslant\varphi(n-1)\}$的最小数.则$\{\varphi(n)\}$是严格的单增序列，由于 $b_n\leqslant a_{\varphi(n)}\leqslant c_n$，

所以子数列$\{a_{\varphi(n)}\}$收敛于a.即是说，a是$\{a_n\}$的聚值.

【定义】40. 基本列或哥西(cauchy)列 数列$\{a_n\}$是基本列(fundamental sequence)，是指对任意正数ε，可以确定一个相应的n_0，使对比n_0大的序号l,n有$|a_l-a_n|<\varepsilon$.

【定理】28. 基本列是收敛的.

证明 设基本列为$\{a_n\}$，对正数1，取序号n_0使之对不小于n_0的任意序号l,n，有$|a_l-a_n|<1$成立，令$l=n_0$，$n>n_0$时即$|a_{n_0}-a_n|<1$.

$\therefore\ |a_n|<|a_{n_0}|+1$.

这时令$Max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_0-1}|,|a_{n_0}|+1)=b$.

因对一切n，$|a_n|\leqslant b$，所以$\{a_n\}$是有界的，从而据【定理】27具有聚值a，且存在子数列$\{a_{\varphi(n)}\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{\varphi(n)}=a$.

即对于一切正数ε，存在序号n_1，使当$n>n_1$时，有 $|a_{\phi(n)}-a|\angle\varepsilon/2$

并且由于$\{a_n\}$是基本列(哥西列)，所以对任意$\varepsilon>0$，存在序号n_2，使对于大于n_2的任二整数l, m，有

$$|a_l-a_m|<\varepsilon/2.$$

再则，由于$\phi_{(\cdot)}$是严格单增序列，所以存在序号n_3，使当$n>n_3$时，有

$$n_2\leqslant a_{(n)}\ .$$

这时取$N_0=\max(n_1,n_2,n_3)$及 $m>N_0$，则有

$$|a_m-a|\leqslant|a_m-a_{\varphi(n)}|+|a_{\varphi(n)}-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=a.$

【定义】41. 完备性 在实数域中，一切基本列都收敛，这一性质叫做实数的完备性(completeness).

对于实数的连续性有多种不同的定义法，在这里，首先取定完备性公理，导出其它的各种性质.此外，常用的方法是如下所述的**戴德金**分割法.

【定义】42. 分割 把一切实数分成A, B两组，使属于A组的所有数比属于B组的所有数都小，象这样的一种分组(A, B)叫做实数的一个戴德金分割.这时称A为下组，称B为上组.

【定理】29. (戴德金定理)对于实数的每个分割，在上、下组的交界处必有唯一一个确定的实数.

也可以把【定理】29取作公理，而把完备性公理作为定理，或把【定理】25取作公理来导出其它的结果等都是一种方法，而且是等价的方法，详细的论述可参考高木贞治著的"解析概论"(岩波书店)一书.

Ⅱ 代 数

§1. 线性代数

1·1 n维向量及其运算

【定义】1. n维向量 按一定顺序写出来的n个实数的一个有序组(a_1, a_2, …, a_n)叫做n维实向量，以$\vec{a}$表示. 当a_i是复数时，叫做n维复向量.

【定义】2. **分量**　a_i 称为 $\vec{a}$ 的第 i 个分量。

以下仅仅讨论实向量，因此就把实向量简单地叫做向量.

【定义】3. **向量的相等**　两个向量，当维数相等，且各对应分量也相等时，叫做相等. 即是说，当

$$\vec{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n),\quad \vec{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

有

$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1, a_2=b_2, \cdots, a_n=b_n.$$

【定义】4. **向量的和**　对于两个 n 维向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，把它们对应分量的和作为分量而组成的向量

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$$

叫做 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的和，以 $\vec{a}+\vec{b}$ 表示，即是说，

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Longleftrightarrow a_i+b_i=c_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

定义5. **零向量**　各分量都是零的向量叫做零向量，以 $\vec{o}$ 表示.

$\vec{o}=(0,0,\cdots 0)$.

【定理】1. 对于向量的和，下列关系式成立：

(1) 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

(2) 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$；

(3) 零向量的性质　$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$；

(4) 减法　对于任意的 $\vec{a}$，$\vec{b}$，能满足 $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ 的向量 $\vec{x}$ 仅有一个，把这样的 $\vec{x}$ 记为 $\vec{b}-\vec{a}$（由向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 求出 $\vec{x}$ 的运算称为向量的减法）.

证明　(1) 对于 $\vec{a}+\vec{b}$ 及 $\vec{b}+\vec{a}$ 的第 i 个分量 a_i+b_i，b_i+a_i，有 $a_i+b_i=b_i+a_i (i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 其左右两端的对应分量都是相等的.

(3) 由向量和的定义显然可知

(4) 设 $\vec{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，

$\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则

$$\vec{a}+\vec{x}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_i+x_i=b_i (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\Longleftrightarrow x_i=b_i-a_i (i=1,2,\cdots,n),$$

$$\therefore \quad \vec{b}-\vec{a}=(b_1-a_1, b_2-a_2, \cdots, b_n-a_n).$$ □

1·2 向量的数乘

【定义】6. **向量的λ倍**　设 λ 为实数，向量 $\vec{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的λ倍

$\lambda\cdot\vec{a}$（即 $\lambda\vec{a}$ 是把 $\vec{a}$ 的各分量乘 λ 后所成的向量，即是说

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \cdots,\ \lambda a_n).$$

【定理】2. 对于向量的数乘，下列诸法则及等式成立：

(1) 分配法则 I　$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；

(2) 分配法则 II　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

(3) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$；

(4) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$，$0\cdot\vec{a}=\vec{0}$，　$\lambda\vec{0}=\vec{0}$；

(5) $\vec{a}+(-1)\vec{a}=\vec{0}$.

证明　容易验证在(1)—(5)中左、右两端的各分量相等。

注意　常常写 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.　□

1·3　向量的长度·两个向量的内积·两个向量的正交

【定义】7. 向量的内积　两个向量 $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的内积 $(\vec{a},\ \vec{b})$ 定义为它们对应分量的积的和。即是，

$$(\vec{a},\ \vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

注意　内积不是向量，而是数。内积也叫做纯量积。记号 $(\vec{a},\vec{b})$ 也可表示为 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

【定理】3. 内积具有下列诸性质。

(1) 对称性　$(\vec{a},\ \vec{b})=(\vec{b},\ \vec{a})$；

(2) $(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c})=(\vec{a},\ \vec{c})+(\vec{b},\ \vec{c})$；

(3) $(\lambda\vec{a},\ \vec{b})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b})$；

(4) $(\vec{a},\ \vec{a})\geq 0$，等号仅当 $\vec{a}=\vec{0}$ 时成立。

证明　由【定义】7，以上诸等式是明显成立的，例如，(2)的左端

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{c}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)c_i=\sum_{i=1}^{n}a_ic_i+\sum_{i=1}^{n}b_ic_i$$
$$=(\vec{a},\ \vec{c})+(\vec{b},\ \vec{c}).$$
□

【定义】8. 向量的长度　向量 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 定义为 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$. 即是说 $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})}$.

【定理】4. 与向量的长度有关的等式和不等式：

(1) 施瓦兹不等式 $|(\vec{a},\ \vec{b})|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$；

(2) $|\vec{a}|=0 \Longleftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$；

(3) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

(4) 三角不等式 $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

证明 (1) 对维数采用数学归纳法证明，当 $n=1$ 时，这显然是对的，今设 $n=k$ 时成立，由此证明 $n=k+1$ 时也成立。

$|\vec{a}|^2=A^2+a_{k+1}^2$，这里 $A^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2(A\geq 0)$；

$|\vec{b}|^2=B^2+b_{k+1}^2$，这里 $B^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_k^2(B\geq 0)$；

$(\vec{a},\ \vec{b})^2=(C+a_{k+1}b_{k+1})^2$，这里 $C=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$；

$$(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)^2=(A^2+a_{k+1}^2)\ (B^2+b_{k+1}^2)=A^2B^2+A^2b_{k+1}^2+B^2a_{k+1}^2$$
$$+a_{k+1}^2b_{k+1}^2.$$

$(\vec{a},\ \vec{b})^2=C^2+2Ca_{k+1}b_{k+1}+a_{k+1}^2b_{k+1}^2$,

$$\therefore (|\vec{a}|\,|\vec{b}|)^2-(\vec{a},\ \vec{b})^2=A^2B^2-C^2+A^2b_{k+1}^2-2Ca_{k+1}b_{k+1}$$
$$+B^2a_{k+1}^2.$$

由归纳假设知，$AB\geq|C|$，即 $A^2B^2\geq C^2$.

又因 $A^2B^2-C^2\geq 0$，有 $A^2b_{k+1}^2-2Ca_{k+1}b_{k+1}+B^2a_{k+1}^2\geq 0$,

故有　$(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|)^2\geq(\vec{a},\ \vec{b})^2$，即 $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\geq|(\vec{a},\ \vec{b})|$，

(2)、(3)两条，由定义是显然成立的.

(4)
$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b})\\&=(\vec{a},\ \vec{a})+2(\vec{a},\ \vec{b})+(\vec{b},\ \vec{b})\\&\leqslant|\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\,|\vec{b}|+|\vec{b}|^2\\&=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2.\end{aligned}$$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$. □

注意 在二维、三维向量的情形下，以上这些等式和不等式的几何意义是很清楚的.【定理】4是由低维向量向高维向量的推广.

【定义】9. 正交 两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 当 $(\vec{a},\vec{b})=0$ 时，叫做正交，表示成 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

【定理】5. 对于向量的正交，下列关系式成立：

(1) **正交的对称性** $\vec{a}\perp\vec{b}\Longrightarrow\vec{b}\perp\vec{a}$；

(2) **正交的线性性** $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{c}\Longrightarrow\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c})$，

$\vec{a}\perp\vec{b}\Longrightarrow\vec{a}\perp\lambda\vec{b}$（$\lambda$ 是任意实数）.

证明 (1) 显然.

(2) 前一式 $(\vec{a},\ \vec{b}+\vec{c})=(\vec{a},\ \vec{b})+(\vec{a},\ \vec{c})=0$.

后一式 $(\vec{a},\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b})=0$. □

例题 试证明 $\vec{a}\perp\vec{b}\Longleftrightarrow|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2$（勾股定理）.

解
$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=(\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+\vec{b})\\&=(\vec{a},\ \vec{a})+2(\vec{a},\ \vec{b})+(\vec{b},\ \vec{b})\\&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2(\vec{a},\ \vec{b}),\end{aligned}$$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\Longleftrightarrow(\vec{a},\ \vec{b})=0$，即 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

注意 在二维向量的情形下(图 15-17)这正好是勾股定理，因此，上述一般结论也叫做勾股定理.

1.4 线性无关，线性相关

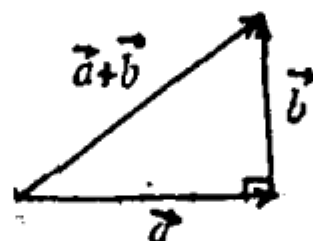


图15-17

【定义】10. 线性无关 r 个向量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$，当满足下列条件

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_r\vec{a}_r=\vec{0}\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=0$$

时，叫做线性无关的.

线性相关 如果 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$ 不是线性无关，则叫做线性相关．换言之，有 r 个不全为零的数 λ_1，λ_2，…，λ_r 使

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_r\vec{a}_r=\vec{0}.$$

例题 对于四维向量 $\vec{a}=(1,\ 0,\ -1,\ 2)$，$\vec{b}=(0,\ -1,\ 3,\ 0)$，$\vec{c}=(1,\ 0,\ 1,\ 2)$，$\vec{d}=(1,\ -1,\ 0,\ 2)$，试证

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是线性无关的；

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ 是线性相关的.

解 (1) $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=(\lambda+\nu,\ -\mu,\ -\lambda+3\mu+\nu,\ 2\lambda+2\nu)=\vec{0}$，

$$\begin{cases}\lambda+\nu=0,\\-\mu=0,\\-\lambda+3\mu+\nu=0,\\2\lambda+2\nu=0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mu=0,\\\lambda+\nu=0,\\-\lambda+\nu=0.\end{cases}\Longrightarrow\lambda=\mu=\nu=0.$$

(2) $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}+\tau\vec{d}=(\lambda+\nu+\tau,\ -\mu-\tau,\ -\lambda+3\mu+\nu,\ 2\lambda+2\nu+2\tau)=\vec{0}$.
即

$$\begin{cases}\lambda+\nu+\tau=0, & ①\\ -\mu-\tau=0, & ②\\ -\lambda+3\mu+\nu=0, & ③\\ \lambda+\nu+\tau=0. & ④\end{cases}$$

①与④相同，把①②③作为联立方程组求解，则 $\lambda:\mu:\nu:\tau=2:1:(-1):(-1)$.
因此有

$$2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}=\vec{0}.$$

所以$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$线性相关.

【定义】11. 线性组合 把$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$分别乘以适当的数再相加而成的向量叫做$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$的线性组合，即是说，把形如

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\cdots+\lambda_r\vec{a_r}$$

的向量叫做$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$的线性组合. λ_1、λ_2，…λ_n 可以全部或部分地为0.

【定理】6. 如果$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$，线性无关，而$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$，$\vec{b}$线性相关，则$\vec{b}$必为$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$的线性组合.

证明 因$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$，$\vec{b}$线性相关，故有λ_1，λ_2，…，λ_r，μ 使

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\cdots+\lambda_r\vec{a_r}+\mu\vec{b}=\vec{0}.$$

其中λ_1，λ_2，…，λ_k，μ中至少有一个不是零，而且一定有$\mu\neq0$，事实上，如果$\mu=0$，则λ_1，λ_2，…，λ_r中至少有一个不为零，且

$$\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\cdots+\lambda_r\vec{a_r}=\vec{0}.$$

这与$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_r}$线性无关的假设相矛盾。因此$\mu\neq0$，

$$\vec{b}=-\frac{\lambda_1}{\mu}\vec{a_1}-\cdots-\frac{\lambda_r}{\mu}\vec{a_r}-\cdots\frac{\lambda_r}{v}\vec{a_r}$$ □

1·5 向量空间、子空间、基底

【定义】12. n维向量空间V 所有n维向量的集合*叫做n维向量空间，用V

* 在这个集合中已定义了向量的加法及数乘运算，并满足上述运算法则——译注

表示。

V的子空间 v的非空子集合W，当满足下列两个条件时，叫做V的子空间、

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}\in W\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\in W$；

(2) $\vec{a}\in w$，λ是任意实数时，$\lambda\vec{a}\in W$

例题 设V是四维向量空间，W是形如$\{(x_1, 2x_1, x_3, 0)$；x_1，x_3是任意实数$\}$的向量集合，试证明W是V的子空间。

解 假设 $\vec{x}=(x_1, 2x_1, x_3, 0)\in W$，$\vec{y}=(y_1, 2y_2, y_3, 0)\in W$，

(1) $\vec{x}+\vec{y}=(s, 2s, t, 0)$，其中 $s=x_1+y_1$， $t=x_3+y_3$，

即 $\vec{x}\in W$，$\vec{y}\in w \Rightarrow \vec{x}+\vec{y}\in W$.

(2) $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1, 2\lambda x_1, \lambda x_3, 0)\in W$.

由于W满足条件(1)，(2)，故W是子空间.

【定义】13. 用r个n维向量张成的子空间 包含向量$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$的最小的子空间叫做用$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$张成(或生成)的子空间，用记号$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r]$表示。

【定理】7. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r]$是$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$的线性组合的全体。

证明 设$W=[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r]$，$U$表示由$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$的所有线性组合构成的集合，因此，

$$\vec{x}\in U \Rightarrow \vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_r\vec{a}_r.$$

由于$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r\in W$， W是子空间，所以此线性组合属于W，即$\vec{x}\in W$. 从而$U\subseteq W$.

又设$\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_r\vec{a}_r$ 及 $\vec{y}=\mu_1\vec{a}_1+\mu_2\vec{a}_2+\cdots+\mu_r\vec{a}_r$ 是U的两个向量，则

$$\vec{x}+\vec{y}=(\lambda_1+\mu_1)\vec{a}_1+(\lambda_2+\mu_2)\vec{a}_2+\cdots+(\lambda_r+\mu_r)\vec{a}_r\in U;$$

$$\lambda\vec{x}=\lambda\lambda_1\vec{a}_1+\lambda\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda\lambda_r\vec{a}_r\in U.$$

所以U是V的包含$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_r$的子空间，由于W是最小的这种子空间，所以$w\subseteq U$.

从$U\subseteq W$ 及 $W\subseteq U$ 得到 $U=W$. □

【定义】14. 子空间的基底W 如果向量$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，…，$\vec{b}_r$张成的空间是W，同时这组向量又线性无关，则$\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_r\}$叫做空间$W=[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_r]$的基底而$W$叫做$r$维子空间。

例题 设W是三维向量空间中各分量和为零的所有向量构成的集合，即

$$W=\{\vec{x}=(x_1, x_2, x_3);\quad x_1+x_2+x_3=0\}$$

试证明

(1) W是一个子空间；

(2) $\vec{b_1}=(1, -1, 0)$, $\vec{b_2}=(0, 1, -1)$是W的基底。

解 因由$\vec{x}\in W$, $\vec{y}\in W$ 显然有 $\vec{x}+\vec{y}\in W$, $\lambda\vec{x}\in W$，故(1)成立。又，易知$\vec{b_1}\in W$，$\vec{b_2}\in W$，且$\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$线性无关。对于W中的任意向量$\vec{x}$。

$$\begin{aligned}\vec{x}&=(x_1, x_2, x_3)\\&=(x_1, -x_1-x_3, x_3)\\&=(x_1, -x_1, 0)+(0, -x_3, x_3)\\&=x_1(1, -1, 0)+(-x_3)(0, 1, -1)\\&=x_1\vec{b_1}-x_3\vec{b_2},\end{aligned}$$

因此$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}\}$是W的基底，即(2)得证。

注意 在任何子空间中恒有基底吗？一个向量空间的不同基底的向量个数是一定的吗？这些都是应解决的问题，由于证明的复杂性 我们只是指出这些问题的答案是肯定的，而略去证明。

【定义】15. 正交系 r个非零向量$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, …, $\vec{a_r}$，当其中任何两个向量都正交时，叫做正交系。

归一化正交系 正交系中每个向量的长度都为1时，叫做归一化正交系。显然，在三维向量空间中 $\vec{i}=(1, 0, 0)$, $\vec{j}=(0, 1, 0)$, $\vec{k}=(0, 0, 1)$是归一化正交系。

【定理】8. 设W是用线性无关的r个向量$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}\cdots\vec{a_r}$张成的子空间，从W选择归一化正交系$\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_r}\}$， 则可用$\vec{b_1}$ $\vec{b_2}$, …, $\vec{b_r}$张成子空间W．即

$$[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_r}]=[\vec{b_1}, \vec{b_2}, \cdots, \vec{b_r}]$$

证明从略，仅以下面的例子说明本定理的证明。

例题 在四维向量空间中，试从三个向量$\vec{a_1}=(1, 1, 0, 0)$, $\vec{a_2}=(0, 1, 2, 0)$, $\vec{a_3}=(0, 0, 3, 1)$作出被它们张成的子空间的归一化基底。

解 向量$\vec{a_1}$, $\vec{a_3}$正交，故令$\vec{b_1}=\vec{a_1}$, $\vec{b_2}=\vec{a_3}$. 在W的向量中取

$$\vec{b_3}=\lambda\vec{b_1}+\mu\vec{b_2}=\vec{a_2}=(\lambda, \lambda+1, 3\mu+2, \mu)$$

使它和$\vec{b_3}$, $\vec{b_2}$正交 故由内积等于零有

$$\begin{cases}\lambda+\lambda+1=0\\ 3(3\mu+2)+\mu=0\end{cases}\qquad \therefore\quad \lambda=-\frac{1}{2},\quad \mu=-\frac{3}{5}$$

由此得 $\vec{b}_3=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ -\frac{3}{5}\right)$，且 $\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，$\vec{b}_3$是正交系。

令 $\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\right)$，$\vec{c}_2=\frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}=\left(0,\ 0,\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

$$\vec{c}_3=\frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}=\left(-\frac{\sqrt{10}}{6},\ \frac{\sqrt{10}}{6}\ \frac{\sqrt{10}}{15},\ -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

则 $\{\vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3\}$ 是所求的归一化正交基底。

注意 一个子空间的归一化正交基底，一般有无数多组。

§ 2. 矩　阵

2·1 矩阵及其运算(加减)

【定义】1. 矩阵 把 $m\times n$ 个数排列而成的矩形阵列

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

叫做$(m,\ n)$矩阵(或 $m\times n$ 矩阵)，在此，假设 a_{ij} 是实数或复数，当 m，n 固定或无须标出时，可写 A 为 $A=(a_{ij})$。

矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij}；叫做 A 的$(i,\ j)$元素。

当 $m=n$ 时，A 叫做 n 阶方阵。

【定义】2. 矩阵的相等 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 在下列情形下叫做相等，

(1) A 和 B 的行数及列数分别相等；

(2) 其对应元素都相等。即

$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

当矩阵 A，B 相等时，写成 $A=B$.

【定义】3. 矩阵的和　对于两个 $(m,\ n)$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，把它们对应元素的和作为元素的矩阵 C，叫做 A，B 的和，用 $A+B$ 表示。即是说，$C=A+B\Longleftrightarrow c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

注意　矩阵的和只能对其行数及列数分别相等的矩阵才能考虑。

【定义】4. 零矩阵　元素都是零的矩阵叫做零矩阵，用 0 表示。

【定理】1. 设 A，B，C，是$(m,\ n)$矩阵，则与向量运算相同的下列法则成立。

(1) 交换律　$A+B=B+A$

(2) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 对于任意的$(m,\ n)$矩阵 A，有 $0+A=A+0=A$

(4) 减法　对于 A，B，仅有一个$(m,\ n)$矩阵$\mathbf{X}$存在，满足 $A+\mathbf{X}=B$．把这写成 $\mathbf{X}=B-A$，即 $x_{ij}=b_{ij}-a_{ij}$

证明　与向量的情形完全相同，事实上，在考虑加法及数乘的范围内，$(m,\ n)$矩阵及 mn 维向量服从相同的法则。□

【定义】5. 矩阵的数乘　在矩阵 $A=(a_{ij})$ 的各元素上乘以 λ 后作为元素构成的矩阵，叫做 A 的 λ 倍，写成 λA，即　$\lambda A=(\lambda a_{ij})$

【定理】2. 与向量的情形相同，下列诸法则成立：

(1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

(3) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(4) $0A=0$，　$\lambda 0=0$，　$1A=A$;

(5) $1A+(-1)A=0$，　$(-1)A$ 写成$-A$.

证明　由定义，(1)—(5)显然成立。□

2·2　矩阵的积

【定义】6. 积　设 $A=(a_{ij})$是$(l,\ m)$矩阵，$B=(b_{ij})$是 $(m,\ n)$ 矩阵，而 $C=(c_{ij})$是$(l,\ n)$矩阵。当 C 的$(i,\ j)$元素是由 A 的第 i 行构成的 m 维向量 $\vec{a}_i$ 与 B 的第 j 列构成的 m 维向量 $\vec{b}_j$的内积时，C 叫做 A 与 B 的积。写成 $C=AB$．即有

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \vec{a}_i \to \begin{pmatrix} \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{im} \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \\ c_{ij} \\ \\ \end{pmatrix} \\ & \uparrow \\ & \vec{b}_j \end{array}$$

$$c_{ij}=\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

例题　试求下列矩阵的积

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

解答

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

【定义】7. 矩阵 A，B 可交换是指 $AB=BA$

注意　(1) $AB=BA$ 的含义是，首先 AB，BA 两者都必须有定义，然后相等。因而 A，B 必须是同阶数的方阵

(2) AB，BA 虽然都有定义，但未必总是相等(见上例(2)，(3))

【定理】3. 对于矩阵的积，下列诸法则成立

(1) 结合律　$(AB)C=A(BC)$

(2) 分配律　$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

(3) $(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)$.

这些等式表明，当其左右两端中有一端被定义时，另一端也被定义，而且两端相等。

证明　(1) 设$(AB)C$被定义，故可设A是(m, n)矩阵，B是(n, p)矩阵，C是(p, q)矩阵．这时$D=AB$的(i, k)元素是

$$d_{ik}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk} \qquad ①$$

从而　$E=(AB)C=DC$的(i, j)元素是

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{p}d_{ik}c_{kj} \qquad ②$$

将①代入②得

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{p}\left[\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lk}\right]c_{kj}$$

交换求和次序得

$$e_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\left[\sum_{k=1}^{p}b_{lk}c_{kj}\right]$$

因　$\sum_{k=1}b_{lk}c_{kj}$是BC的(l, j)元素，故e_{ij}是$A(BC)$的(i, j)元素．即

$$A(BC)=(AB)C$$

(2)，(3)的证明与(1)类似。　□

例■　设F是全体三阶方阵的集合，在F中加法，减法和乘法按通常的方式定义。显然，【定理】2、【定理】3的诸法则也成立，但请读者想想，下面的各法则也成立吗？

(1)　$AB=0 \Longrightarrow A=0$ 或 $B=0$

(2)　$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

(3)　对于所有的$A\in F$，存在矩阵I使

$IA=AI=A$

成立。

(4)　当B，$A\in F(A\neq 0)$时，存在X使$AX=B$．

解　(3)式是成立的，这只须取

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

就行了.

(1), (2)及(4)不成立，其反例如下

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

当 $AB\neq BA$ 时，等式$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 就不成立了.

(4) 满足等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的矩阵 X 不存在，(参考逆矩阵)

【定义】8. 单位矩阵　一个方阵，当其对角线上的元素都是1，其他元素都是 0 时，叫做单位矩阵，即是说，所谓 n 阶单位矩阵是这样的n阶方阵$I_n=(e_{ij})$,

$$e_{ii}=1,\qquad (i=1,2,\cdots,n;\quad j==1,2,\cdots,n).$$
$$e_{ij}=0\quad (i\neq j)$$

【定理】4. 当 I 是单位方阵，A 是同阶的任何方阵，则

$$AI=A,\quad IA=A$$

成立

2.3 逆 矩 阵

【定义】9. 逆矩阵　对于方阵 A，使

$$AX=XA=I$$

的矩阵 X 叫做 A 的逆矩阵(逆方阵)，用 A^{-1} 表示.

【定理】5. 对于方阵 A，如果有矩阵X，Y 存在使

$$AX=YA=I\qquad (*)$$

则　X=Y，且这样的 X，Y是唯一确定的，

证明　设 A 是n 阶方阵，由 AX 有定义，因而 X 可设成 $(n,\ m)$ 矩阵，AX 是 $(n,\ m)$ 矩阵．因 $AX=I$ 所以 $m=n$，即 X 是 n 阶方阵．同样地，Y 也是 n 阶方阵．由【定理】3，(1)知　$(YA)X=Y(AX)$

再由【定理】4及(∗)知，

$$X=IX=(YA)X=Y(AX)=YI=Y.$$

剩下证明满足(∗)的X的唯一性，如果还有一个矩阵X′也使AX′=I，则由AX′=YA=I及已证明的结论得X′=Y=X. □

本定理实际上可放宽条件如下，但证明从略.

【定理】5′. 对于方阵A，如果使AX=I的矩阵X存在，则XA=I成立，这样的X是唯一确定的.

例题 在下列各方阵中，有逆方阵存在吗？如有，求出它来.

$$(1)\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\qquad(2)\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\qquad(3)\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&5&1\end{pmatrix}$$

解 (1) 从 $\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 得

$$\begin{pmatrix}X_{11}+2X_{21}&X_{12}+2X_{22}\\3X_{11}+5X_{21}&3X_{12}+5X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

解 $\begin{cases}X_{11}+2X_{21}=1\\3X_{11}+5X_{21}=0\end{cases}$ 得 $\begin{matrix}X_{11}=-5\\X_{21}=3\end{matrix}$

解 $\begin{cases}X_{12}+2X_{22}=0\\3X_{12}+5X_{22}=1\end{cases}$ 得 $\begin{matrix}X_{12}=2\\X_{22}=-1\end{matrix}$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}X_{11}+2X_{21}=1 & ①\\2X_{11}+4X_{21}=0 & ②\end{cases}$$

由①×2−②得0=2，方程组①②无解. 因此，$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$无逆矩阵存在.

(3) $$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}X_{11}+2X_{31}=1\\2X_{21}=0\\5X_{21}+X_{31}=0\end{cases}\quad\therefore\quad X_{11}=1,\ X_{21}=0,\ X_{31}=0$$

同样地求解关于其余未知数 X_{ij} 的联立方程组. 最后可得

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&5&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&5&-2\\0&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{5}{2}&1\end{pmatrix}$$

§3. 行列式

【定义】 行列式

二阶方阵 $A=(a_{ij})$的行列式是*

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

三阶方阵 $A=(a_{ij})$的行列式是

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶方阵 $A=(a_{ii})$的行列式是

* 一阶方阵 $A=(a)$的行列式 $|A|=a$——译注

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

注意1. 下面只对三阶行列式进行讨论。对于更高阶的行列式，也可类似地进行讨论。

2. 矩阵与行列式是两个完全不同的概念，切勿混为一谈，矩阵表示由若干个数排成的矩形阵列，而行列式是一个数*，n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的行列式是用 n^2 个数 $a_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ 确定的一个数，也就是说，是n^2个元 a_{ij} 的一个函数

例题 试求下列各行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot0\cdot1+(-1)\cdot3\cdot5+2\cdot2\cdot2-1\cdot3\cdot2-(-1)\cdot2\cdot1$

$-2\cdot0\cdot5=-11$

(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ca^2+ab^2-b^2c-c^2a-a^2b$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

※即使一个元素的矩阵$A=\{a\}$，它也与$|A|=a$不同。——译注

下面是关于行列式性质的若干定理，其中陈述的性质对于所有 n 阶行列式都是成立的。但在写出行列式等式时，只写三阶行列式，而且证明也只是对三阶行列式进行。

【定理】1. 将行列式的行和列依次调换，行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

证明 由于上式两边的展开式相同，立即得证。 □

【定理】2. 当行列式的某一列所有元素为两项和时，该行列式的值是将此列两项分开后，所得两个行列式的和(对于"行"也有同样结论)，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

证明 在行列式定义式中的各单项式是对于所有各列文字的一次式，因而。例如说。

$$a_{11}(a_{22}+a'_{22})a_{33}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{11}a'_{22}a_{33}.$$ □

【定理】3. 如果行列式中某一列元素全为零，则该行列式的值等于零（对于"行"也有同样结论）。

【定理】4. 用 k 乘行列式的任何一列时，整个行列式的值被 k 乘 （对于"行也有同样结论），

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

注意 矩阵 A 与 k 相乘表示 A 的各元素（而不是某一列） 都与 k 相乘 (2.1 的[定义]5)，假定 A 是 n 阶方阵时，kA 的行列式变为 A的行列式的 k^n 倍。

$$|kA|=k^n|A|.$$

【定理】5. 行列式两列对换时，其值仅仅变号(对"行"也同样)，

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

【定理】6．把行列式的一列乘以一个数再加到另一列上，其值不变（对于"行"也同样），

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{32} \end{vmatrix}.$$

证明　可以通过直接计算，也可以利用【定理】2和【定理】4将右端变换来证明。□

§4．行列式的应用

4·1　联立线性方程组

【定理】1．克莱姆公式　对于 x_1，x_2，x_3 的线性联立方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，有唯一的解。

$$x_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad x_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_3=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

证明　用 $-x_2$ 乘 $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的第 2 列，$-x_3$ 乘其第 3 列，然后都加到第 1 列上去，根据 § 3【定理】6和【定理】4，得

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ b_2-a_{22}x_2-a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ b_3-a_{32}x_2-a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$=Dx_1$$

由 $D\neq 0$ 得到定理中的 x_1。至于 x_2、x_3，以同法求得。□

【定理】2. 矩阵 A 当且仅当 $|A|\neq 0$ 时，具有逆矩阵。

证明　要证明当 $|A|\neq 0$ 时，A 具有逆矩阵，即 $|A|\neq 0$ 是充分条件（$|A|$ 表示行列式，由于行列式只对方阵有定义，故 A 一定是方阵）。为了证明 $|A|\neq 0$ 是 A 具有逆矩阵的必要条件，要用到关于矩阵积的行列式的定理，故略去。

因为 $|A|\neq 0$，故由【定理】1知。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有解。

事实上 x_1、x_2、x_3 作为

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0.$$

的解，可以求得。y_i，$z_i(i=1, 2, 3)$ 也同样可求得。故 A 有逆矩阵。

□

4.2矩阵的秩和向量的线性无关

【定义】1. 矩阵的秩　从矩阵 A 中选取 r 个行和 r 个列，在这些行列相交处的元素构成一个 r 阶方阵，它的行列式叫做 A 的 r 阶子(行列)式。当 A 的各 r 阶子式中至少有一个不为零、而 $r+1$ 阶子式全为零时，就说矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩是 r。

例题

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

的秩是2.

解　选取第1、2行。第1、2列．由于行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4\neq 0;$$

因此 A 的秩$\geqslant 2$，如果能证明所有三阶子式都等于零，则 A 的秩是 2．这些三阶子式是从 A 中去掉了一个列的四个子行列式，它们全都是 0．例如去掉第 2 列后的三阶子行列式是

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=4+18-8+6-8-12=0.$$

其余三个三阶子式也都是0.

【定义】2．矩阵的行向量、列向量　(m,n)矩阵 A 的每一行构成一个 n 维向量，把它叫做 A 的一个行向量。A 的每一列构成其元素竖直排列的 m 维向量，把它叫做 A 的一个列向量。在(3，4)矩阵

$$P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$$

中，有三个四维行向量 $\vec{a}_i=(a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ a_{i3}\ \ a_{i4})(i=1,\ 2,\ 3)$及四个三维列向量

$$\vec{b}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ a_{3j}\end{pmatrix}\quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

【定理】3．矩阵的秩和向量的线性无关

当矩阵

$$P=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$$

的秩等于 $\bar{r}$ 时，在列向量

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\quad \vec{b}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix},\quad \vec{b}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix},\quad \vec{b}_4=\begin{pmatrix}a_{14}\\a_{24}\\a_{34}\end{pmatrix}$$

中，恰有 $\bar{r}$ 个构成线性无关组，而其余的列向量与这 $\bar{r}$ 个列向量是线性相关的。

证明 不妨假设(3，4)矩阵 P 的秩是 2. 因此有不为 0 的 2 阶子式存在。不失一般性，假设它是

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

由

$$\begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13}\\a_{11} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0,$$

即 $$a_{33}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=0. \quad ①$$

又因 $D\neq 0$，所以

$$a_{11}x+a_{12}y=a_{13},$$
$$a_{21}x+a_{22}y=a_{23}$$

有解(克莱姆公式).

$$x=\frac{E}{D},\quad y=\frac{F}{D},\ 其中\ E=\begin{vmatrix}a_{13} & a_{12}\\a_{23} & a_{22}\end{vmatrix},\quad F=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}. \quad ②$$

亦即

$$\frac{a_{11}E}{D}+\frac{a_{12}F}{D}=a_{13},$$

$$\frac{a_{21}E}{D}+\frac{a_{12}F}{D}=a_{23},$$

$\therefore$ $$a_{11}E+a_{12}F-a_{13}D=0$$
$$a_{21}E+a_{22}F-a_{23}D=0. \quad ③$$

用记号 D、E、F 将①改写成

$$-a_{31}E-a_{32}F+a_{33}D=0,$$

即 $$a_{31}E+a_{32}F-a_{33}D=0. \quad ④$$

③、④便可用列向量的关系写成

$$E\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix}+F\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}-D\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}=0.$$

由于 $D\neq0$，所以 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$是线性相关的。同理，$\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_4$也是线性相关的。

又由 $D\neq0$，容易知道 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$是线性无关的。 □

【定理】4. 线性联立方程组

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$$

有解的充分必要条件是矩阵

$$P=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&b_1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&b_2\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&b_3\end{pmatrix}$$

的秩相等。

证明　与【定理】3的证明几乎是相同的，故从略。 □

例题　解下列方程组

$$(1)\begin{cases}x+2y+3z=0,\\2x\qquad+2z=3,\\3x+y+4z=2;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}x+2y+3z=-1,\\2x\qquad+2z=2,\\3x+y+4z=2.\end{cases}$$

解　(1)没有解。其理由如下。

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&2\\3&1&4\end{pmatrix}$$的秩是 2，而

$$Q=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&0&2&3\\3&1&4&2\end{pmatrix}$$

的秩是 3(Q 有 3 阶非零的子式)。

两者的秩不一致，所以没有解。

通常的作法如下：

对方程组 $x+2y+3z=0$， ①

$2x\quad +2z=3$， ②

$3x+y+4z=2$。 ③

由③×2−①得 $5x+5z=4$，

由④×2−②×5得 $0=-7$，

上式是矛盾的，因而此方程组没有解。

$$(2)\begin{cases}x+2y+3z=-1,\\2x\quad +2z=2,\\3x+y+4z=2\end{cases}$$

有解。其理由如下

$$R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -1\\2 & 0 & 2 & 2\\3 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 0 & 2\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

R的秩是 2，与 P 的秩一致。

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$$

是线性无关的，而

$$\vec{c}=(-z)\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3z\\2-2z\\2-4z\end{pmatrix}$$

是与 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$ 线性相关的。

$$\therefore x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3z\\2-2z\\2-4z\end{pmatrix}$$

中的 x、y 在 z 取任意值时都存在。求解

$$\begin{cases}x+2y=-1-3z,\\2x\quad =2-2z.\end{cases}$$

得到 $x=1-z$，$y=-1-z$，$z=$任意值，

注意 上例的几何解释如下：

$$\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ y \quad +z=1, \\ 3x+y+4z=2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-1)+2(y+1)+3z=0, & ① \\ (x-1) \quad +z=0, & ② \\ 3(x-1)+(y+1)+4z=0. & ③ \end{cases}$$

①是过点 $A(1, -1, 0)$而垂直于向量$(1, 2, 3)$的平面。

②是过点 A 而垂直于向量$(1,0,1)$的平面。

③是过点 A 而垂直于向量$(3,1,4)$的平面。

这三个平面有公共直线

$$\begin{matrix} x+z=1, \\ y+z=-1. \end{matrix} \quad \left(\text{或} \frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{-1}=z.\right)$$

【定理】5．$(m、n)$矩阵 A 的线性无关的列向量之最大个数与线性无关的行向量之最大个数相等，都等于 A 的秩。

证明 由【定理】3，矩阵的秩＝线性无关的列向量的最大个数。又矩阵的秩在交换行和列时是不变的，因而矩阵的秩＝交换了行和列后的矩阵的秩＝线性无关的行向量的最大个数。 □

注意 把【定理】5换一种说法就是

矩阵的秩＝用列向量生成的子空间的维数

＝用行向量生成的子空间的维数。

§5．矩阵运算的应用

【定义】 转移概率矩阵 当 n 阶方阵 $P=(p_{ij})$ 满足下列两个条件时，叫做转移概率矩阵，简称概率矩阵．

(1) $p_{ij}\geq 0$, $i, j=1, 2, \cdots, n$;

(2) $p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{in}=1$, $i=1, 2, \cdots, n$.

换句话说，各元素非负，且每一行元素的和都是 1 的方阵叫做概率矩阵．

例
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

是 4 阶概率矩阵.

【定理】1. 同阶概率矩阵的积仍是概率矩阵. 也就是说，当 $P=(p_{ij})$，$Q=(q_{ij})$是同阶概率矩阵时，$PQ=R=(r_{ij})$也是概率矩阵.

证明　因 $R=PQ$，显然有
$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj}.$$

因 p_{ik}，p_{kj} 非负，故 $r_{ij}\geq 0$.

其次，
$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left[p_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{kj}\right)\right].$$

因为$\sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj}=1$ $(k=1, 2, \cdots, n)$，所以
$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}=1.$$
□

【概率矩阵的意义】 为了简单起见，我们只研究 $n=4$ 的情形，假设有 A_1，A_2，A_3，A_4 四种状态.

处于状态 A_1时，下一步分别转移到 A_1，A_2，A_3，A_4 的概率可按如下方式确定：掷骰子出现 6 点就转移到状态 A_4，出现 1 点或 2 点就转移到态 A_2，把出现 3 点就转移到状态 A_3，出现 4 点或 5 点就停留在状态A_1. 并用 p_{ij} 表示由状态 A_i 转移到状态 A_j 的概率. 于是有

p_{11}=停留在 A_1 状态的概率=4 点或 5 点出现的概率 $=\frac{1}{3}$

p_{12}=由 A_1 到 A_2 的转移概率$=\frac{1}{3}$.

类此． $p_{13}=\frac{1}{6}$，　$p_{14}=\frac{1}{6}$.

可用同样的方法确定，当处于状态 A_2 或 A_3、A_4 时，其下一步转移到状态 A_1，A_2，A_3，A_4 的概率．设最后得到的转移概率矩阵为

$$p=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

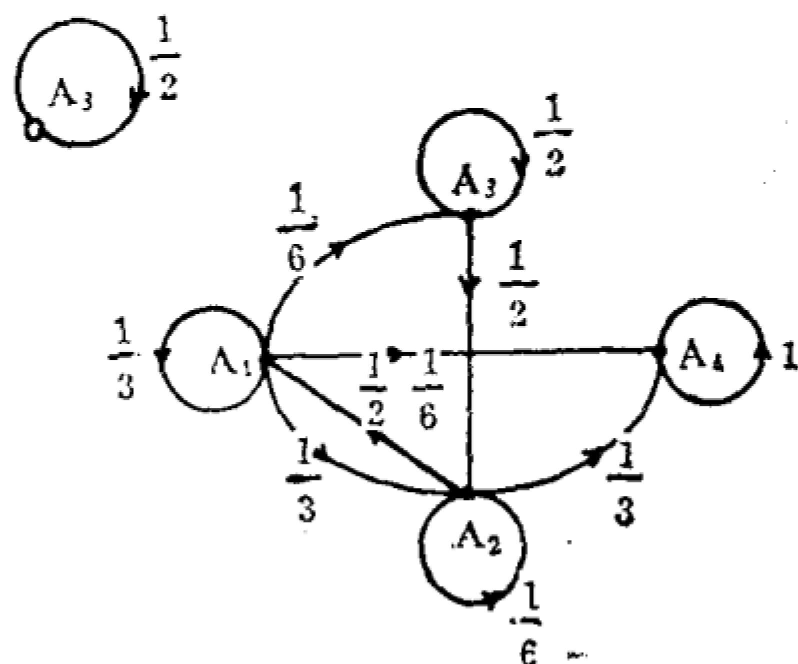


图 15—18

可用图 15-18 来表示这个矩阵的意义．其中 $A_1 \xrightarrow{\frac{1}{6}} A_3$ 表示 $p_{13}=\frac{1}{6}$，也就是说，由状态 A_1 转移到状态 A_3 的概率是$\frac{1}{6}$.

又，Ⓐ₃ $\frac{1}{2}$ 表示，从 A_3 出发下一步仍停留在 A_3 的概率是 $p_{33}=\frac{1}{2}$；Ⓐ₄ 1 表示 A_4 永远不转移到任何别的状态，即 $p_{44}=1$.

【定理】2．设有 n 个相互独立的状态 A_1，A_2，…，A_n，经第一次转移后，由 A_i 移到 A_j 的概率为 p_{ij}

(1) 若任何一种状态都可能实现，则矩阵 $P=(p_{ij})$ 是转移概率矩阵．

(2) P 的 m 次幂 $P^m=(p_{ij}^{(m)})$ 也是转移概率矩阵．P^m 的 (i, j) 元素 $p_{ij}^{(m)}$ 表示第 m 次转移后，从状态 A_i 转移到 A_j 的概率．

【证明】 (1) 因为从 A_i 可转移到 A_1，A_2，…，A_n 中的任何一种状态，

所以　$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1.$

又因概率 $p_{ij}\geq 0$，所以 P 是转移概率矩阵.

(2) 用数学归纳法(由【定理】1显见，P^m 是转移概率矩阵)

$m=1$ 时定理成立.

设当 $m=k$ 时定理成立，证明当 $m=k+1$ 时也成立.

因当 $m=k$ 时定理成立，所以 $P^k=(p_{il}^{(k)})$ 的元素 $p_{il}^{(k)}$ 表示第 k 次转移后，由 A_i 转移到 A_l 的概率. 那末在第 $k+1$ 次转移过程中由 A_i 转移到 A_e 的情况遵从(图 15-19)所示规律.

$p_{il}^{(k)}=P^k$ 的(i, l)元素=在第 k 次转移后 $A_i\longrightarrow A_l$ 的概率.

因而在第 $k+1$ 次转移后，$A_i\longrightarrow A_j$ 的概率为

$$\sum_{e=1}^{n} p_{il}^{(k)} p_{lj}.$$

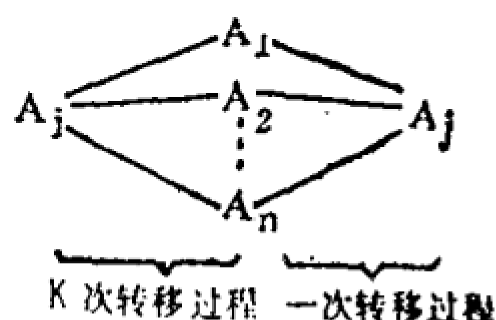


图15—16

由矩阵乘积的定义知，这是 P^kP 的(i, j)元素. 也就是说 P^{k+1} 的(i, j)元素 $p_{ij}^{(k+1)}$是在第 $k+1$ 次转移后，$A_i\longrightarrow A_j$ 的概率. □

例题 试考察稍微复杂一点的网球比赛. 设在一场比赛中，甲取胜的概率为 p，从而乙取胜的概率为 $1-p$. 试求在多场比赛中，甲取胜的概率.

解 设各场比赛后，可能产生的各种状态为

A_0: 0—0，A_1: 15—0，A_2: 0—15，A_3: 30—0，

A_4: 0—30，A_5: 15—15，A_6: 45—0，A_7: 30—15，

A_8: 15—30，A_9: 0—45，A_{10}: 45—15，A_{11}: 15—45，

A_{12}: 30—30(或平局)，A_{13}: 45—30 (甲领先)，A_{14}: 30—45(乙领先)

A_{15}: 甲得胜，A_{16}: 乙得胜.(其转移关系如图 15-20).

则相应的概率矩阵 P 是一个 17 阶矩阵，如后面的(∗)式. 其中，比如，

$p_{5,7}=p$，$p_{5,8}=q$，

$p_{5,x}=0$　$(x\neq 7, 8)$，

$p_{13,12}=q$，$p_{13,15}=p$，

$p_{13,x}=0$　$(x\neq 12, 15)$.

$p_{15,15}=p_{16,16}=1.$

(比赛结束)

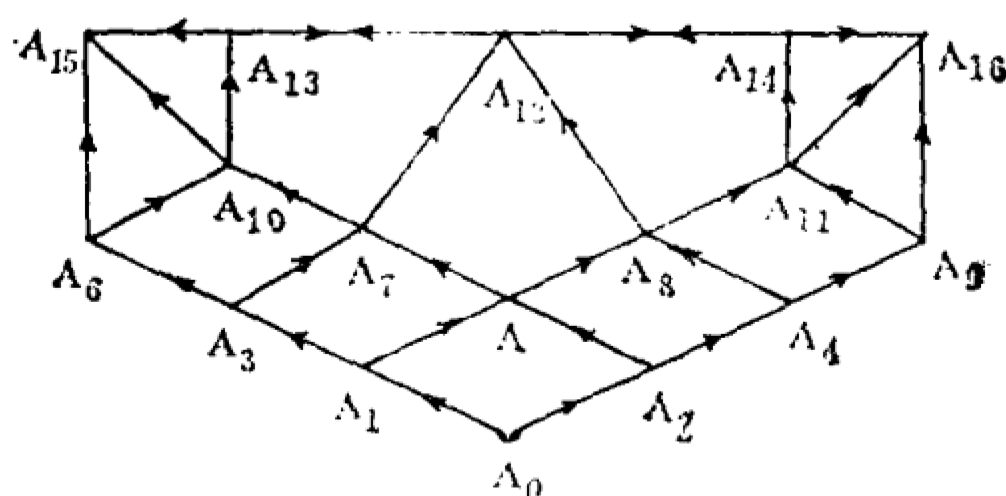


图 15-20

为求甲得胜的概率，应当求

$$P^4+P^5+P^6+\cdots$$

的(0，15)元素的值．且为便于计算，最好先求

$$I+P+P^2+P^3+P^4+P^5+\cdots$$

的(0，15)元素的值．

$P=$

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
A_0	0	p	q	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_1				p		q											
A_2					q	p											
A_3							p	q									
A_4																	
A_5								p	q								
A_6																	
A_7																	
A_8																	
A_9																	
A_{10}																	
A_{11}																	
A_{12}														p	q		
A_{13}													q			p	
A_{14}													p				q
A_{15}																	
A_{16}																	

Ⅲ　线性规划与对策论

§1. 线性规划

1·1　什么是线性规划

为了说明线性规划的意义，首先看几个例子.

例题1. 由联立不等式 $x-2y\geq-6$，$7x-2y\leq18$，$x+y\geq0$ 表示的区域如(图 15-21)，求函数 $f=x+2y$ 在此区域上的最大值和最小值.

解　所给区域是三条直线

$$x-2y=-6, \quad ①$$

$$7x-2y=18, \quad ②$$

$$x+y=0, \quad ③$$

围成的三角形 ABC (图 15-21)，其顶点 A、B、C 的坐标各是 $A(4, 5)$，$B(-2, 2)$，$C(2, -2)$.

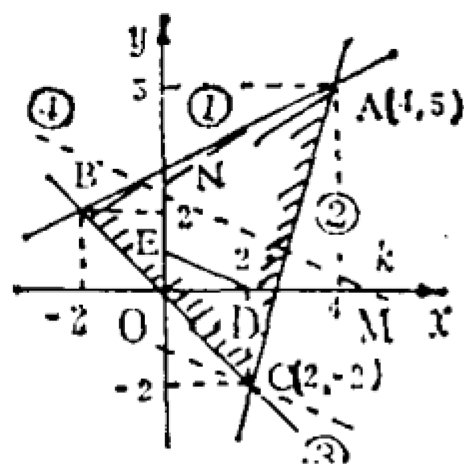


图15-21

现在设

$$x+2y=k. \quad ④$$

由于直线④在 x 轴上的截距是 k，斜率是 $-\frac{1}{2}$，所以平行于图中过点 $D(2,0)$，$E(0, 1)$的直线. 由于 $f=k$，所以平行于 DE 移动直线④，使它和$\triangle ABC$ 保持有公共点，这时④的截距的最大值与最小值，就是 f 的最大值与最小值. 但④通过 A 点时，f 的值最大，其值是$f(4, 5)=14$. 又，④通过 C 点时，f 变为最小，其值是 $f(2, -2)=-2$.

答：最大值是 14，最小值是 -2.

例题2. 在下列五个联立不等式所限制的范围内，求 x，y 的一次式 $2x+3y-2$ 的最大值.

$$2x-y-10\leq0, \quad ①$$

$$4x+3y-30\leq0, \quad ②$$

$$4x-3y+6\geq0, \quad ③$$

$$x\geq0, \quad ④$$

$$y\geq0. \quad ⑤$$

解　满足所给不等式①、②、③、④、⑤的所有点 (x, y) 构成的区域是

以(图 15-22)中原点 O、$A(5,\ 0)$、$B(6,\ 2)$、$C(3,\ 6)$、$D(0,\ 2)$ 作顶点的闭五边形(周界及其内部).

设　$f=2x+3y-2$,

则直线 $f=k$ 的斜率是 $-\frac{2}{3}$ 且平行于图中过 $M(6,\ 0)$，$N(0,\ 4)$的直线。因而当它通过 C 点时，f 变为最大，其值是 $f(c)=22$.

例题3. 某工厂生产 A、B 两种产品。每生产一个单位量，平均各需电功率、水量和劳动力如下表所示。又，在一定时间内，所耗电功率，水量和劳动力分别不能超过 1200(千瓦)，300(吨)，840(劳动日)。再有，生产A的每一个单位和 B 的每一个单位，所得盈利各为 5 万元，3 万元。

	A	B
电功率(千瓦)	20	15
水　(吨)	6	3
劳动力　(日)	7	12

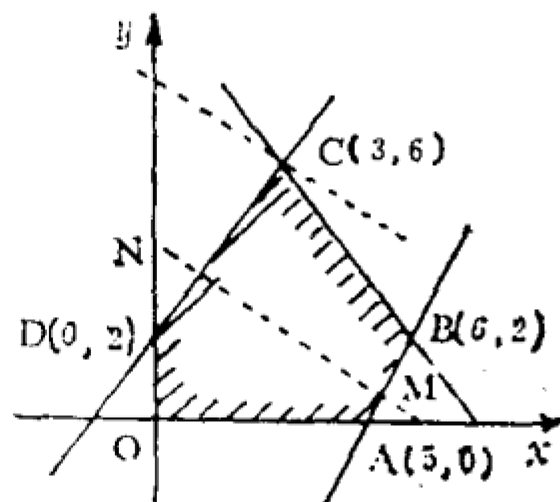


图15-22

(1)用不等式写出，在上述的一定时间内，生产A的 x 单位和 B 的y单位时，x、y 应满足的条件.

(2) 求盈利最大时 x、y 的值及此时的盈利.

解　(1) x、y应满足的不等式是

$$20x+15y\leqslant 1200, \quad ①$$
$$6x+3y\leqslant 300, \quad ②$$
$$7x+12y\leqslant 840. \quad ③$$
$$x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0 \quad ④$$

满足这些不等式的点(x、y)构成的区域是五边形 $OABCD$ (图15-23). 且有

$A(50,0)$,　　$B(30,40)$,

$C\left(\frac{360}{17},\ \frac{980}{17}\right)$,　　$D(0,50)$.

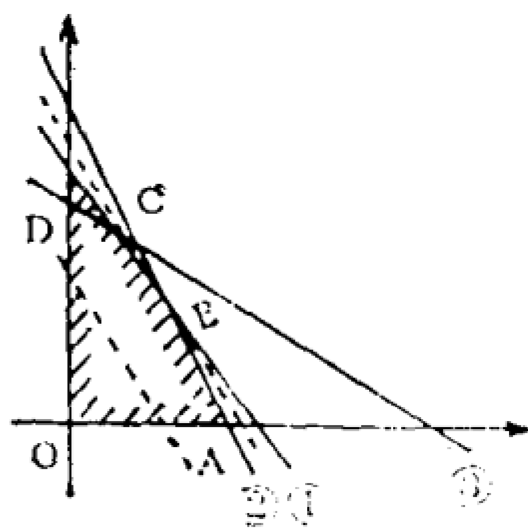


图15-23

(2) 设盈利是 f，则

$$5x+3y=f.$$

这是斜率为$-\frac{5}{3}$的一条直线，平行移动此直线，可以求出它和这个五边形的公共点所对应的最大f值。这在B点可达到.

∴　最大值$=f(B)=270$.

例题4. 某矿山公司拥有出矿能力不同的两座矿山X_1，X_2，假设它们都生产上等、中等、下等矿石。出矿能力如表所示。今有用户需要上等、中等、下等矿石各12吨、8吨、24吨.又设X_1,X_2矿山每动工一天，花费各为6万元、4万8千元。问，在这次任务中，为使总费用最小，X_1,X_2矿山应该各开工多少天？

矿石＼矿山	X_1	X_2	需要量
上　等	6	2	12
中　等	2	2	8
下　等	4	12	24
费　用	60,000	48,000	

解　设矿山X_1、X_2各需开工x_1、x_2天，相应的约束条件是

$6x_1+2x_2\geqslant 12$,　(1)

$2x_1+2x_2\geqslant 8$,　(2)

$4x_1+12x_2\geqslant 24$,　(3)

$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$.　(4)

这个区域是x_1—$ABCD$—x_2（图15-24），且有$A(6,\ 0)$，　$B(3,\ 1)$，　$C(1,\ 3)$，$D(0,\ 6)$.

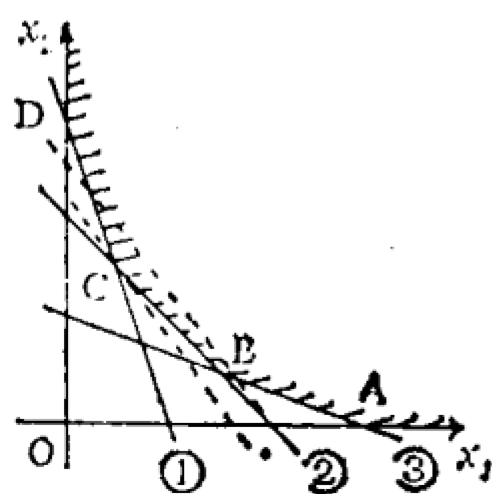


图.15-24

设这时的总费用是k，则

$$60000x_1+48000x_2=k.\qquad ⑤$$

这是斜率为$-\frac{5}{4}$的直线．由于直线BC的斜率是-1，所以k在⑤通过C时变为最小，其值是$k=204,000$元。又由$C(1,3)$知,所求的天数为$x_1=1$，　$x_2=3$.

如上述诸例所示，在满足所给联立不等式（所谓约束条件）的变数组中，求出一组数，使另一个给定的一次式（线性函数）的值变为最大或最

小的问题叫做**线性规划**(Linear Programming，略作 L·P)。在实际问题中，如例题 2、3、4 所示的那样，一般说来，x 和 y 的值是非负的.

在上面的例子中，变数只有两个，因而可在平面的多边形上来讨论，但若变数为三个以上时，就不是平面图形问题了，因而必须考虑别的方法，为了解决不只两个变数的线性规划问题，先作一些准备。

1.2 向量

全体三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3) 的集合，叫做**立体空间**或**三维空间**，用$R^{(3)}$表示。这时数组(x_1, x_2, x_3)确定着$R^{(3)}$ 中具有坐标 x_1, x_2, x_3的点 P，或说确定着具有分量 x_1, x_2, x_3 的向量 R，写成 $R=(x_1, x_2, x_3)$. 或者自原点 0 至点P引矢径$\overrightarrow{OP}$，则$R=\overrightarrow{OP}$。这时 0 叫做始点，P叫做终点，特别地，以O为始点的向量叫做**位置向量**。

向量还可以用一行的矩阵或一列的矩阵写成：

$$[x_1, x_2, x_3]\text{或}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}(=[x_1, x_2, x_3)^*, \ * \text{表示转置矩阵}).$$

象这样具有三个分量的向量叫做三维向量，一般的 n 维向量可以同样的定义。对于 n 维向量 $\mathbf{P}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\mathbf{Q}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 和，数乘、内积以及模等概念可定义如下：

$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$，　　(和)

$k\mathbf{P}=(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$，　　(数乘)

$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，　　(内积)

$|\mathbf{P}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$.　　(模)

下面给出几个向量线性无关和线性相关的定义。

设有 m 个向量 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots, \mathbf{P}_m$ 和m 个常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，若等式

$$C_1\mathbf{P}_1+C_2\mathbf{P}_2+\cdots+C_m\mathbf{P}_m=0 \qquad ①$$

当且仅当 $C_1=C_2\cdots=C_m=0$ 时才成立，则这样的 m 个向量叫做是线性无关的，也叫做线性独立。否则，只要有不全为 0 的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，使①成立，这些向量就叫做是线性相关的。

例如，对于三个三维向量 $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0)$，$\mathbf{e}_2=(0, 1, 0)$，$\mathbf{e}_3=(0, 0, 1)$，若要

$$c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3=(c_1, 0, 0)+c_0, c_2, 0)+(0, c, c_3)=0.$$

则必须 $c_1=c_2=c_3=0$，因此 e_1，e_2，e_3 是线性无关的.

又设在这三个向量之外，任取向量 $a=(a_1, a_2, a_3)$ 则有

$$a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3+(-1)a=0.$$

在系数 a_1，a_2，a_3，-1 之中，由于有非 0 数存在，所以 e_1，e_2，e_3，a是线性相关的. 而且由此式出发，作为任意向量的 a，可唯一地表成

$$a=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3. \quad ②$$

在这个意义下，e_1，e_2，e_3 叫做三维空间的一个基底，而②的右边叫做 e_1，e_2，e_3 的线性组合.

假设三个三维向量 $P_1=(a_{11}, a_{12}, a_{13})$，$P_2=(a_{21}, a_{22}, a_{23})$，$P_3=(a_{31}, a_{32}, a_{33})$是线性无关的，那末

$$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3=0. \quad ③$$

即联立方程组

$$\begin{aligned} a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3=0, \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3=0, \\ a_{31}c_1+a_{32}c_2+a_{33}c_3=0, \end{aligned} \quad ④$$

仅当 $c_1=c_2=c_3=0$ 时才成立.

然而，根据行列式理论，把 c_1，c_2，c_3 视为未知数，在联立方程组④中，令

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

则 $\Delta\neq0$ 时，④只有一组解 $c_1=c_2=c_3=0$（叫做平凡解）；$\Delta=0$ 时，必具有 $c_1=c_2=c_3=0$ 以外的解（非平凡解）. 从而，P_1，P_2，P_3 线性无关的条件是，④只具有平凡解.

于是，假如在这三个向量以外，还有第四个向量$P_4=(a_{41}, a_{42}, a_{43})$，则四个向量 P_1，P_2，P_3，P_4 必然是线性相关的. 事实上

(1) 如果 P_1，P_2，P_3 是线性相关的，则有不全为 0 的常数 c_1，c_2，c_3 存在，使

$$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3=0$$

成立. 这时令 $c_4=0$，则有

$$c_1P_1+c_2P_2+c_3P_3+c_4P_4=0$$

成立. 由于在 c_1，c_2，c_3，c_4 之中有非 0 的数，所以 P_1，P_2，P_3，P_4 是线性相关的.

(ii) 如果$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\mathbf{P}_3$是线性无关的，由于$\Delta\neq0$，所以联立方程组：

$$a_{11}c_1+a_{12}c_2+a_{13}c_3=a_{14},$$
$$a_{21}c_1+a_{22}c_2+a_{23}c_3=a_{24},$$
$$a_{31}c_1+a_{32}c_2+a_{33}c_3=a_{34},$$

具有唯一的一组解c_1，c_2，c_3. 因而

$$c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2+c_3\mathbf{P}_3+(-1)\mathbf{P}_4=0.$$

故$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\mathbf{P}_3$，$\mathbf{P}_4$是线性相关的. 而且这时$\mathbf{P}_4$作为$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$，$\mathbf{P}_3$的线性组合，可唯一地表成下式.

$$\mathbf{P}_4=c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2+c_3\mathbf{P}_3.$$

把以上所述加以整理，就构成如下定理.

【定理】1. 三个三维向量$\mathbf{P}_1=(a_{11},\ a_{12},\ a_{13})$，$\mathbf{P}_2=(a_{21},\ a_{22},\ a_{23})$，$\mathbf{P}_3=(a_{31},\ a_{32},\ a_{33})$线性无关的充分必要条件是$\Delta=|a_{ij}|\neq0$. 任意四个三维向量必是线性相关的，其中任何一个向量都可表为其他三个向量的线性组合.

假如有两个非零向量$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$线性相关，则有两个不全为零的常数c_1，c_2，使得$c_1\mathbf{P}_1+c_2\mathbf{P}_2=0$，但由于$\mathbf{P}_1$，$\mathbf{P}_2$都不是零向量，所以$c_1$，$c_2$皆不为0. 因而$\mathbf{P}_2$可表示成$\mathbf{P}_2=\lambda\mathbf{P}_1$ $\left(\lambda=-\dfrac{c_1}{c_2}\right)$. 从而，若$\mathbf{P}_1=\overrightarrow{oP_1}$，$\mathbf{P}_2=\mathbf{P}=\overrightarrow{oP_2}$，就有$\overrightarrow{OP_2}=\lambda\overrightarrow{OP_1}$，$O$，$P_1$，$P_2$位于同一条直线上. 反之，假如$O$，$P_1$，$P_2$位于同一直线上，则$\mathbf{P}_1$和$\mathbf{P}_2$是线性相关的.

由此，假若$\mathbf{P}_1=\overrightarrow{OP_1}$，$\mathbf{P}_2=\overrightarrow{OP_2}$是线性无关的，那么直线$OP_1$，$OP_2$决定一个平面.

例题1. 设两个向量$\mathbf{P}_1=\overrightarrow{OP_1}$，$\mathbf{P}_2=\overrightarrow{OP_2}$线性无关，且设$O$，$P_1$，$P_2$决定的平面为$\pi$，试证

(1) 对于任意的向量$\mathbf{P}=\overrightarrow{OP}$，要使$P$点位于$\pi$上，其条件是

$$\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2\quad(-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty); \qquad ①$$

(2) 对于角$\angle P_1OP_2$内的点P，有

$$\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2\quad(\lambda\geq0,\ \mu\geq0)\ (\text{非负线性组合}); \qquad ②$$

(3) 对于直线P_1P_2上的点P，有

$$\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2\quad(\lambda+\mu=1); \qquad ③$$

(4) 对于线段P_1P_2上的点P，有

$$\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}+\mu\mathbf{P}_2\quad(\lambda\geq0,\ \mu\geq0;\ \lambda+\mu=1),\ (\text{凸组合}). \qquad ④$$

证明　只要证明了(1)与(3)，(2)与(4)也就同理可得了.

(1) 如图 15-25，由 P 点分别引 $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1$ 的平行线，与 OP_1，OP_2 或其延长线相交于 Q，R，因为 O，Q，P_1 共线，所以 $\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OP_1}=\lambda\mathbf{P}_1$，$(-\infty<\lambda<+\infty)$，同样有

$$\overrightarrow{OR}=\mu\overrightarrow{OP_2}=\mu\mathbf{P}_2 \quad (-\infty<\mu<+\infty),$$

$$\therefore \quad \mathbf{P}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2.$$

反之，当①成立时，把刚才的叙述倒过来，就可以证明 P 点位于 π 上.

(3) 假设在直线 P_1P_2 上取任意一点 P，则由于 P_1，P_2，P 位于同一直线上，所以满足

$$\overrightarrow{P_1P}=t\cdot\overrightarrow{P_1P_2} \quad (-\infty<t<+\infty)$$

的 t 存在且只有一个.

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP_1}+t(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})=(1-t)\overrightarrow{OP_1}+t\cdot\overrightarrow{OP_2}.$$

因此只要令 $\lambda=1-t$，$\mu=t$，就有 $\lambda+\mu=1$ 及 $\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2$ 成立.

反之，当③成立时，令 $\mu=t$，$\lambda=1-t$，把以上叙述倒过来，就可以证明 P 点位于直线 P_1P_2上.

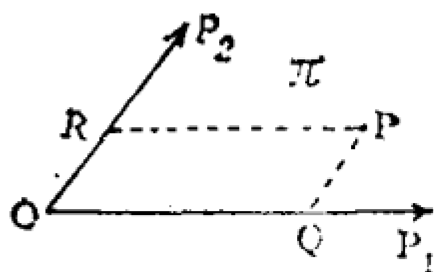


图 15-25

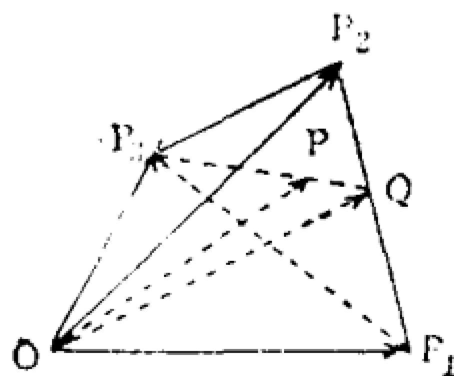


图 15-26

例题2. 如图 15-26，假如在三维空间中取线性无关的向量 $\mathbf{P}_1=\overrightarrow{OP_1}$，$\mathbf{P}_2=\overrightarrow{OP_2}$，$\mathbf{P}_3=\overrightarrow{OP_3}$，且 P 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的周界上或内部的一点，则

$$\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+\mu\mathbf{P}_2+\gamma\mathbf{P}_3 \quad (\lambda\geqslant0,\ \mu\geqslant0,\ \gamma\geqslant0,\ \lambda+\mu+\gamma=1) \qquad ①$$

成立. 反之也成立.

证明　假设连接 P_3 和 P 的直线与边 P_1P_2 的交点是 Q，则 Q 位于线段 P_1P_2上，所以，

$$\overrightarrow{OQ}=t\mathbf{P}_1+s\mathbf{P}_2 \quad (t\geqslant0,\ s\geqslant0,\ t+s=1).$$

又因 P 位于线段 P_3Q 上，所以

$\mathbf{P}=\overrightarrow{OP}=t'\mathbf{P}_3+s'\overrightarrow{OQ}$ $(t'\geqslant 0,\ s'\geqslant 0,\ t'+s'=1)$,

$\therefore$ $\mathbf{P}=s'(t\mathbf{P}_1+s\mathbf{P}_2)+s'\mathbf{P}_3$.

于式中令 $s't=\lambda$, $s's=\mu$, $t'=\gamma$, 则 $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, $\nu\geqslant 0$, 且 $\lambda+\mu+\nu=s't+s's+t'=s'+t'=1$.

$\therefore$ $\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}+\mu\mathbf{P}_2+\mu\mathbf{P}_3$ $(\lambda\geqslant 0,\ \mu\geqslant 0,\ \nu\geqslant 0;\ \lambda+\mu+\nu=1)$.

反之，当①成立时，把 $\nu=1-\lambda-\mu$ 代入①式，变形即得

$\mathbf{P}-\mathbf{P}_3=\lambda(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_3)+\mu(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_3)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{P_3P}=\lambda\overrightarrow{P_3P_1}+\mu\overrightarrow{P_3P_2}$.

或 $\frac{1}{1-\nu}\overrightarrow{P_3P}=\frac{\lambda}{1-\nu}\overrightarrow{P_3P_1}+\frac{\mu}{1-\nu}\overrightarrow{P_3P_2}$, $(\nu\neq 1)$. ②

对上式右端的系数，有 $\frac{\lambda}{1-\nu}+\frac{\mu}{1-\nu}=\frac{\lambda+\mu}{1-\nu}=\frac{1-\nu}{1-\nu}=1$, 且各项为正，所以右端表出了 P_1P_2 上的点 Q 所对应的向量 $\overrightarrow{P_3Q}$

$\therefore$ $\overrightarrow{P_3P}=(1-\nu)\overrightarrow{P_3Q}$, $0\leqslant 1-\nu\leqslant 1$.

于是 P 变成线段 P_3Q 上的点，从而位于 $\Delta P_1P_2P_3$ 内. ①叫重心坐标，一般表示成 $P(\lambda,\ \mu,\ \nu)$, $(\lambda,\ \mu,\ \nu\geq 0,\ \lambda+\mu+\nu=1)$.

1·3 凸集合

在三维空间中，对于不一定是线性无关的 k 个向量 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, …, $\mathbf{P}_k$, 令 $\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{P}_1$, $\overrightarrow{OP_2}=\mathbf{P}_2$, …, $\overrightarrow{OP_k}=\mathbf{P}_k$ 时.

$$\mathbf{P}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{P}_k \quad (\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}\lambda_i=1) \qquad ①$$

表示的点 $P(\mathbf{P}=\overrightarrow{OP})$ 的全体的集合，叫做由点 O, P_1, P_2, …, P_k 确定的凸多面体. 而把形如①的式子叫做 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, …, P_k 的凸组合.

因为每个向量 $\mathbf{P}$ 唯一地对应一个点 P，满足 $\overrightarrow{OP}=\mathbf{P}$, 所以下面说到向量 $\mathbf{P}$, 有时也说成点 P.

在凸多面体的点中，不能用自身以外的点的凸组合来表示的点，叫做凸多面体的顶点.

因而，若 P_i 是顶点($\overrightarrow{OP_i}=\mathbf{P}_i$), 且

$\mathbf{P}_i=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{P}_k$,

则必有 $\lambda_i=1$，$\lambda_1=\cdots=\lambda_{i-1}=\lambda_{i+1}=\cdots=\lambda_k=0$.

这时一般地有下列结论成立.

"凸多面体的顶点的凸组合是此凸多面体的点．反之，凸多面体的点可用其顶点的凸组合来表示。"

设 A 是 (1，3) 矩阵（或 3 维行向量），$\mathbf{X}$ 是 (3，1) 矩阵（或 3 维列向量），b 是常数，令

$$AX\leqslant b \quad (\text{或 } AX\geqq b). \qquad ①$$

具体地说，令

$$A=[a_1,\ a_2,\ a_3],\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},$$

则满足

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\leqslant b \quad (\text{或}\geqq b) \qquad ①$$

的点 $\mathbf{X}$ 组成三维空间中的一个点集，叫做**闭半空间**．又若代替①，取 $AX>b$（或 $AX<b$）时，相应的点集合叫做**开半空间**.

今在闭半空间①内取两点 $\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$ 时，

$$AX_1\leqslant b,\quad AX_2\leqslant b$$

成立．又设 $\mathbf{X}$ 是连接两点 X_1，X_2 的线段上的一点，由于 $\mathbf{X}$ 可用下式表示，即

$$\mathbf{X}=\lambda\mathbf{X}_1+\mu X_2\quad (\lambda\geqq 0,\ \mu\geqq 0,\ \lambda+\mu=1),$$

所以 $$AX=A(\lambda X_1+\mu X_2)=\lambda AX_1+\mu AX_2\leqslant(\lambda+\mu)b=b.$$

$\therefore\quad AX\leqslant b.$

也就是说，点 $\mathbf{X}$ 也属于该闭半空间.

对于开半空间，结论也是一样的.

设有一个点集 M，当任取属于 M 的两点 P,Q 时，线段 PQ 上的任意点都属于 M，则这个集合 M 叫做**凸集合**.

比如，上面所述闭(开)半空间就是凸集合.

【定理】2. 两个或两个以上的凸集合的交集还是凸集合.

证明 设 M_1，M_2 是两个凸集合，M 是它们的交集，取 M 中的两点 P，Q，并设 R 是线段 PQ 上的一点.

由于 P，Q 是 M_1 的点，M_1 是凸集合，所以 R 也是 M_1 的点．同样的道理，R 也是 M_2 的点．从而 R 属于 M，因此 M 是凸集合．□

几个闭半空间的交，叫做**凸多角集**．假如凸多角集是有界的，就叫做

凸多面体.

例如，四个闭半空间

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3\leqslant b_i \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

如果它们包围成一个有限区域，那末它是一个凸四面体.

【定理】3. k 个向量 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, …, $\mathbf{P}_k$ 的一切非负线性组合的集合 M，以及它们的一切凸组合的集合 N，都是凸集合.

证明 (1) 设 P, Q 是 M 中的两点，故可表为

$$\mathbf{P}=\lambda_1\mathbf{P}_1+\lambda_2\mathbf{P}_2+\cdots+\lambda_k\mathbf{P}_k \quad (\lambda_1\geqslant0, \lambda_2\geqslant0, \cdots, \lambda_k\geqslant0),$$

$$\mathbf{Q}=\mu_1\mathbf{P}_1+\mu_2\mathbf{P}_2+\cdots+\mu_k\mathbf{P}_k \quad (\mu_1\geqslant0, \mu_2\geqslant0, \cdots, \mu_k\geqslant0).$$

又设 $\mathbf{R}$ 是线段 PQ 上的一点，则有

$$\mathbf{R}=\lambda\mathbf{P}+\mu\mathbf{Q}=\sum_{i=1}^{k}(\lambda\lambda_i\mathbf{P}_i+\mu\mu_i\mathbf{P}_i)(\lambda\geqslant0, \mu\geqslant0, \lambda+\mu=1)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)\mathbf{P}_i.$$

由于 $\lambda\lambda_i+\mu\mu_i\geqslant0$，所以这个 R 也属于 M，即 M 是凸集合.

(2) 在凸组合的情形下，由于 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$，所以 $\sum_{i=1}^{k}(\lambda\lambda_i+\mu\mu_i)=\lambda\cdot\sum_{i=1}^{k}\lambda_i+\mu\cdot\sum_{i=1}^{k}\mu_i=\lambda\cdot1+\mu\cdot1=1$.

因而，R 属于 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, …, $\mathbf{P}_k$ 的凸组合集 N. 所以 N 是凸集合. □

【定理】4. 设 M 是凸多面体，它的全部顶点是 $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, …, $\mathbf{T}_k$.

(1) 若点 $\mathbf{Z}$ 是 M 的顶点的凸组合，则 $\mathbf{Z}$ 属于 M.

(2) M 的任意一点，可用这些顶点的凸组合表出.

证明(1) 由于凸多面体是有界的凸多角集，所以是几个闭半空间的交. 因此可用矩阵的形式表示成 $AX\leqslant B$. 从而各顶点满足 $AT_i\leqslant B(i=1, 2, \cdots, k)$. 今设 $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\cdots\mathbf{T}_k$ 的一个凸组合是

$$\mathbf{Z}=a_1\mathbf{T}_1+a_2\mathbf{T}_2+\cdots+a_k\mathbf{T}_k \left(a_i\geqslant0, \quad \sum_{i=1}a_i=1\right),$$

则 $A\mathbf{Z}=a_1A\mathbf{T}_1+a_2A\mathbf{T}_2+\cdots+a_kA\mathbf{T}_k\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_k)B=B.$

$\therefore \quad A\mathbf{Z}\leqslant B.$

也就是说，$\mathbf{Z}$ 属于 M.

(2) 这里只证 2 维的情形，一般的情况同理可证.

如图 15-27，取 M 中的任意点 Z，过 Z 作一条直线，与 M 边界线交于 P，Q 两点。设 P 位于 T_i 与 T_i 之间，Q 位于 T_l 与 T_m 之间，则

$$P=\lambda' T_i+\mu' T_i \quad (\lambda'\geq 0,\quad \mu'\geq 0 \quad \lambda'+\mu'=1),$$
$$Q=\lambda'' T_l+\mu'' T_m \quad (\lambda''\geq 0,\quad \mu''\geq 0,\quad \lambda''+\mu''=1).$$

同时设 $Z=\lambda P+\mu Q \quad (\lambda\geq 0,\quad \mu\geq 0,\quad \lambda+\mu=1)$，

则有 $Z=\lambda(\lambda' P_i+\mu' T_i)+\mu(\lambda'' T_l\mu+\mu'' T_m)$.

且 $\lambda\lambda'+\lambda\mu'+\mu\lambda''+\mu\mu''=\lambda+\mu=1$

因而，Z 可用顶点的凸组合表示. □

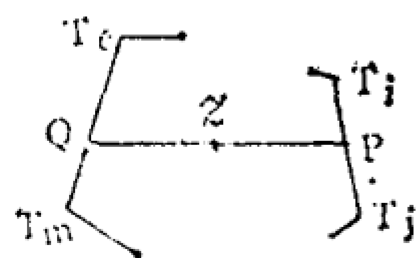


图15—27

【定理】5. 在三维空间中的凸多面体 M，它的点 $P(x_1, x_2, x_3)$ 的线性函数 f 为

$$f(x_1, x_2, x_3)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3.$$

则仅当 P 为 M 的顶点时，f 才可能取最大值或最小值。

证明 对于点 P，设有 M 的两个点 $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$，$B(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$，使 P 位于线段 AB 上。令 $\vec{OP}=P$，$\vec{OA}=a$，$\vec{OB}=b$，则可表为

$$P=\lambda a+\mu b,\quad \lambda\geq 0,\quad \mu\geq 0,\quad \lambda+\mu=1.$$

从而有

$$x_1=\lambda x_1^0+\mu x_1^1,$$
$$x_2=\lambda x_2^0+\mu x_2^1,$$
$$x_3=\lambda x_3^0+\mu x_3^1,$$

$$\therefore\quad f(P)=f(x_1, x_2, x_3)=C_1(\lambda x_1^0+\mu x_1^1)+C_2(\lambda x_2^0+\mu x_2^1)$$
$$+C_3(\lambda x_3^0++\mu x_3^1)$$
$$=\lambda(c_1x_1^0+c_2x_2^0+c_3x_2^0)+\mu(c_1x_1^1+c_2x_2^1+c_3x_3^1)$$
$$=\lambda f(A)+\mu f(B)$$
$$=\lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)$$
$$=\{f(A)-f(B)\}\lambda+f(B)\quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

其中 $f(P)$，$f(A)$，$f(B)$ 分别是 f 在 P，A，B 点的函数值。因而假如 $f(A)>f(B)$，则 $f(P)$ 是 λ 的增函数。在 $\lambda=0$ 时变为最小，在 $\lambda=1$ 时变为最大，亦即在线段 AB 上：

如果 $f(A)>f(B)$，则 $f(p)$ 在 A 点最大，在 B 点最小，同理

如果 $f(A)=f(B)$，则 $f(p)$在 AB 上是常数。

如果 $f(A)<f(B)$，则 $f(p)$在 B 点最大，在 A 点最小。

也就是说，线性函数 $f(P)$在线段 AB 的端点处取得最大值或最小值。因此，在凸多面体 M 上，任意两个点之间，$f(p)$ 没有最大值或最小值。亦即，$f(p)$ 只能在某个顶点取得最大值或最小值。

1.4 线性规划问题

在凸多角集中的最大、最小值问题，通常可用下面的形式提出：

在约束条件

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant b_1, \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_i\leqslant b_m, \\ & x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{aligned} \tag{i}$$

下，使线性函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{ii}$$

的值变为最大的问题，叫做最大问题。

又，在约束条件

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1, \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m, \\ & x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{aligned} \tag{iii}$$

下，使线性函数(ii)的值变为最小的问题，叫做最小问题。这时，函数(ii)叫做目标函数。这里，多数是在 $b_1\geqslant 0$, $b_2\geqslant 0$, …, $b_m\geqslant 0$ 的情况下讨论的。

对这些问题，还可以引入新的辅助变量，把用不等式表示的约束条件改为等式的形式而变成联立方程组。

例如，在(i)的情形，若采用新的非负变量 ζ_1, ζ_2, …, ζ_m，则(i)可表为

$$\begin{aligned} & \zeta_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ & \zeta_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ & \zeta_m+a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{aligned} \tag{iv}$$

$\zeta_1 \geq 0$, $\zeta_2 \geq 0$, …, $\zeta m \geq 0$; $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$.

这时，目标函数(ii)可以写成

$$f = 0 \cdot \zeta_1 + 0 \cdot \zeta_2 + \cdots + 0 \cdot \zeta_m + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_i. \quad \text{(v)}$$

我们把新变量 ζ_1，ζ_2，…，ζ_m 叫做松弛变量

在最小问题的情形，只要用 $-\zeta_1$，$-\zeta_2$，…，$-\zeta_m$ 代替 ζ_1，ζ_2，…，ζ_m，即得到相应的形式。

从而在最大、最小问题中，都有公共变数 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_m$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$. 于是我们只要重新记这些变数(包括松弛变数) 为 x_1，x_2，…，x_n，就可以把线性规划问题，变成下面统一的形式：

在约束条件

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,\\
&x_1 \geq 0,\ \cdots,\ x_n \geq 0;\quad b_1 \geq 0,\ \cdots,\ b_m \geq 0.
\end{aligned}$$

下，使目标函数

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

的值变为最大(或最小)的问题，叫做**线性规划问题**.

又若令

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则联立方程组(vi)可以写成

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = B,$$

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad \cdots,\quad x_n \geq 0,\quad B \geq 0.$$

于是，为了解这样的线性规划问题，首先必须会解联立方程组，这可

由下面的例来说明。

例题　解下列联立方程组：

$$x_1+x_2-2x_3+3x_4=-3, \quad ①$$

$$-2x_1-x_2+x_3-2x_4=1, \quad ②$$

$$x_1-2x_2-x_3+x_4=2, \quad ③$$

$$2x_1-x_2-3x_3+4x_4=-1. \quad ④$$

解　首先，把①式乘以 2 加到②式；①式乘以(−1)加到③式；①式乘以(−2)加到④式，可得不含 x_1 的下列方程组：

$$①\times 2+②\longrightarrow x_2-3x_3+4x_4=-5, \quad ⑤$$

$$①\times(-1)+③\longrightarrow -3x_2+x_3-2x_4=5, \quad ⑥$$

$$①\times(-2)+④\longrightarrow -3x_2+x_3-2x_4=5. \quad ⑦$$

其次，把⑤与 3 相乘，再分别加到⑥式、⑦式，可得不含 x_2 的下列方程组：

$$⑤\times 3+⑥\longrightarrow -8x_3+10x_4=-10, \quad ⑧$$

$$⑤\times 3+⑦\longrightarrow -8x_3+10x_4=-10. \quad ⑨$$

再把⑧式与(−1)相乘加到⑨式，得

$$⑧\times(-1)+⑨\longrightarrow 0=0. \quad ⑩$$

由于以上的变形过程是可逆的，所以联立方程组①、②、③、④、与①、⑤、⑧、⑩是等价的。即问题化为求解方程组

$$x_1+x_2-2x_3+3x_4=-3, \quad ①$$

$$x_2-3x_3+4x_4=-5, \quad ⑤$$

$$-8x_3+10x_4=-10, \quad ⑧$$

$$0=0. \quad ⑩$$

继续作变换

$$⑤\times(-1)+①\longrightarrow x_1+x_3-x_4=2 \quad ⑪$$

$$⑧\times\left(\frac{-3}{8}\right)+⑤\longrightarrow x_2+\frac{1}{4}x_4=-\frac{5}{4}, \quad ⑫$$

$$⑧\times\left(\frac{1}{8}\right)+⑪\longrightarrow x_1+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4}. \quad ⑬$$

于是原来的方程组又等价于方程组⑬、⑫、⑧、⑩，即有

$$⑬\qquad x_1+\frac{1}{4}x_4=\frac{3}{4},$$

⑫　$x_2+\frac{1}{4}x_4=-\frac{5}{4}$,

⑧ $\times\left(-\frac{1}{8}\right)$　$x_3-\frac{5}{4}x_4=\frac{5}{4}$.

⑩　$0=0$.

从而，所求的解就是

$$x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x_4,$$

$$x_2=-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x_4, \tag{14}$$

$$x_3=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}x_4.$$

其中 x_4 取任意的值，x_1，x_2，x_3 叫做**基底未知数**。⑭ 还可表示成下面的形式：

$$x_1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}u,$$

$$x_2=-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}u,$$

$$x_3=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}u,$$

$$x_4=u.$$

或者

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix}u. \tag{15}$$



⑮式把解向量用参变量 u 表示出来了，这时，只要让 u 取任意的值，就可得到所给(非齐次)方程组的全部解。

⑮叫做所给(非齐次)方程组的**通解**。

特别是，当 $u=0$ 时，有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad ⑯$$

这是所给（非齐次）方程组的一个**特解**．又，

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ⑰$$

是与所给（非齐次）方程组相应的齐次方程组（右端所有项取0时）的解．该齐次方程组的任意解，可用解⑰的任意倍数表出．在这个意义下，⑰叫做与所给（非齐次）方程组相应的齐次方程组有**基本解**.(译注：若该非齐次方程组有两个以上的特解，则⑰就应该是两个以上的解，而齐次方程组的任意解，就是这些解的线性组合.)

上述解法中，没有必要把方程式一个一个地写出，而只须写出它的系数就够了．因而上述解法可以简化成如下的表格形式.

x_1	x_2	x_3	x_4	常数项
①	1	−2	3	−3
−2	−1	1	−2	1
1	−2	−1	1	2
2	−1	−3	4	−1
1	1	−2	3	−3
0	①	−3	4	−5
0	−3	1	−2	5
0	−3	1	−2	5
1	0	1	−1	2
0	1	−3	4	−5
0	0	−8	10	−10
0	0	−8	10	−10
1	0	0	1/4	3/4
0	1	0	1/4	−5/4
0	0	1	−5/4	5/4
0	0	0	0	0

在表中，圈内的数叫做主系数，它有如下含义：在下一步的变形中，该数变为 1，且该数所在列的其它数变为零.

这个方法叫做**高斯消去法**(或消元法)

在求解的过程中，假如⑩出现 0＝1 的形式，则最初的联立方程组是无解的. 又假如⑩成为 $x_4=\alpha$ 的形式，则最初的联立方程组只有一组解，相应齐次方程组的基本解仅有平凡解.

对于一般的联立方程组(vi)，也可以用高斯消去法. 即是说，当最初的(vi)具有解时，可以适当变更其未知数的顺序和方程式的顺序，在 n 个未知数中，将某 r 个未知数用其余的 $n-r$ 个表示成下列形式：

$$\begin{aligned}
x_1&=\beta_1-\alpha_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{1n}x_n,\\
x_1&=\beta_2-\alpha_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{2n}x_n,\\
&\cdots\cdots\\
x_r&=\beta_r-\alpha_{r\,r+1}x_{r+1}-\cdots-\alpha_{rn}x_n.
\end{aligned}\qquad\text{(vii)}$$

这时通解可以表示成

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{1\,r+1} \\ \alpha_{2\,r+1} \\ \vdots \\ \alpha_{r\,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \cdots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_{n-r}. \tag{viii}
$$

其中 u_1, u_2, …, u_{n-r} 是参数.

这样的解叫做**优解**. 把这个解代入目标函数, 记成

$$f=\gamma-\delta_1u_1-\delta_2u_2-\cdots-\delta_{n-r}u_{n-r}.$$

假如 $\delta_1\geq0$, $\delta_2\geq0$, …, $\delta_{n-r}\geq0$, 则当 $u_1=u_2=\cdots=u_{n-r}=0$ 时, f 取得最大值 γ. 这时, 从(viii)有

$$x_1=\beta_1,\ x_2=\beta_2,\ \cdots,\ x_r=\beta_r,\ x_{r+1}=\cdots=x_n=0. \tag{ix}$$

这是使 f 取最大值时未知数的值, 叫做**最优解**.

假如在 δ_1, δ_2, …, δ_{n-r} 中有负值, (ix)就不是最优解. 这时, 需根据下面介绍的单纯形法, 变换基底未知数来重新讨论.

1·5 单纯形法

我们举例说明这个方法.

例题1 在约束条件

$$2x+3y+5z=8,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

下，试求目标函数

$$f=1-6x+3y+2z$$

为最大时的 x，y，z 值及 f 值.

解 从原式得 $z=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}y$，因而把它代入目标函数，得

$$f=\frac{21}{5}-\frac{34}{5}x+\frac{9}{5}y.$$

这时，由于 $z\geq 0$，所以只须在 $2x+3y\leqslant 8$，$x\geq 0$，$y\geq 0$ 的条件下，考察 f 何时变为最大就可以了. 这时的 x，y 叫做**独立未知数**，z 叫做**基底未知数**.

但是，由于 f 中 x 的系数是负的，y 的系数是正的，所以可让 x 尽量地小、y 尽量地大. 也就是说，当 $x=0$，$y=\frac{8}{3}$，$z=0$ 时，f 取得最大值 9.

另解1. 假若把 x、z 取成独立未知数、则 $y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}z$，把它代入目标函数，得

$$f=9-8x-3z.$$

这里，由于 $y\geq 0$，所以只须在 $2x+5z\leqslant 8$，$x\geq 0$，$z\geq 0$ 的条件下，求 f 的最大值即可. 但是，因为 f 中 x、z 的系数都是负的，所以只须取 $x=z=0$，从而在 $y=\frac{8}{3}$ 时 f 变为最大，其值为 $f=9$.

另解2. 约束条件是四个平面 $2x+3y+5z=8$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成的四面体，其顶点是原点 O，$A(4,0,0)$，$B\left(0,\frac{8}{3},0\right)$ 和 $C\left(0,0,\frac{8}{5}\right)$. 因而在各顶点，$f$ 的值是：$f(O)=1$，$f(A)=-23$，$f(B)=9$，$f(C)=\frac{21}{5}$，其中 $f(B)=9$ 是最大值.

例题2. 在约束条件 $x_1+x_2\leqslant 3$，$3x_1+2x_2\leqslant 6$，$3x_1+x_2\geq -1$，$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$ 下，试讨论

$$f=-x_1+x_2.$$

什么时候变为最大.

解 引入松弛变数 x_3，x_4，x_5，令

$$x_1+x_2+x_3=3,$$

$3x_1+2x_2+x_4=6,$

$-3x_1-x_2+x_5=1.$

假如把 x_1、x_2 取为独立未知数，则有

$x_3=3-x_1-x_2,$

$x_4=6-3x_1-2x_2,$

$x_5=1+3x_1+x_2$

而在 $f=-x_1+x_2$ 中，x_2 的系数为正，x_1 的系数为负，鉴于我们的目的(考察 f 的最大值)，可取 $x_1=0$，这时有 $x_3=3-x_2$，$x_4=6-2x_2$，$x_5=1+x_2$. 再对 x_2 进行讨论，由于 $x_3\geqslant 0$，所以必有 $x_2\leqslant 3$；由于 $x_4\geqslant 0$，所以必有 $x_2\leqslant 3$；而 $x_5\geqslant 0$ 恒成立．因此当 x_2 逐渐增大时，x_3和 x_4 最终都变为 0．这时，选 x_3、x_4 中任何一个(比如选 x_3)代替上面 x_2 的地位，即取 x_1、x_3 为独立未知数，则得 $x_2=3-x_1-x_3$，$x_4=-x_1+2x_3$，$x_5=4+2x_1-x_3$. $\therefore f=3-2x_1-x_3$.

因而，当 $x_1=x_3=0$ 时(这时 $x_2=3$，$x_4=0$，$x_5=4$)，f 变为最大，其值为 $f=3$.

以上的解法，可用系数排列成下表(叫做**单纯形表**)，有

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	常数项	优解
1	①	1	0	0	3	x_3
3	2	0	1	0	6	x_4
−3	−1	0	0	1	1	x_5
−1	1	0	0	0	f	0
1	1	1	0	0	3	x_2
1	0	−2	1	0	0	x_4
−2	0	1	0	1	4	x_5
−2	0	−1	0	0	$f-3$	0

根据上表第二框格中的常数项和优解，立即可得最优解为 $x_1=0$，$x_2=3$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=4$；最大值是 $f=3$.

例题3. 在约束条件

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3\leqslant 200, \\ 3x_1+2x_2+4x_3\leqslant 340, \\ 2x_1+4x_2+x_3\leqslant 320, \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{array}\right\} \quad ①$$

下，求目标函数

$$f=3x_1+4x_2+7x_3 \quad ②$$

的最大值.

解 引入松弛变数 x_4，x_5，x_6，把①变成

$$\left.\begin{aligned} &x_1+2x_2+3x_3+x_4 = 200, \\ &3x_1+2x_2+4x_3+x_5 = 340, \\ &2x_1+4x_2+x_3+x_6 = 320, \\ &3x_1+4x_2+7x_3 = 5, \\ &x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0. \end{aligned}\right\} \quad ③$$

首先，假设取优解 $x_1=x_2=x_3=0$，$x_4=200$,，$x_5=340$，$x_6=320$，则 $f=0$，

显然，这时 f 还不是我们要求的最大值，即是说，上述的解还不是最优解，于是按单纯形法，我们继续对③中 f 的表达式进行考察。可以看出，当 x_1、x_2、x_3 中任一个从 0 增加时，f 的值也增加。因f的各项系数中，x_3 的系数 7 为最大，故只须对变数 x_3 进行讨论。这时，在③的前三个方程中，先对x_3 的系数为正的各个方程，算出

(右端的常数)÷(x_3 的正系数).

并选取其值最小者对应的方程式,令这个方程式的 x_3的系数为主系数,再对方程组③进行初等变形(等价的变形),使③的各个方程 x_3 的系数中,主系数变为1，其它系数变为零(以上方法保证了，在变形过程中，各方程式的右端非负)。具体地说,在 ③的前三个方程中,用各自的x_3的系数除右端常数得

$$\frac{200}{3},\ \frac{340}{4},\ \frac{320}{1}.$$

其中，$\frac{200}{3}$最小，所以把相应的 x_3 的系数 3 作为主系数，再作初等变形，使主系数变为 1 且第二、三方程式以及 f 的 x_3 的系数变为 0，即得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+x_3+\frac{1}{3}x_4 = \frac{200}{3},\\
&\frac{5}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{4}{3}x_4+x_5 = \frac{220}{3},\\
&\frac{5}{3}x_1+\frac{10}{3}x_2-\frac{1}{3}x_4+x_6=\frac{760}{3},\\
&\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{7}{3}x_4 = f-\frac{1400}{3},\\
&x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geq 0.
\end{aligned}\right\}\quad ④$$

作为④的优解，取 $x_1=x_2=x_4=0$，$x_3=\frac{200}{3}$，$x_5=\frac{220}{3}$，$x_6=\frac{760}{3}$，则

$$f=\frac{1400}{3}.$$

f 的值较之③的值也有所增加。但是，f 还不是所求的最大值，事实上，在④式中，使 x_1 从 0 增加时，f 的值也增加。于是对 x_1 重复③到④的基本过程，先在④的前三个方程中，求出(常数项)÷(x_1 的正系数)，得

$$\frac{200}{3}\div\frac{1}{3}=200,\quad \frac{220}{3}\div\frac{5}{3}=44,\quad \frac{760}{3}\div\frac{5}{3}=72.$$

其中，第二个值最小，因而把④的第二个方程 x_1 的系数作为主系数，进行初等变形后，得

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{5}x_2+x_3+\frac{3}{5}x_4-\frac{1}{5}x_5=52,\\
&x_1-\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_4+\frac{3}{5}x_5=44,\\
&4x_2+x_4-x_5+x_6=180,\\
&-\frac{2}{5}x_2-\frac{9}{5}x_4-\frac{2}{5}x_5=f-496.
\end{aligned}$$

由于最后一个方程的系数全部是负的，所以

$$x_2=x_4=x_5=0,\ x_1=44,\ x_3=52,\ x_6=180$$

是最优解。这时的最大值，由 $f-496=0$ 得到：

$$f_{max}=496.$$

上述解法还可用下表表出：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	常数项	优解
1	2	③	1	0	0	200	x_4
3	2	4	0	1	0	340	x_5
2	4	1	0	0	1	320	x_6
3	4	7	0	0	0	f	0
1/3	2/3	1	1/3	0	0	200/3	x_3
5/3	−2/3	0	−3/4	1	0	220/3	x_5
[illegible]	10/3	0	−1/3	0	1	760/3	x_6
2/3	−2/3	0	−7/3	0	0	$5-\frac{1400}{3}$	0
0	4/5	1	3/5	−1/5	0	52	x_3
1	−2/5	0	−4/5	3/5	0	44	x_1
0	4	0	1	−1	1	180	x_6
0	−2/5	0	$-\frac{9}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	$f-496$	0

1·6 F 坐标(双变数)

在约束条件

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4\leqslant f_1$$
$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4\leqslant f_2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geqslant 0$$

下，考察目标函数

$$f=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$$

的最大(或最小)值的问题．如果我们把条件式的数目叫做**因子**(factor)**数**，把变数的数目叫做**过程**(process)**数**，则在前节中是把过程的值 x_1，x_2，x_3，x_4 作为变数来处理的，而在本节，我们将考察把因子的值 f_1,f_2作为变数来处理的情形．

为了便于计算，可以先对过程作变换，使目标函数在新过程的表示下，各项系数皆为 1．据此，我们这里直接讨论形如

$$f=x_1+x_2+x_3+x_4$$

的目标函数．

于是，在 $(f_1,\ f_2)$ 平面中，向量

$$\mathbf{P}_i=(a_i,\ b_i)\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

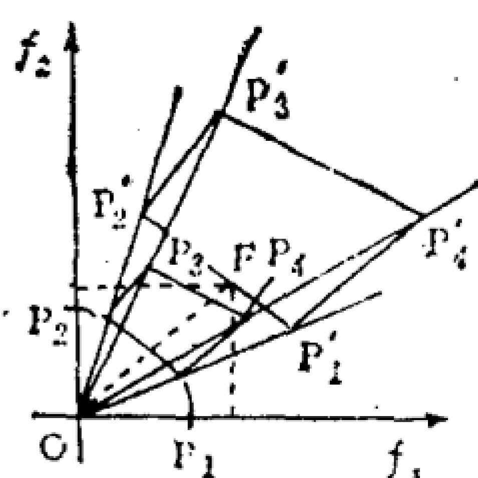


图 15-28

$$\mathbf{f}=(f_1,\ f_2),$$

可在图 15-28 中表示出来。若用K记向量 $\mathbf{P}_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 作成的四边形 $P_1P_2P_3P_4$，则K的内部或周界上的点、可以用向量表示成

$$\mathbf{P}=x_1\mathbf{P}_1+x_2\mathbf{P}_2+x_3\mathbf{P}_3+x_4\mathbf{P}_4,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4=1.$$

同时，若以原点为中心，把K相似放大（或缩小）λ 倍，且记新的四边形为 K_λ，则在 K_λ 的内部或边界上的点可表成

$$\mathbf{P}=x_1\mathbf{P}_1+x_2\mathbf{P}_2+x_3\mathbf{P}_3+x_4\mathbf{P}_4,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0,\ x_1+x_2+x_3+x_4=\lambda.$$

又，设向量 $\mathbf{f}$ 表示的点为 $F(f_1,\ f_2)$，则在满足"F 位于 K_λ 的内部或周界上"的条件下，λ 的最大值就给出了 f 的最大值。

因而，为了求出最大值 f，只须把四边形 K，以原点为中心作相似放大(或缩小)，使 F 处于刚要离开 K_λ（或刚要进入 K_λ）的位置，这时的 λ 就是我们要求的 f。如图 15-28，根据 F 的位置特点，取 K 放大的方式，直到 F 位于 K_λ 的边 $P_1'P_2'$ 上，这就是所要求的位置。这时令

$$\frac{FP_2'}{P_1'P_2'}=\alpha,\quad \frac{P_1'F}{P_1'P_2'}=\beta,\quad \frac{OP_1'}{OP_1}=f,$$

则得 $x_1=\alpha f,\ x_2=\beta f,\ x_3=0,\ x_4=0$ 为最优解，f 为目标函数的最大值。

例题　在约束条件

$$4y_1+18y_2+2y_3-4y_4\leq 4,$$
$$2y_1+9y_2+7y_3+16y_4\leq 6,$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4\geq 0$$

下，试求目标函数

$$f=2y_1+3y_2+y_3+4y_4$$

的最大值。

解　令 $2y_1=x_1,\ 3y_2=x_2,\ y_3=x_3,\ 4y_4=x_4$，则约束条件变为

$$2x_1+6x_2+2x_3-x_4\leq 4,$$
$$x_1+3x_2+7x_3+4x_4\leq 6,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\geq 0.$$

目标函数变为

$f=x_1+x_2+x_3+x_4$.

因而，令 $P_1=(2,\ 1)$，$P_2=(6,\ 3)$，

$P_3=(2,\ 7)$，$P_4=(-1,\ 4)$，

$F(4,\ 6)$

时，如图 15-29，显然 F 应位于 K_λ 的 $P_1^*P_4^*$ 上，相应的 λ 值才最大，这时有

$$\frac{FP_4^*}{P_1^*P_4^*}=\frac{11}{15},$$

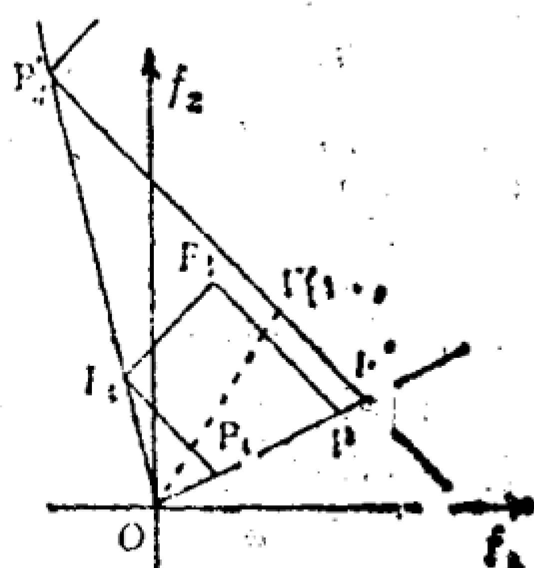


图 15-29

$$\frac{P_1^*F}{P_1^*P_4^*}=\frac{4}{15},\quad \frac{OP_1^*}{OP_1}=\frac{10}{3}.$$

$\therefore\quad x_1=22/9,\ x_2=8/9.$

$\therefore\quad y_1=\frac{11}{9},\ y_2=\frac{8}{27},\ y_3=0,\ y_4=0$

为最优解．最大值为 $f=\frac{10}{3}$.

§2. 对 策 论

2·1 何谓对策

在经济领域的各种问题中，确定在一定约束条件下的极大点(或极小点)这一类问题是很多的．这些问题多半可放在§1所叙述的线性规划中处理．但是在经济领域的另一类问题中，往往要涉及到若干人进行竞争或合作的情况．

在追求对立利益（一方得利，另一方吃亏)的两人(或数人）对抗的情形下，一方的行动要由对方如何行动而决定．这样的状态叫做斗争形势．

实际上，这样的斗争形势是非常复杂的．因而必须去掉细微的次要因素，在数学上构成公式化的简单的模型．这种模型叫做**对策**．

斗争形势和对策的区别是：对策完全根据事先规定好的"规约"进行，而斗争形势却没有确定的规约．

在某对策中，有两个选手，根据对策的规约各施展自己的策略(或战略)，以使自己的得分（利益）最多，使对手的得分最少．当开展这样的对策时，双方都企图采用最好的方法，在这时有所谓相容（稳定的、决定性

的)和不相容的情形.

用对策论研究的对弈中，虽然也包含偶然的因素，但根本上是要熟悉对策的道理，也就是说，策略(行动的选择和判断)的好坏取决于对对策论掌握的情况如何.

如上所述，所谓对策是按一定规则进行比赛的整个过程，而所谓比赛是在对策中选择一个实现其目的的具体战略使之达到一定的结果.

我们用一组不同的番号来代表对策之一方所采取的各个战略．当一方采取某一战略后，对方就选定一个战略出来迎战．因此，所谓战略就是在对策的一定时候和一定条件下被选定的一种决策．每一次较量的结果以支付或记分的方式记录．当一方获胜而得一分时，另一方就失掉一分（即负一分)．我们把比赛双方得分的代数和为零的对策叫做**二人零和对策**.

当代表各战略的番号数有限时，相应的对策叫做**有限对策**，否则，称为**无限对策**.

例如，今有 R 和 C 二人进行猜拳赛．如果 R 出石头(拳头)对付 C 出的手帕(手掌),则 R 负 C 胜，R 得 -1 分．如果 R 出石头对付 C 出的剪刀(食指及中指),则 R 胜 C 负，R 得 1 分．依次类推，就 R 而言，该对策的得分结果如下表所示.

R \ C	石头	手帕	剪刀
石头	0	−1	1
手帕	1	0	−1
剪刀	−1	1	0

该表中第一列表示 R 的种种战略，第一行表示 C 的种种战略，各行列交叉的元素表示 R 的战略与 C 的战略交锋后 R 的得分记录．我们把由 R 的得分构成的矩阵称为 R 的**报酬矩阵**(或得分矩阵)

该表也可按 C 的得分来组成，这只须将 C 与 R 的位置对换，并把前表中的数字反号然后各行换成相应各列就行了.

一般地说，假设 R 有 $1, 2, \cdots, m$ 个战略，在对策表中占 m 个行；C 有 $1, 2, \cdots, n$ 个战略，在该表中占 n 列．第 i 行与第 j 列相交的元素是 R 的第 i 战略与 C 的第 j 战略交锋后记入的 R 的得分值 a_{ij}，如下面的**得分矩阵**所示：

C / R	1	2	⋯	j	⋯	n
1	a_{11}	a_{12}	⋯	a_{1j}	⋯	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	⋯	a_{2j}	⋯	a_{2n}
⋮		⋯		⋯		⋯
i	a_{i1}	a_{i2}	⋯	a_{ij}	⋯	a_{in}
⋮		⋯		⋯		⋯
m	a_{m1}	a_{m2}	⋯	a_{mj}	⋯	a_{mn}

$A=[a_{ij}]$.

在对策论中，得分矩阵是很重要的。在得分矩阵 A 中，用 $A_{i\cdot}$ 表示 A 的第 i 行向量，用 $A_{\cdot j}$ 表示 A 的第 j 列向量。这些行向量和列向量是很有用的。

在上面已把 R 的得分矩阵记成 A，显然，C 的得分矩阵是把 R 的得分矩阵转置（即行列交换）再改变所有元素的符号后得到的矩阵。故把 C 的得分矩阵记为 $-A^*$。在上述猜拳的例中易见 $-A^*=A$，即 R 和 C 的得分矩阵是相等的。即是说，这时的 A 是反对称矩阵。比赛双方具有相同的得分矩阵的对策叫做**公平对策**。下面举几个得分矩阵的例子。

例1. R、C 两人同时念一个数：1 或者 2。若二者念出的数不同，则 R 得 1 分，若相同，则 R 得 −1 分。这样，R 的得分矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

例2. R 从 1，2，3 这三个数中任意叫一个数，同时 C 从扑克牌的四个幺(A)中任意抽出一张，设其顺序番号是

1——黑桃，2——红桃

3——方块，4——梅花

R 的得分矩阵确定如下：

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix}.$$

例3. 在意大利经常玩一种叫做 Morra 的游戏，比赛双方R和C都伸出一根或两根手指头与此同时，还要猜测对方伸出的手指数并喊出来。在这种

情形下，比赛双方各有四种战略，用番号表示如下：

1—(1，1)，　2—(2，1)，

3—(1，2)，　4—(2，2)．

其中括号内头一个数是伸出的手指数，后一个数是喊出的数。当比赛者中有一方猜中了对方的手指数时，则把双方手指数的和数作为他的得分数(相应地，他的对手记以同数目的负分)当双方都猜中或都没有猜中时，都记以零分。对 R而言，其得分矩阵如下

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2·2　决定性的对策和单纯战略

2.1　例2之得分矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

首先考查一下 R 采取哪一个战略有利。**暂时只考虑 R 的最少得分。**

相应于 R 的各战略的得分数，取其最小者，写出与之相应的C的战略番号，即有

相应于 R 的第一手战略，得分为 0，−2，−1，3，最小者为−2，这时 C 的战略番号为 2．

相应于 R 的第二手战略，得分为 2，3，1，2，最小者为 1，这时 C 的战略番号为3．

相应于 R 的第三战略，得分为3，1，0，−4，最小者为−4，这时C的战略番号为4．这时 R 的三个最小值−2，1，−4 之中最大者为 1．与之相应的 R 的战略番号为 2．这就是所求的 R 的最有利的战略。

一般地，假设得分矩阵为

$$A=[a_{ij}].\qquad ①$$

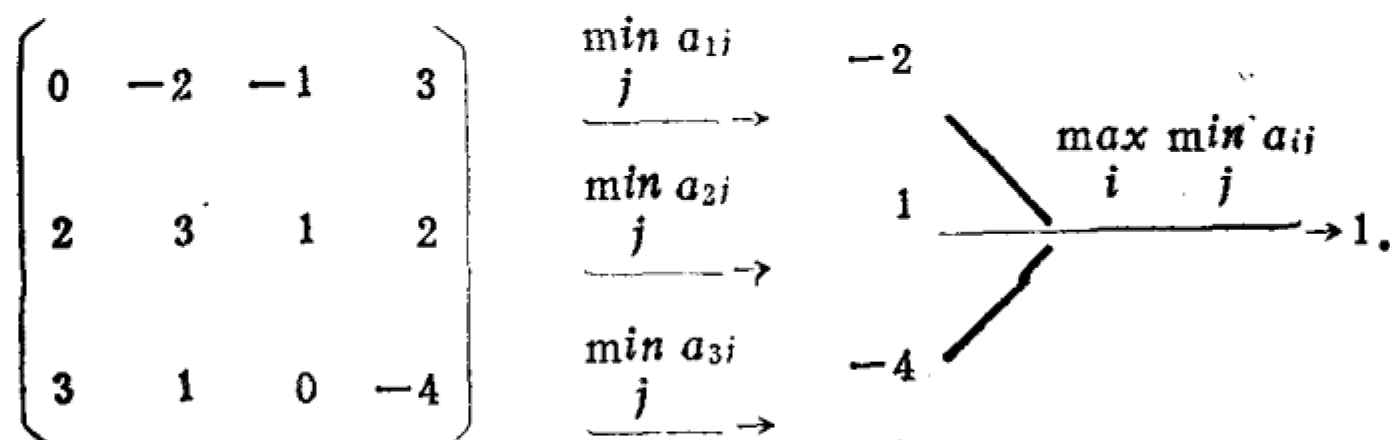
这时对于 R 的第 i 个战略(第 i 行)，求出 n 个数 $a_{ij}(j=1，2，\cdots，n)$中最小者的 j，这时 C 采用第 j 个战略(第 j 列)为最好，即 C 的目标分为

$$\min_j a_{ij}.$$

再考虑使 R 变为最有利的情形，R的目标分应为

$$\max_i \min_j a_{ij}. \qquad ②$$

在此，可将上述例 2 中各行最小值以及这些最小值中的最大值用下表明示出来



$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \xrightarrow{\min_j a_{1j}} -2 \\ \xrightarrow{\min_j a_{2j}} 1 \\ \xrightarrow{\min_j a_{3j}} -4 \end{matrix} \quad \xrightarrow{\max_i \min_j a_{ij}} 1.$$

其次，从 C 的角度(但仍用 R 的得分矩阵)来说明上述的结果。对 C 的各个战略，找出相应的 R 的得分最多的战略番号来，即有

相应于 C 的第一战略，R 的得分是 0，2，3，其中最大者为 3，R 取第 3 战略。

相应于 C 的第二战略，R 的得分是 −2，3，1，其中最大者为 3. R取第 2 战略.

相应于 C 的第三战略，R 的得分是 −1，1，0，其中最大者为 1，R取第 2 战略.

相应于 C 的第四战略，R 的得分是 3，2，−4，其中最大者为 3，R 取第 1 战略.

在上述四个最大值3，3，1，3中取最小值1。相应地，C的战略番号为 3，这就是 C 的最有利的战略。

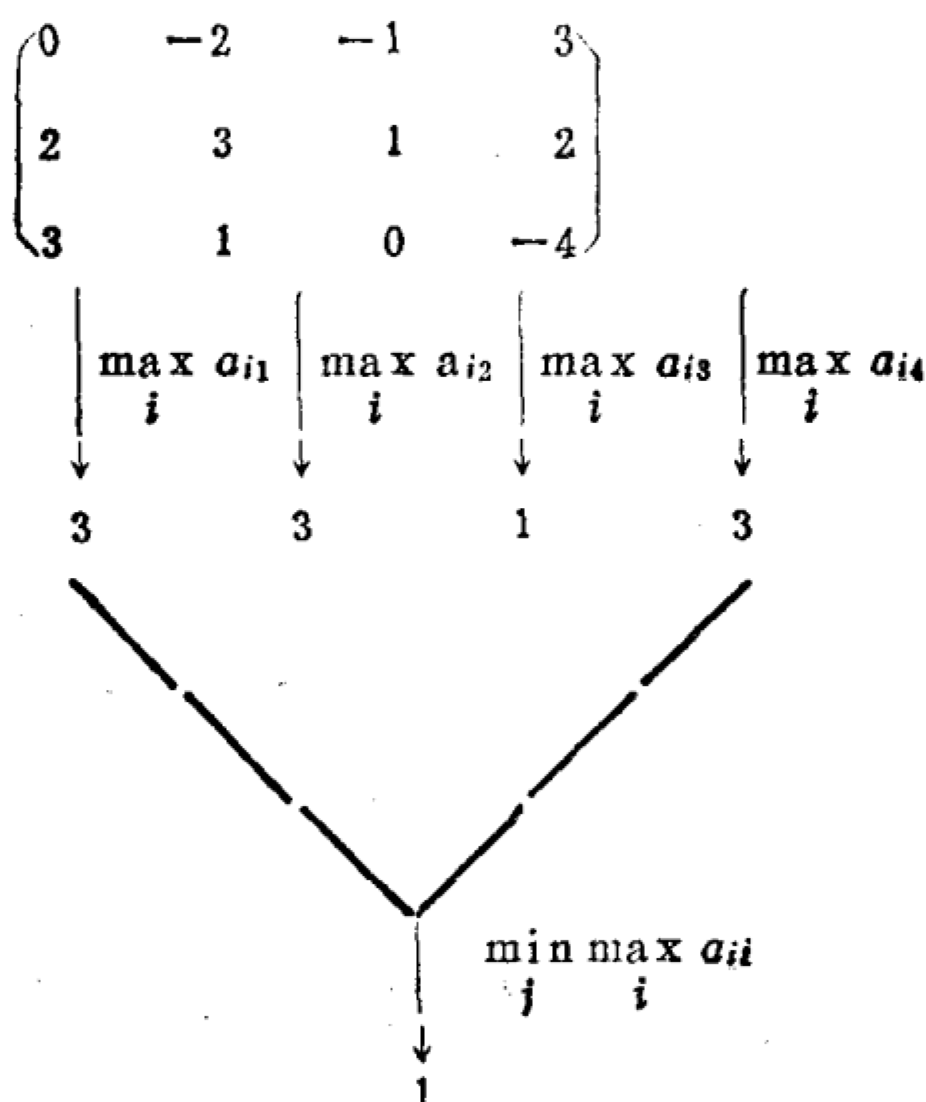
对于一般情形①，相应于各个 j，求出 m 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, m)$ 中最大者的 i，考查第 i 个战略，这时 R 的目标分为

$$\max_i a_{ij}.$$

求出 n 个数 $\operatorname{Max}_i a_{ij}(j=1, 2, \cdots, n)$ 中最小者的 j，这就是 C 的最有利的战略番号。C的目标分为

$$\min_j \max_i a_{ij}. \qquad ③$$

对于 2.1 例 2，可用图示如下：



在此例中，从两种角度得到的目标分都是一样的，即都为 $a_{23}=1$.

当 $\max \min a_{ij}=\min \max a_{ij}$. ④

成立时，把相应的对策叫做**决定性**的对策，若把满足④的脚标记为 i_0, j_0，则称 $a_{i_0j_0}$ 为对策的**鞍点**.

对于 R，象上面那样选取战略番号 i_0 有何好处呢？

假如取 R 的 i_0 以外的战略，则 C的得分就可能大一些，这样一来，只要 C的策略得当，R 的得分就有变得更小的危险.

一旦 R 取 i_0 战略，那么随便C取多么好的战略，R 的得分都绝不可能变得更小. 即 i_0 战略对 R 是最有利的战略，这个对对策结局起决定作用的战略叫做**单纯战略**.

如果得分矩阵 $A=[a_{ij}]$ 表示决定性的对策，则 A 必有元素 $a_{i_0j_0}$ 存在使

$$\max_i \min_j a_{ij}=a_{i_0j_0}=\min_j \max_i a_{ij},$$

$$\therefore \min_j a_{i_0j}=a_{i_0j_0}=\max_i a_{ij_0}.$$

从而 $a_{i_0j_0}$ 既是包含在 i_0 行的最小值，又是包含在 j_0 列的最大值.

反之，若 $a_{i_0j_0}$ 是第 i_0 行的最小值和第 j_0 列的最大值，则

$$a_{i_0j}\geq a_{i_0j_0}\geq a_{ij_0} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ ),$$

$\because \max\limits_i a_{ij} \leqslant a_{i_0j},\quad \therefore \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = a_{i_0j_0}.$

$\quad \min\limits_j a_{ij} \leqslant a_{ij_0}\quad \therefore \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = a_{i_0j_0},$

$\therefore \max\limits_i \min\limits_i a_{ij} = \min\limits_i \max\limits_i a_{ij}.$

因此得分矩阵 A 是决定性的．由此得到

【定理】1．得分矩阵为 $A=[a_{ij}]$ 的对策是决定性的，其必要充分条件是 A 有这样的元素 $a_{i_0j_0}$ 存在，使得它是第 i_0 行的最小值及第 j_0 列的最大值．

例　求 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ 表示决定性对策的必要充分条件．

解　(i) 当 $a>0$，$b>0$ 时，该对策是非决定性的，当 $a>0$，$b\leqslant 0$ 时，是决定性的．

(ii) 当 $a=0$，b 为任何值时，都是决定性的．

(iii) 当 $a<0, b\geqslant 0$ 时，是决定性的；当 $a<0, b<0$ 时，是非决定性的．因此所求的必要充分条件是

$$a>0,\ b\leqslant 0;\ a=0,\ b\text{ 任意};\ a<0,\ b\geqslant 0.$$

其中任何一组条件成立即可．

2·3　非决定性的对策与混合战略

考察在2.1提及的猜拳赛的得分矩阵，即

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \max \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \min \\ -1 \\ -1, \\ -1 \end{array}\quad \begin{array}{l} \\ \max\min a_{ij}=-1, \\ \min\max a_{ij}=1, \end{array}$$
$$\max\quad 1\quad 1\quad 1$$

因此，条件④不满足．这时，如果对策中的R和C的目标战略都取单纯战略是不行的．即是说，该对策是非决定性的．从而，这种对策不只是取决于一个战略，而是取决于各式各样的战略混合进行，这种战略叫做**混合战略**．混合战略是利用概率论中的期望值的思想而确定的．

下面针对一方的行动来确定混合战略．我们以R的战略数为2的情形为例，用图解法来加以说明．

例　$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$．

解　首先考虑C利用它的第一战略的情形．这时，设R利用第一战略的概率

为 x，利用第二战略为概率为 $1-x$，于是 R 得分的期望值为

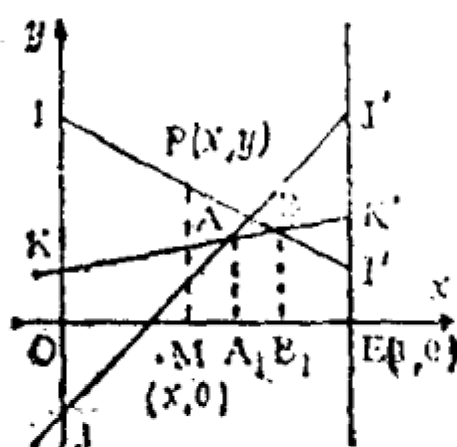


图 15-30

$$y=1\cdot x+4(1-x),$$

此式在(图 15-30)中表示过点 (0, 4) 及 (1,1) 的直线 II'. 在单位线段 OE 的一点 $M(x, 0)$ 处作 x 轴的垂线与直线 II' 相交于 P 点. MP 的长就是 R 的期望值 y. 同理，对 C 的第二，第三战略，也各有直线

$$JJ': y=4x+(-2)(1-x),$$

$$KK': y=2x+1.(1-x).$$

其中 x 仍是 R 用第一战略的概率，$1-x$ 是 R 用第二战略的概率，x 和 $1-x$ 是 R 对自己的战略混合运用的结果，考察 C 的使 R 得分的期望值变得最小的战略. 由上图，当 R 的一、二战略(其使用概率分别为 x，$1-x$)作为混合战略用时，把相应的 C 的有利的战略的集合叫做 C'. 于是在图上，由于 A_1，B_1 的坐标分别为 P_1，P_2 而 C' 可表为

$0\leqslant x\leqslant P_1$，$C$ 取第二战略，

$P_1\leqslant x\leqslant P_2$，$C$ 取第三战略，

$P_2\leqslant x\leqslant 1$，$C$ 取第一战略，

因而，$JABI'$ 是 R 的期望得分图. 由这个折线的最高点 B 所对应的 x 值 P_2 就可确定 R 的最宜战略.

按图，有

$$\frac{I'B}{BI}=\frac{I'K'}{IK}=\frac{1}{3}, \qquad \therefore \quad \frac{1-P_2}{P_2}=\frac{1}{3}, \qquad P_1=\frac{3}{4}.$$

即是说，R 在四次交锋中有 3 次取战略 1，一次取战略 2. 这样组成的混合战略就是 R 的最宜战略.

2·4 2×2得分矩阵的解

我们来讨论得分矩阵是 2×2 矩阵的情形.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

在此，R 采取混合战略. 设 R 用于第一战略（A 中第一行）的概率是 x，用于第二战略（A 的第二行）的概率是 $1-x$. 同样，C 也采取混合战略. 设 C 用于第一列的概率为 y，用于第二列的概率为 $1-y$.

在此情形下，比赛者 R 的得分为 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 的概率分别为 xy，$x(1-y)$，$(1-x)y$，$(1-x)(1-y)$. 用 $E(x, y)$ 来表示 R 的期望值，

则有.　$E(x,\ y)=a_{11}xy+a_{12}x(1-y)+a_{21}(1-x)y+a_{22}(1-x)(1-y)$
$$=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})xy+(a_{12}-a_{22})x+(a_{21}-a_{22})y+a_{22}. \quad ①$$
它是三维空间的曲面.

比赛者R的目的是不管比赛者C的行动怎样，适当选取x，使他在这个曲面上的位置尽量攀到高处.反之，比赛者C的目的是尽量使比赛的结局位于该曲面的低处.总之，该对策的解就是适当选取x，y使之同时符合两者的要求.

这就是极小化极大的问题. R用自己的战略分别对付C的全部战略.让R得到最劣者(最小值)，印$\min\limits_{y} E(x,y)$，再从其中选取最优者(最大值)，即R取$\max\limits_{x}\min\limits_{y} E(x,\ y)$.

又，C用自己的各种战略对付R的全部战略.再从R的期望值出发，对于C取其最优者(最大值)，即$\max\limits_{x} E(x,\ y)$.再从这当中取最劣者(最小值)，即$\min\limits_{y}\max\limits_{x} E(y,\ y)$.

解这样的对策问题，就是要找出使上述两个值(最劣优值和最优劣值)相同的x，y(记为。x^*，y^*)，即有
$$\max_{x}\min_{y} E(x,\ y)=\min_{y}\max_{x} E(x,\ y)=E(x^*,y^*). \quad ②$$
在2×2得分矩阵的情形下，x^*，y^*是必然存在的.下面分几种情形来说明.

(i) $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}=0$ 的情形.
$$E(x,\ y)=(a_{12}-a_{22})x+(a_{21}-a_{22})y+a_{22}. \quad ③$$
如图15-31，③是一个平面.在这个图上把③设成
$$E=1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y,$$
这时，$\min\limits_{y} E(x,\ y)$落在CD上，而$\max\limits_{x} E(x,\ y)$落在AD上.从而D点是满足②的点，它是鞍点，这时$x^*=0$，$y^*=1$.当把③设成其他的具体表达式时，由于上述平面的变动，A、B、C、D都可能成为鞍点.

(ii) $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\neq 0$ 的情形.

设　$a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22}=a$,
$$\frac{a_{22}-a_{21}}{a}=\alpha,\quad \frac{a_{22}-a_{12}}{a}=\beta,\quad \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a}=b. \quad ④$$
因此
$$E(x,\ y)=a(x-\alpha)(y-\beta)+b.$$

这是三维空间的双曲抛物面.
不妨取

$$E=2-4(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}),$$

如图 15-32 所示.

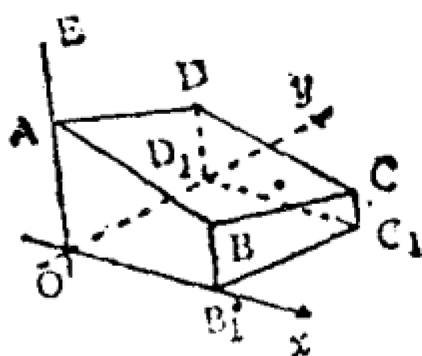


图 15 31

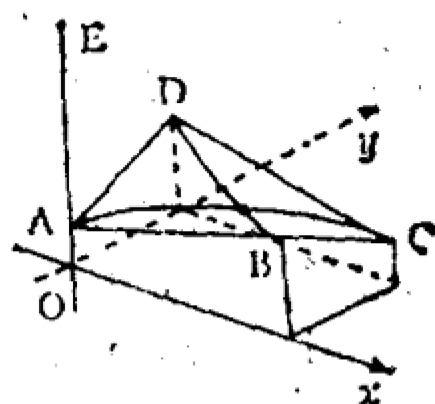


图 15-32

今取定 $x=K$, 则

$$E=2-4(K-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$$

变成直线. 当 $K<\frac{1}{2}$时, 这是随 y 增加而上升的直线. 当 $K=\frac{1}{2}$时 $E=2$, 即为水平直线. 当 $K>\frac{1}{2}$时, 这是随 y 增加而下降的直线. 因此 $\min\limits_{y} E(x,y)$ 当 $x<\frac{1}{2}$时在 AB 上. 当 $x>\frac{1}{2}$时在 CD 上. 再进一步讨论可得: $\max\limits_{x}\min\limits_{y} E(x, y)$ 在点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$实现. 同理可得 $\min\limits_{x}\max\limits_{y} E(x,y)$ 也在点 $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$实现.

在一般情况下, 当 $0<\alpha, \beta<1$ 时有

$$x^*=\alpha, \quad y^*=\beta.$$

这时 $P(\alpha, \beta)$ 是鞍点. 仅当 $0<\alpha, \beta<1$ 不满足时, 曲面的鞍点落在区域 $[0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1]$ 之外, $x=\alpha, y=\beta$ 才不是解. 在我们所讨论的情形, 解落在边界线上. x^*, y^*成为 0 和 1. 换句话说, 对于满足 $0\leqslant x, y\leqslant 1$ 的一切 x, y, 对x^*和 y^*如果

$$E(x,y^*)\leqslant E(x^*, y^*)\leqslant E(x^*, y).$$

则 (x^*, y^*)是鞍点.

以上说明, 当设

$$x=p_1,\quad 1-x=p_2,\ y=q_1,\ 1-y=q_2$$

时，

$$P=[p_1,\quad p_2],\ q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

分别称为比赛者 R，C 的**混合战略向量**。它的各分量满足关系

$$0\leqslant p_1\leqslant 1,\ 0\leqslant p_2\leqslant 1,\ p_1+p_2=1,$$

$$0\leqslant q_1\leqslant 1,\ 0\leqslant q_2\leqslant 1,\ q_1+q_2=1,$$

$\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ 也叫做概率向量，此时比赛者 R 的期望值即可表为

$$E(\mathbf{p},\ \mathbf{q})=\mathbf{p}A\mathbf{q}=[p_1,\ p_2]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

同理可得 C 的期望值为 $-E(p,\ q)$.

这时得到最优战略。综上所述，有以下定理

【定理】2. 设一个对策的得分矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，且概率向量为

$$\mathbf{p}=[p_1^0,p_2^0],\ \mathbf{q}^0=\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix}$$

又存在一个 $\mathbf{v}$ 使得

$$\mathbf{p}^0A\geq[u,\ \mathbf{v}],\ A\mathbf{q}^0\leqslant\begin{pmatrix} u \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

成立。则 $\mathbf{p}^0$，$\mathbf{q}^0$ 是 R，C 的最宜战略，$\mathbf{v}$是对策的值，且

$$\mathbf{v}=E(\mathbf{p}^0,\ \mathbf{q}^0).$$

证明 设比赛者 R 采用战略 $\mathbf{p}^0$，C 采用它的任一战略，则

$$E(\mathbf{p}^0,\ \mathbf{q}^0)=\mathbf{p}^0A\mathbf{q}\geq[u,\ \mathbf{v}]\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=\mathbf{v}.$$

因此，只要 R 坚持战略 $\mathbf{p}^0$，C 不论采用何种战略，R 都可以确保其期望值至少是$\mathbf{v}$。

其次，如果 C 坚持战略 $\mathbf{q}^0$，R 采用他的任意战略 $\mathbf{p}$，则有

$$E(\mathbf{p},\ \mathbf{q}^0)=\mathbf{p}A\mathbf{q}^0\leqslant[p_1,\ p_2]\begin{pmatrix} u \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}=\mathbf{v}.$$

所以，无论R取何种战略，C 都可以确保其期望值至少为 $-\mathbf{v}$，这就意味着 $\mathbf{p}^0$，$\mathbf{q}^0$ 分别是 R，C 的最宜战略。 □

特别地，当 A 是非决定性的情形，补充以条件④之后，使用所定的 a，d，c，b 可得R，C 的最宜战略分别为

$$p^0=[\alpha,\ 1-\alpha],\quad q^0=\begin{pmatrix}\beta\\ 1-\beta\end{pmatrix},$$

且对策的值为 $\nu=b$.

例题1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$求$p^0$，$q^0$，$\nu$.

解 $p^0=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$q^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{2}\end{pmatrix}$，$\nu=0$.

特别地，我们把 $\nu=0$ 的对策叫做公平的对策。

例题2. 设$A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 求 P^0，q^0，ν.

解 $p^0=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，$q^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\nu=2$.

例题3. 设$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$求该对策的解.

解 $E(x,\ y)=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)\left(y-\frac{3}{4}\right)+\frac{7}{4}$.

对策的解为 $x^*=1$，$y^*=0$. 这里有

$$E(1,\ 0)=1,\ E(x,\ 0)=1-3(1-x)\leqslant 1,\ E(1,\ y)=1+y\geq 1,$$

从而 R 的第一行和 C 的第二列交叉位置对应的战略是最宜战略，然而，可以看出，这时A 是决定性的，其结论已是明显的了。

Ⅳ 电子计算机的原理

§1. 电子计算机概述

1·1 电子计算机的组成

电子计算机主要由输入设备、存贮器、控制器，运算器和输出设备组成。

它们之间的联系如图 15—33 所示。整理成一定形式的信息(指令和数据等)在卡片或纸带上穿孔后，送进输入设备，经控制器的作用，将它译成机器能识别的二进制代码，再送入存贮器。按解题运算程序，由控制器发出相应的命令，将存贮器内的指令或数据送入运算器，又经控制器作用，将运算器内得到的中间结果或最后答案送入存贮器，最后仍由控制器发出命令，从存贮器内取出中间结果或最后答案，用输出设备将十进制数据、字母或符号打印出来。

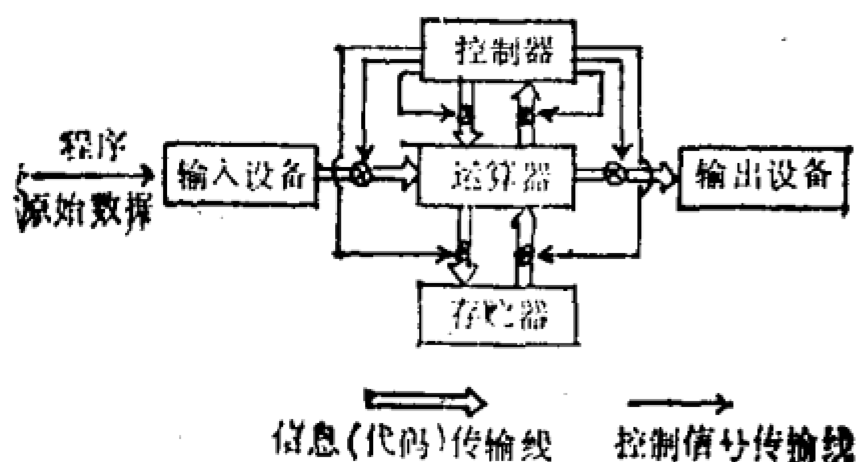


图 15-33

可以把电子计算机与人使用算盘作计算的情况对照起来看，输入设备相当于人的眼和手，其功能是写入原始数据和运算程序。存贮器相当于记录、保存数据(包括运算的中间结果和最后结果)和运算程序的纸张及计算所必需的数表等。运算器相当于算盘，用作四则运算和逻辑运算。输出设备相当于书写计算结果的手和笔。控制器相当于人的大脑，指挥整个机器依次协调工作。下面分类加以介绍.

A　输入、输出设备

所谓输入、输出设备，是电子计算机和机外体(即外界)之间相互联系的设备的总称，对于用于科学计算或事务用数字电子计算机来说，机外体是人。对于在自动化工厂等使用的自动控制用计算机来说，机外体是受控制的机器。这些设备在计算机和机外体的同时作用下进行工作。

输入、输出设备具有下表所列出那些基本类型。

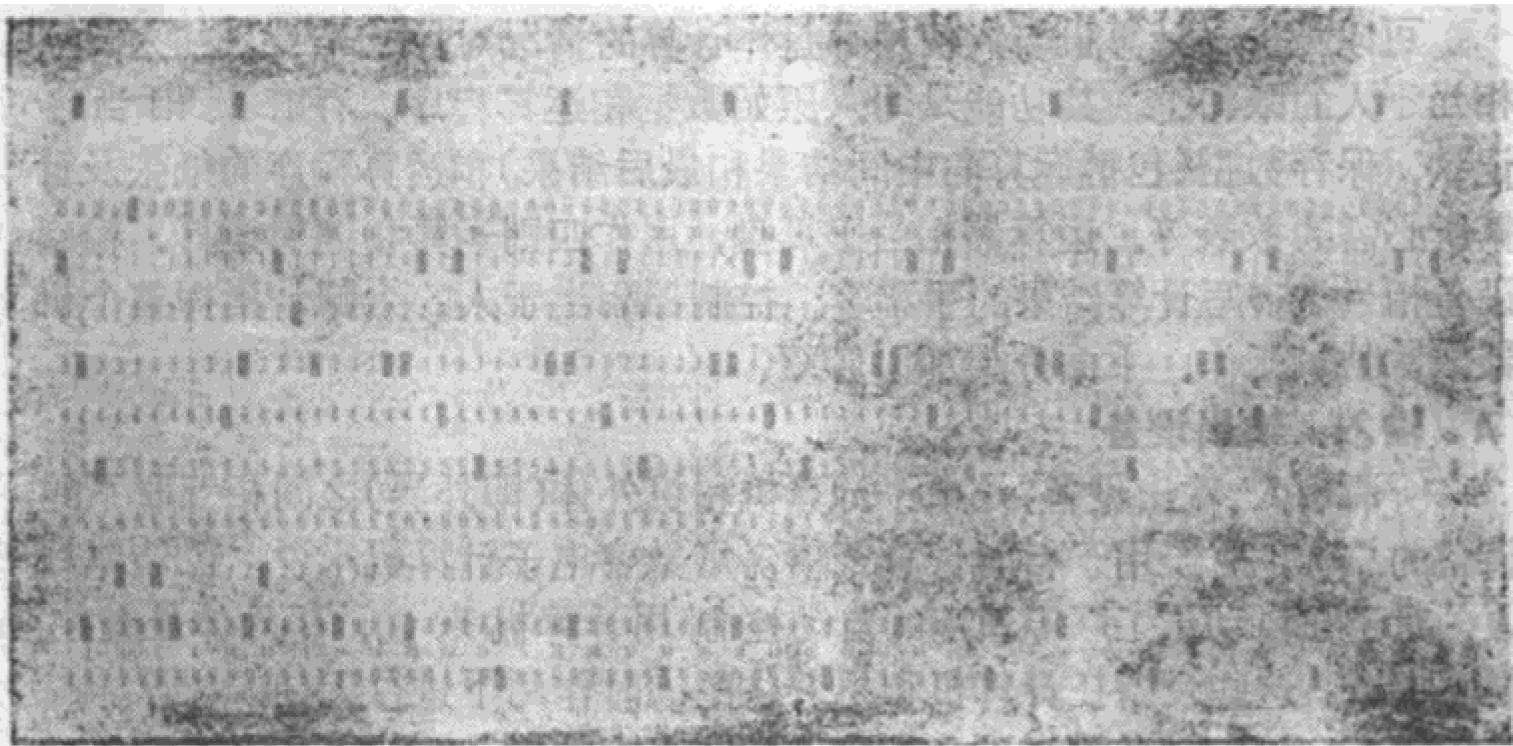
一般地说，输入，输出设备与高速运行的计算机本身相比，工作速度特别缓慢。因而，为了避免整个机器工作速度的下降，在大量数据的输入、输出中广泛地使用磁带。卡片或纸带根据穿孔的位置的组合来表示数、字母和记号，而磁带(和录音机磁带一样)则根据磁性斑点的组合来表示数、字母和记号。较之纸带和卡片，磁带有可能高密度、高速度地记录信息，其记录密度是 100—650字符/25mm，纪录速度可达 2—3m/秒。

除此之外，作为特殊的部件，还有光学标志读出器（OMR），磁墨水字符读出器(MICR)，光学符号阅读器(OCR)等等，正在推广之中。

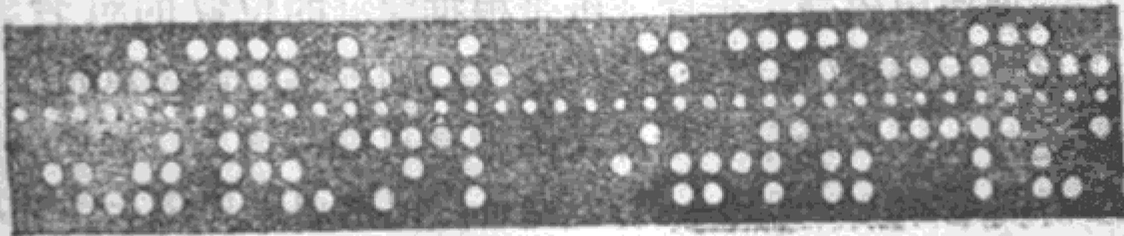
各种输入、输出设备的速度比较表

分类	设备名称	速　　度	信息密度
输入	卡片输入机	100—1,000张/分	80—90字/张
	纸带输入机	200—1,000字/秒	10字/25mm
	电传打字机的键盘	手　　动	——
输出	卡片穿孔机	100—250张/分	80—90字/张
	纸带穿孔机	10—200字/秒	10字/25mm
	页式打印机	10字/秒	——
	行式打印机	150—1,000行/分	120,132字/行

穿孔卡片示样



穿孔纸带示样



光学符号阅读器的文字示样

0123456789

B 存贮器

所谓存贮器，是这样一种暂存设备，它保存从输入设备写入的信息，信息中的指令依次送至控制器，其数据送至运算器，直至把暂时的中间结果及运算结果送到输出设备为止。

在存贮器中，有成千上万个存贮单元.每个单元都有一个编号，就象门牌號0，1，…那样。每个编了号的单元叫做一个地址. 每个地址能存放一串二进制码，代表一个数据或一个指令.

当新的数据被写入存贮地址时，原有的存贮内容当即消失. 数据一旦被存贮起来，从那里无论读取多少次也不会消失.

从存贮器取出信息或向存贮器存入信息所需的时间，叫做存取时间，根据存取时间的多少可分为高速存贮器和低速存贮器. 根据存贮器的功能又可分成主存贮器和辅助存贮器. 主存贮器，一般倾向于采用高速存贮器，而辅助存贮器，则采用低速存贮器. 辅助存贮器只用作外存贮器和完成其他的辅助任务. 使用外存贮器，可望使机器具有更大的容量.

存贮器的比较

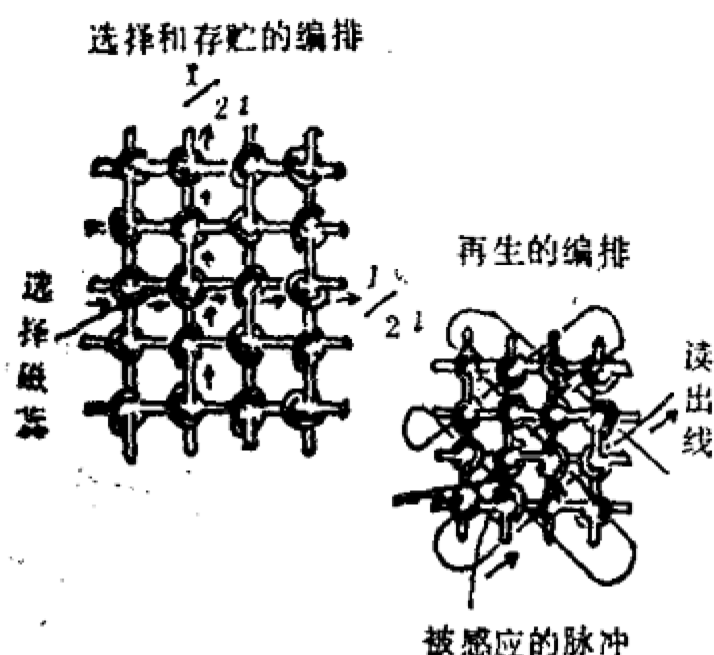
存贮的类型		计算机的大小	存贮容量(字)	存取时间
主存贮	高速磁鼓	小型	2万～6万	2毫秒
	磁芯	小型	2千～4万	5微秒
		中型	2万～10万	2微秒
		大型	10万～200万	200毫微秒
辅助存贮	低速磁鼓		2400万(每台)	10毫秒
	磁盘		1200万～5000万(每台)	100～200毫秒
	磁带		500万～1000万(每卷)	

1毫秒＝千分之一秒，1微秒＝百万分之一秒，

1毫微秒＝十亿分之一秒.

最近，开发了两种新型的存贮器：膜片存贮器和磁线存贮器（Wire memory），其存取时间可用十亿分之一秒（毫微秒）这样小的单位来测量. 目前广泛采用的是磁芯，它是外径在1mm以下的铁氧体强磁环. 按图15-34所示，把导线作成网格状. 如果沿纵向和横向导线输送脉冲，则

只有处于纵横导线交点的磁芯方被磁化．如该图所示，在每个磁芯的内环，不仅有纵横方向的导线穿过，而且也有斜向的导线(读出线)穿过．因此，当电流反向进行时，处于交叉点的磁芯的磁化改变方向，导致斜向导线中感应一次脉冲，相应读出一次信息．但这时原存贮的信息消失了，因而需要重新写入：为此，把若干个这样的网格（叫做磁芯板）平行地安装起来形成一个一个的磁芯体．在同一磁芯体中位于板的同一垂线上的磁芯表示同一数字，每个磁芯板对应着数值的同一位，于是信息的重写在这样的系统中就可以进行了．



C．运算器·控制器

在存贮器中，存贮的数据，按照需要被调入运算器加工．**运算器**是进行加减乘除、逻辑运算、进位等工作的部件．运算有两种形式，即按数位顺序进行运算的直列方式和在每位上同时进行运算的并列方式．又，在电子计算机内部，多数是把十进制一位用二进制的四位来表示，但这种情况下对十进制数的各位数是直列的．对于十进制的每一位，我们把相应的二进制的四位并列地进行．这称为直并列方式．

运算器由被乘数寄存器、累加寄存器、加法器及补码器构成．加法器是求两数和的装置，在手摇计算机中，加法机构是齿轮，但在电子计算机中则是电子电路．补码器是建立补码的装置，作减法时首先建立减数的补码，然后将它与被减数相加，再适当移位即得最后答案．(如下表所示)

46	为了作左边的减法，	99		46	
−)21	先取21对于99的补	−)21	→	+)78	
25	码78（即 99−21=	78		①24	……把最高位的1拿
	78），再与被减数相			→	到最低位来，
	加			+)	
				25	……答数

* 关于补码的概念．请参阅华南工学院编“电子计算机与算法语言”(上册)
——译注

乘法通过加法和移位操作来实现，除法通过减法和移位操作来实现，微分和积分运算通过加减乘除的各种组合来实现。

电子计算机创始于1946年，是在美国宾夕法尼亚大学首创的电子数字积分计算机(ENIAC)。它可以进行十位数的加减法 5000 次/秒，乘法300次/秒，除法 50次/秒。和人的计算能力相比较这大约相当于人的30万倍。最新的计算机作九位数乘法，每秒竟可达到50万次的速度，约相当于人的计算能力的五亿倍。

控制器进行指令的选择、解释及执行，也就是说，假定数值和运算指令暂时先存入存贮器，控制器首先把运算指令从存贮器读出。运算指令表示在何处存贮数值，这些数值作何种运算或者应该把结果放在什么地方，因此控制器将再从指定的地址上读出内容并进行指定的运算，然后把结果存放在指定的地址上。此外，控制器也控制输入、输出设备的工作。

1·2 数据的表示

A. 数·文字

在表示数时，我们通常使用十进制。但根据电子计算机的构成元件的特性，象晶体管的接通或断开，磁化方向的 *N* 极或 *S* 极，脉冲的有或无，都处于两者择一的状态。因此，在电子计算机中，用这种两者择一的状态来表示数是恰当的，由于这种表示是与二进制类似的，所以对于电子计算机。使用二进制是合适的。二进制的一个数位叫做 1 比特（这是信息的最小单位）.

十进制的一位数相当于二进制的 $\log_2 10=3.32$ 位数，因而当在电子计算机中采用二进制时，比较起采用十进制来，在同样容量的存贮器中，可存贮约3.3倍的信息。

十进制	二进制
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

由于人们习惯于使用十进制，所以在电子计算机中，存入或取出数时，必须自动进行二进制与十进制数的相互转换（基本的转换关系如上表所示）

电子计算机除使用数外，还使用英文字母（或日文字母等）及若干记号：+、-、×、/.(　　),=,,,;、:、@、,"*、%、¥、$、△(空格)等等。这些可用6比特或8比特的0，1的组合表示。用6比特时，可能有64种状态，以表示64种记号和字母。现在广泛采用的方法是用8比特表示字母、数字和记号等的每一个字符。作为数值的每一位数字，用4比特表示，作为文字的数，其每一个数字用8比特表示，即相当于作为数值的数的两位。用8比特表示一个字符时，这个8比特叫做一个［二进］位组(字节)

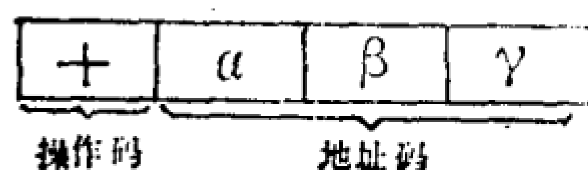
字母等的二进制示例

英文字母		日文字母		记号		作为文字的数字		作为数值的数字	
A	11000001	ア	10000001	·	01001011	0	11110000	0	0000
B	11000010	イ	10000010	※	01011100	1	11110001	1	0001
Z	11101001	ソ	10111101	¥	01011011	9	11111001	9	1001

***B*．指　　令**

指令和数值一样，仍可用二进制信号的组合表示。不过，一般地说，指令是由表示指令种类的操作码和地址码构成，后者是在执行指令时，指出所使用的数值的存放地址以及给出存放结果的地址，指令的方式可根据在指令中包含的地址的数目来分类，包含一个地址的指令叫做单地址指令，包含二个、三个地址的分别叫做双地址指令和三地址指令，一个指令中包含的地址的数目越多，则完成一个计算所需要的指令的数目就越少。但另一方面，电子计算机的电路却变得更复杂。

图15—35指令种类的示例(三个地址的情形)



把β地址的内容加在α地址的内容上再存放入γ地址

§2. 电子计算机的运算原理

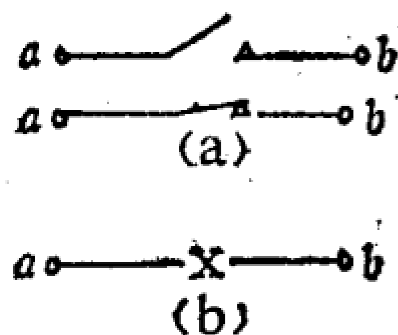
2.1 开关代数

A. 开关代数和触点电路

如下所述，因为电子计算机是根据二值逻辑工作的，所以其机能完全可用开关代数(逻辑代数)表示，所谓开关代数是这样的数学，它处理诸如某命题是真或假等等这一类只能发生两种对立状态的问题，采用研究者布尔(Boole，1847年)的名字，也可叫**开关代数**为布尔代数。

不论是在开关代数中出现的数字还是在二进制中出现的数字，都是 0 和 1，但它们不是相同的东西。二进制的数用 0 和 1 表示，和我们平常用的数是一样的，但在开关代数中，0和1表示两种对立的状态.

开关代数和二进制没有"直接"的关系，但在电子计算机中，它们被巧妙结合而发生非常密切的联系。显然电子计算机由很多复杂的电路构成，但电路只包含继电器触点和开关，都是二端电路。此种电路在任意时刻处于断开或闭合这两种状态之一，把处理这两个状态的变数取值 0 和 1 时，触点电路的逻辑操纵便可根据开关代数处理了.



考察(图15—36)所示的开关。在两端 a，b 之间，假如开关闭合，则电流流过，假如开关断开，则电流截止。暂且把此开关命名为 X，同时用X 表示此开关的状态的值，即假定X=1 时，开关X闭合；X=0 时开关断开。并且用图(b)简单地表示图(a)

今设两个开关 X，Y组成串联或并联. 如图15—37，这时，端子a,b,间的状态，对串联情形用X∧Y 表示. 对并联情形用X∨Y 表示，而实际上，根据 X 和 Y 的值，X∧Y 和 X∨Y 的值组成下列的表

Y \ X	1	0
1	1	0
0	0	0

X∧Y(串联)

Y \ X	1	0
1	1	1
0	1	0

X∨Y(并联)

B 开关代数

开关代数本身与电路的串联或并联是无关的，它只是把满足上表的数字关系作公理来承认，重新整理后，这些公理可写成下列形式。

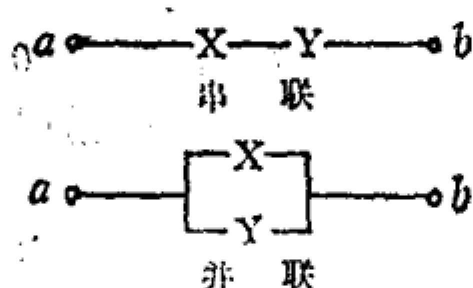
【公理】 (1a) $0\wedge 0=0$, (1b) $1\vee 1=1$;

(2a) $0\wedge 1=1\wedge 0=0$, (2b) $1\vee 0=0\vee 1=1$;

(3a) $1\wedge 1=1$, (3b) $0\vee 0=0$;

(4) $X=0$ 或 $X=1$.

计算法则 由上述公理可知，在 X、Y、Z 之间，象普通数的情形一样，交换律、结合律和分配律也都成立．即



$$X\vee Y=Y\vee X,\quad X\wedge Y=Y\wedge X$$
$$X\vee Y\vee Z=(X\vee Y)\vee Z=X\vee(Y\vee Z)$$
$$X\wedge Y\wedge Z=(X\wedge Y)\wedge Z=X\wedge(Y\wedge Z)$$
$$X\wedge Y\vee X\wedge Z=X\wedge(Y\vee Z)$$

又，无论 X 的值如何，下列各式都成立．

$$X\vee X=X,\ X\wedge X=X,\ 1\vee X=1$$

假定用 X' 表示 X 的否定．也就是说，假如 $X=0$，则 $X'=1$；假如$X=1$，则 $X'=0$．对于否定，下列关系式成立．

$$X\vee X'=1,\ X\wedge X'=0,\ 0'=1,\ 1'=0,\ (X')'=X$$

在上述公理中，当(1a)、(2a)、(3a)中的逻辑积($\wedge$)与逻辑和($\vee$)，0和1交换时，分别变成(1b)、(2b)，(3b)，这种性质叫做对偶．从公理直接得到

$$(X\wedge Y)'=X'\vee Y',\ (X\vee Y)'=X'\wedge Y'$$

一般，有下面的定理成立．

【定理】(德·摩根)

$$(X\wedge Y\wedge Z\wedge\cdots)'=X'\vee Y'\vee Z'\vee\cdots$$
$$(X\vee Y\vee Z\vee\cdots)'=X'\wedge Y'\wedge Z'\wedge\cdots$$

2·2 运算的基本电路和计算的编排

A．基本电路

在组成电子计算机的电路中，有或门电路(逻辑和电路)，与门电路(逻辑积电路)及非门电路(否定电路)等基本电路．

或门电路是一种多端输入电路，如图 15-38 所示，其特点是，当 X 或 Y 中任意一个输入端加入脉冲时，输出端就有脉冲输出．所谓脉冲，是

图 15-39 那样的电流．它是多少伏特或多少安培无关紧要，有意义的仅仅是，在某时刻它有没有超过某个定值的电压．如使脉冲的有无分别对应于 1，0，则在开关代数的意义下，$Z=X\vee Y$ 成立．在图 15-38 中，输入电路只画了两个，不过有多个时也是同样的．

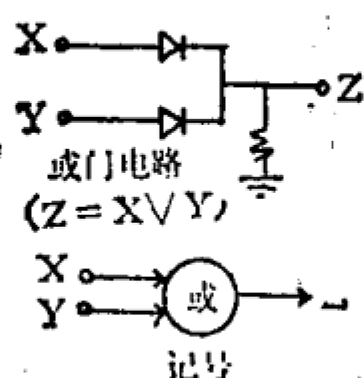


图 15-38



图 15-39

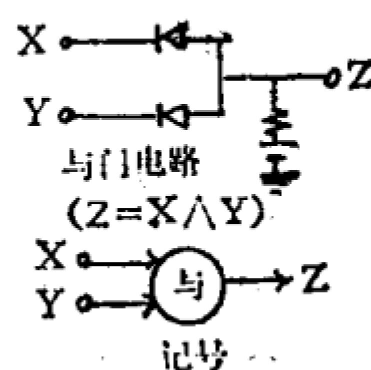


图 15-40

与门电路 也是一种多端输入电路，如图 15-40 所示，其特点是，当所有输入端都有脉冲信号输入时，在输出端才有脉冲信号输入．在开关代数的意义下，$Z=X\wedge Y$ 成立．

非门电路 是这样结构的电路，即假如有输入脉冲则无输出脉冲，假如无输入脉冲则有输出脉冲．图 15-41 是使用真空管的非门电路．

再有，在开关代数中，常常还有等式 $Z=X\wedge Y'$（与非门电路如图 15-42所示，这时当有脉冲通过 Y 时，别处的脉冲就不通过，因而把这叫做禁止电路．

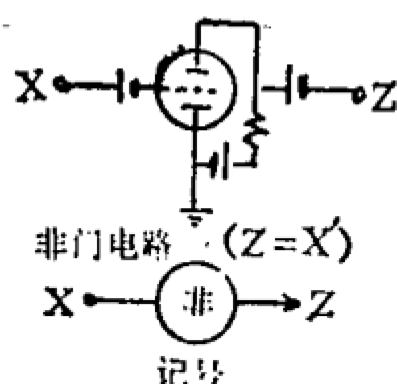


图 15-41

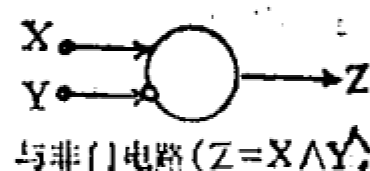


图 15-42

B．计算的编排

【加法】 在加数与被加数的相同位上，不同时为 1 的情形是简单的．例如

$$\begin{array}{r} 11 \\ +)\ 100 \\ \hline 111 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +)\ 4 \\ \hline 7 \end{array}$$

在相同位上同时有 1 时情况要复杂些．这时，须在每个数位上使用开

关代数来考查剩下的数和应移位的数．设 P 是根据每个数位的和所得到的应移位的数，R是应遗留在3+5=8的计算此数位上的数，P^{*}表示把 P 只移了一位．加法就是在每位上重复以下步骤：由 X、Y 作出 P、R，再由 P作出 P^{*}，然后把 R、P^{*}再一次视为 X、Y，重复以上过程，直到对于所有的数位，相应的 P 变为 0(也就是说，直到移位没有了)为止．

把分离成 P 和 R 的电路叫做**半加法器**．二进制的两个数的脉冲由个位开始依次地对 X，Y 作计算，这时，在图 15-43 所示的半加法器的 R 上，出现遗留的数，在 P 上发生移位的信号．

在图 15-44 中，把两个半加法器并列，于其间加上一个延迟电路(仅仅使之延迟一个脉冲)时，移位信号加于左边的半加法器上，于是，上述加法方可正常进行．

X	11
Y	+) 101
P	001
R	101
P^{*}	0010 →?
P	0010
R	0100
P^{*}	0100
P	0100
R	0000
P^{*}	1000
P	0000
R	1000

【减法】 在电子计算机中，由 X 减去 Y 的运算，一般是用在 X 上加 Y 的补码的方法来实现．也就是说，按 $X-Y=X+(k-Y)-k$ 来计算．作为k，可以取处于高位的1．例如设$X=46=00101110$，$Y=21=00010101$，

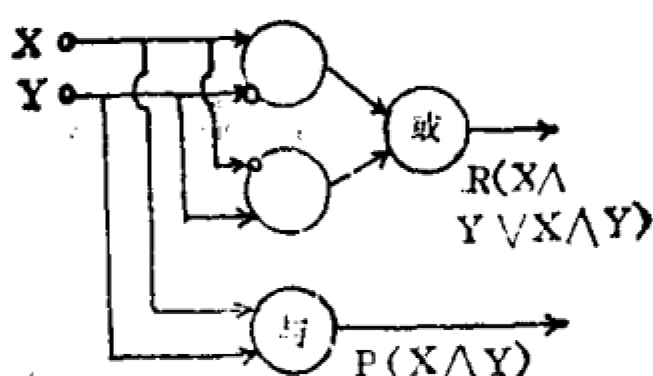


图 15-43 半加法器

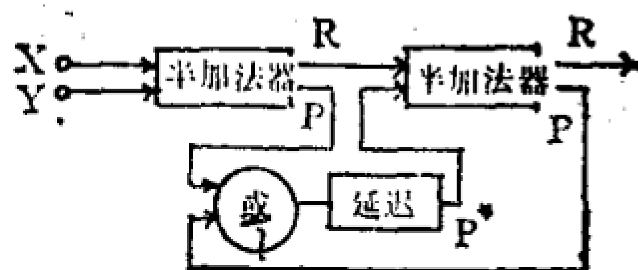


图 15-44 加法器

则可令 $k=100000000=11111111+00000001$．$k-21=(11111111-00010101)+00000001$，括号内的数可以由在减数的各位上作否定而得．

乘法作为连续加法，除法作为连续减法进行运算．

§3. 程序设计

3·1 程序设计

如象任何复杂的机器，都是运用简单元件的组合装配来作成的一样，任何复杂的计算都可归结为简单的四则运算(即加、减、乘、除)的重复．

我们把求解数学问题的运算依次表成一连串简单运算的指令，叫做算

法．算法除了包含四则运算外，还包含比较两个数的大小，变换指令的执行顺序，调换数据的存贮地址，数据读写的辅助操作等．因而电子计算机的电路只要有了四则运算和简单的辅助操作两部分，则任何算法都可执行了．

为了简单起见，设存贮器由许多存贮地址组成，每个存贮地址只存贮一个信息（数据或指令等），且附有地址码 0，1，2，…，这样，当我们要用一个指令来提取某个特定的数据时，象前面说的那样，只须采用这个数据的地址码就行了．

下面假设 α、β、γ 是地址，(α) 表示地址 α 的内容，并给定下列基本的指令．

$(\alpha)+(\beta)\to\gamma$　在 α 地址的内容上加 β 地址的内容，把结果存贮在 γ 地址内．

$(\alpha)-(\beta)\to\gamma$　从 α 地址的内容减去 β 地址的内容，把结果存贮在 γ 地址内．

$(\alpha)\cdot(\beta)\to\gamma$　α 地址的内容与 β 地址的内容相乘，把结果存贮在 γ 地址内．

$(\alpha)\div(\beta)\to\gamma$　用 β 地址的内容除 α 地址的内容，把商存入 γ 地址．

$(\alpha)<(\beta)\to\gamma$　比较 α、β 地址的内容，若 β 地址的内容大，则跳回到 γ 地址所给的指令；若 β 地址的内容不大，则执行下一个的指令．

注意　对于四则运算指令（前面的四个）来说，若 γ 地址原来贮有数据，则新的数据输入时，原有的数据会自然消失．而(α)和 (β) 在指令执行后仍然不变．

例题1.　求 x^n 的程序（其中 n 是正整数，$n=(1)$，$x=(2)$，$1=(3)$

解

地址	指令	说明
10	$(4)-(4)\to4$	地址 4 的内容变为 0($\gamma=0$)．
11	$(3)\cdot(3)\to5$	把 1 送入地址 5($x^\gamma=1$)．
12	$(3)+(4)\to4$	γ 仅仅添加 1．
13	$(2)\cdot(5)\to5$	作 $x\cdot x^\gamma=x^{\gamma+1}$，用 $x^{\gamma+1}$ 更新 x^γ．
14	$(4)<(1)\to12$	若 $\gamma<n$，再一次到地址 12 的指令，不然就到地址 15．

说明　地址 4，5 是操作码地址，预先可以存有数据．在地址 12 和 14 之间形成了循环，n 次重复后，循环即脱离．为了记录这个重复的次数，使用

了地址4．每次算得的结果送入地址5．在地址15什么指令也不写入，但一般给(15)以打印指令或停止指令．

例题2． 已知$\varepsilon>0$和$0\leqslant x\leqslant 1$，试求e^x，误差在ε以内。

解 利用展开式

$$e^x=1+x/1!+x^2/2!+\cdots+x^n/n!+\cdots$$

令

$$T_0=1,\ T_n=(x/n)T_{n-1}\ (n\leqslant 1);\quad S_0=1,\ S_n=S_{n-1}+T_n\ (n\geqslant 1),$$

对于$n\geqslant 1$，下式成立

$$e^x=S_{n-1}+t_n,\ 0\leqslant t_n\leqslant T_n e.$$

从而，假设$T_n<\varepsilon/e$，则$0\leqslant e^x-S_{n-1}<\varepsilon$.

若把地址1到8用于操作和常数存贮，则有下列程序：

地址	内容	地址	指令	说明
1	n	10	$(7)+(8)\to 1$	令$n=1$
2	$T_0,\ T_1,\ \cdots$	11	$(7)+(8)\to 2$	令$T_0=1$
3	$S_0,\ S_1,\ \cdots$	12	$(7)+(8)\to 3$	令$S_0=1$
4	暂时存贮	13	$(5)\div(1)\to 4$	$x/n\to 4$
5	x	14	$(4)\cdot(2)\to 2$	把T_{n-1}更新成$(x/n)T_{n-1}=T_n$.
6	ε/e	15	$(5)<(6)\to 19$	假如$T_n<\varepsilon/e$，到地址19，不然，到地址16.
7	1	16	$(3)+(2)\to 3$	把S_{n-1}更新成$S_{n-1}+T_n=S_n$.
8	0	17	$(1)+(7)\to 1$	把n只前进1
		18	$(8)<(7)\to 13$	返回到地址13

说明 10～12的指令是作准备的指令．用指令13，14，可由T_{n-1}算出T_n．指令15是为检查计算进展情况用的．指令16是由S_{n-1}和T_n来计算S_n用的，指令17使n的值只前进1，指令18是无条件返回到地址13的指令．在地址19中什么也没有写，但与例1相同，在这里一般只写入打印指令或仃止指令．

例题3． 求两个非负整数a，b的最大公约数的程序

解 假若把a，b的最大公约数写为$(a,\ b)$，则

$$(a,\ b)=(b,\ a)=(a,\ b-a),\ (0,\ b)=b.$$

现令$a=(1)$，$b=(2)$，$0=(3)$，$1=(4)$，得到下列程序：

地址	指 令	说 明
10	(2)<(1)→14	假如$b<a$，到14，不然到11
11	(1)<(4)→18	假如$a<1$，到18，不然到12
12	(2)−(1)→2	把b换成$b-a$.
13	(3)<(4)→10	无条件地转移到10
14	(1)+(3)→5	调换a和b.
15	(2)+(3)→1	
16	(5)+(3)→2	
17	(3)<(4)→11	无条件地转移到11

说明 指令13是取比较指令的反方向的无条件转移指令．最后a变得比1小，即从循环中脱离出来，转移到地址18．这时要求的最大公约数可能上升到地址2.

在实际过程中，指令是用符号（把它叫做机器语言）按一定格式书写出来的．程序被打在穿孔卡片或穿孔纸带上，由输入设备一次存入到存贮器中．其次，在控制设备中的计数器上，假设把指令开始执行的地址码确定(如上例中的10)，并使之起动，则指令依次地被译码执行，而自动地进行计算.

3·2 自动程序设计

机器语言和我们日常使用的语言，差别很大，难以记住且容易弄错．如果能用与日常生活相近的语言来编程序，而电子计算机又能把它翻译成机器语言，那末程序设序就变得方便多了．这种翻译的程序叫做语言处理程序.

现在较为流行的是汇编程序和编译程序.

汇编程序 在原则上是和机器语言一一对应的，运用便于存贮的操作记号，地址也可以用记号指定．因而，程序不须考虑一个个的存贮地址，只要表以适当的符号，电子计算机就会自动地进行分配了.

编译程序 它运用我们日常使用的普通单词(读READ，写WRITE，等等）和数学公式书写程序．程序几乎不考虑机械设备.

在编译程序中，较著名的是在科学技术的计算中广泛应用的FORTRAN和ALGOL，BASIC，以及在事务处理上广泛应用的COBOL．最近又有叫做PL/1的新语言系统被IBM* 发展，这是值得重视的。

* IBM即International Business Machine（国际商用电子计算机公司)的缩写。——译注

大概说来，使用机器语言、汇编程序和编译程序来编程序的比例依次为 100:70:40，而最近在美国的使用比例已变成 1:48:51. 由此看来，今后的程序设计也许会发展到几乎都使用编译程序.

例1. 用 FORTRAN 编制程序一例(根据 NEC，EDPS 的基础)

$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x+1}$，初始条件 $x=0$，$y=2.3$ (根据 Runge-Kutta 法:)

```
    REAL K1, K2, K3, K4
    F(X, Y)=3.0·Y/(X+1.0)
    WRITE(3, 2)
    X=0.0
    Y=2.3
    DX=0.01
    DO3I=1,101
    WRITE(3, 4)X, Y
    K1=DX·F(X, Y)
    K2=DX·F(X+DX/2., Y+K1/2.)
    K3=DX·F(X+DX/2., Y+K2/2.)
    F4=DX·F(X+DX, Y+K3)
    Y=Y+(K1+2.0·(K2+K3+K4)/6.0
3   X=X+DX
    STOP
2   FORMAT(1H1, 24X, 1HX, 20X, 1HY/)
4   FORMAT(1H, 21X, F6.2, E22.6)
    END
```

例2 用 ALGOL 编制程序一例，问题与例 1 相同(根据NEC . ECPS的基础):

```
RUNGEKUTTA:
begin real H, K1, K2, K3, K4, XN, YN, X, Y, F;
   integer N, NN;
   Procedure UHEN;
       F:=3.0·Y/(X+1.0);
   Procedure INSATU;
```

```
      begin CRLF; PRINTREAL(X);
      PRINTREAL (Y); PRINTREAL(F);
    end;
    HAZIME: READREAL(H); READINTER(NN);
    CRLF; PRINTREAL(H);
    READREAL(X); READREAL(Y);
    UHEN; INSATU;
  SINKO: for N:=1 step 1 until NN do
  begin XN:=X; YN:=Y;
    K1:=H·F;
    X: =XN+H/2.0; Y:=YN+K1/2.0;
    UHEN; K2:=H*F;
    Y:=YN+K2/2.0;
    UHEN;K3:=H*F;
    X:=XN+H; Y:=YN+K3;
    UHEN; K4=H*F;
    Y:=YN+(K1+2.0*K2+2.0*K3+K4)/6.0
    UHEN; INSATU
    end
end
```

例3 用COBOL编制程序一例：

```
  PROCEDURE DIVISION.
      OPEN INPUT CARD-FILE.
      OPEN OUTPUT SIN-CARD-FILE.
      OPEN OUTPUT HUSOKUBUN.
      MOVE SPACE TO SIN-CARD-FILE.
      MOVE SPACE TO HUSOKUBUN-REPORT.
  YOMIKOMI. READ CARD-FILE END GO TO OWARI.
      COMPUTE ZAIKORYO=ZAIKORYO+NYUKORYO.
      IF ZAIKORYO LESS SYUKKORYO GO TO KEISAN-
         INZI.
      COMPUTE ZAIKORYO=ZAIKORYO-SYUKKORYO.
      MOVE ZAIKORYO TO NYUZAIKORYO.
  SENKO. MOVE BUHIN-NO TO NYUBUHIN-NO.
```

```
    WRITE OUTPUT-ZAIKO.
    GO TO YOMIKOKI.
KEISAN-INZI. COMPUTE SYUKKORYO=SYUKKORYO
    -ZAIKORYO.
    MOVE BUHIN-NO TO BUHIN-NO-1.
    MOVE SYUKKORYO TO HUSOKURYO.
    WRITE HUSOKOBUN AFTER 2.
    MOVE ZERO TO ZAIKORYO.
    GO TO SENKO.
OWARI. CLOSE CARD-FILE SIN-CARD-FILE
    HUSOKUBUN.
    STOP RUN.
```

V 整 数 论

§1. 前 言

整数论是一门既古老又新近的数学分支．从它古老的历史来讲，作为"近世数学"这一章的一部分，似乎不大恰当，但是，整数论在任何时候都是新数学的一个分支，现在亦然，所以我们仍然把它归于"近世数学"这一章．整数论又叫数论，就其字面来讲，本来也就是"数论"，是研究数的性质的一个数学分支（英语叫做 number theory 或 theory of numbers．古典的称呼是 arithmetic 法文、德文、俄文也同样称呼）．然而，由于数系之核心还是整数，所以"整数论"这一提法是代表了本质的．再说，整数的概念也是有时代性的，它随着时代进展而越来越广泛．以它为中心，数的一般问题乃至更深入的有关的数学问题都包括在整数论中了．

整数论的内容是很丰富的．它的古典问题，看起来一般都是朴素单纯的．然而考究起来便知，它的很多问题却有意外的困难．之所以困难，在于整数的形式不能用单纯的法则来得到．在整数论里留下了不少业绩的十八世纪的大数学家拉格朗日，曾自谦地说过："数论研究对于我来说，付出的劳动很多，得到的成果却很少．"然而，数论是美妙的，就象高斯的名言所说、"数学是科学的王后，数论又是数学的王后．"

整数论中有很多重要的方法，其中代数方法——从古典的到现代的

——是有着广泛应用的方法。19 世纪以来，也常常使用分析方法(函数论)和几何方法．特别是分析方法，对于有的问题是不可少的，以这个方法为主而形成的一个重要分支叫做解析整数论．而最近，来自拓扑学的拓扑群、同调代数、测度、代数函数、代数几何等现代数学诸概念和方法在整数论中也有了应用．

这里，要全面地介绍整数论，是不可能的，我们只着重介绍初等整数论(§2～§7)．然后，对它的自然的发展，即代数的整数特别是二次域的整数，作了叙述(§8. §9)．对§2～§6 中的结论，给出了全部的证明．不过，限于篇幅，在§7 以后，只罗列一些简要的结果，说明从简，证明从略．

详细内容请参阅其它的参考书．

再则，§2 的后半部分，所用的代数学基本术语和概念的叙述尽量做到不用查其他的书或本书的其它章节也可以明白，至于这方面更详细的东西，也可参考本章的 Ⅰ，Ⅱ．

§2　整数的基本性质

以下直到§7．讲到整数，都是指**有理整数**，也就是普通意义下的整数．0，±1，±2，±3，…．

在考察每个个别整数的同时，我们更多的是考察这些整数的各式各样的集合．我们用特定的记号Z来表示全体整数．这时，“$a\in Z$”是与“整数a”或“a是整数”等价的表示．又，“$A\subset Z$”相当于说“整数集合A”或“A是整数的一个集合”再则，把零和正整数的全体表成N．同时把有理数的全体记成Q，实数的全体记成R，复数的全体记成C，显然有关系，$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$成立．另外从这些集合中去掉零而剩下的集合，在相应符号的右肩上标以×号．例如，$N^{\times}$表正整数(自然数)的全体．

2·1　基本术语的定义

在讨论整数的性质之前，先定义一些基本术语：两个整数之间可以作加、减、乘的运算．特别地，就乘法而言，对于整数a，b，若存在整数c，使得$a=b\cdot c$时，b叫做a的**约数**或者**因数**，a叫做b的**倍数**，用记号$b\mid a$表示，这时，也叫做a被b整除或者b整除a其否定用$b\nmid a$表示．

1 的约数是 1 和 −1．这两个数 1，−1 叫做 Z 的单位．单位是所有整数的约数，对于任意整数a，至少有单位和$\pm a$是它的约数，它们叫

做 a 的**平凡约数**，其他的约数叫做 a 的**真约数**．没有真约数的(大于1的)正整数叫做素数（或质数)．具有真约数的数叫复**合数**，整数 a 的约数是素数时，把它叫做 a 的**素因数**．又两个以上的整数 $a_1, \cdots, a_m$ 的共同的**约数(倍数)**叫做 $a_1 \cdots a_m$ 的**公约数(公倍数)**．特别地，把正的公约数中的最大者(正的公倍数中的最小者)叫做 $a_1, \cdots, a_m$ 的**最大公约数(最小公倍数)**．

2·2　整数的基本性质

整数的性质中，有一些是很明显的，例如

(1) (i)可以作加、减、乘运算，且数的诸运算法则(交换律、结合律、分配律)成立．

(ii)两个整数的和、差、积还是整数，1是整数

(2)在整数中有(按实数中定义的)大小顺序，顺序和运算之间有如下的法则成立：

(1°)若 $a<b$，则 $a+c<b+c$；

(2°)若 $a<b$，$c>o$，则 $ac<bc$．

(3) 正整数的任意集合(即 N^x 的任意非空子集)中有最小数．

(4) 对于含正整数的命题，数学归纳法成立．(见后面【定理】3)．

(5) 整数 a 的倍数的倍数也是 a 的倍数，a 的约数的约数也是 a 的约数．

即是说"若 $a|b$、$b|c$、则 $a|c$"．

(6) 若 a、b 同为 c 的倍数，则 a、b 的和、差也是 c 的倍数．

(7) 对于任意的整数 a 和 $b \neq o$，恰有一对数 q 和 r 存在，使得 $a=bq+r$，$o \leqslant r < |b|$ 成立．

(8) 对全为非零整数的 $a, \cdots, a_m (m \geqslant 2)$，

(i)存在最大公约数，最小公倍数．

(ii)最大公约数是任一公约数的倍数．

(iii)最小公倍数是任一公倍数的约数．

(9) 如果素数 p 是两个整数 a、b 的积 ab 的约数，则 p 是 a 的约数或者是 b 的约数．

(10) 任意非零整数可以分解成素因数与一个单位的乘积，且除因数的顺序外，这个分解式是唯一的．(但要包括素因数的个数为 o 的情形)即是说，若整数 $a \neq o$，则 $a=\varepsilon \cdot p_1 p_2 \cdots p_m$(这里 $\varepsilon = \pm 1$，$m \geqslant o$，p_k 为素数)就是 a 的(除乘积中因数的顺序外)唯一的素因数分解式．

现把上面性质(1)中所说的"数的诸运算法则"等性质，详细地罗列出

来如下：

(A_0) 若 a，$b\in Z$，则 $a+b\in Z$；

(A_1) $(a+b)+c=a+(b+c)$(加法结合律)；

(A_2) $a+b=b+a$　　(加法交换律)；

(A_3) 对于任意 a，存在元素 o 使得 $a+o=o+a=a$(存在零元)；

(A_4) 对任意 a，存在元 a' 使得 $a+a'=a'+a=0$(加法中存在 逆元)，这个 a' 表为 $-a$，$b+(-a)$ 表为 $b-a$.

(M_0) 若 a，$b\in Z$，则 $ab\in Z$.

(M_1) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$(乘法的结合律).

(M_2) $a\cdot b=b\cdot a$　　(乘法的交换律).

(M_3) 对任意的 a，存在元 1 使得 $a\cdot 1=1\cdot a=a$(存在么元).

(D) $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$(b+c)a=b\cdot a+c\cdot a$　(分配律)

(I) 若 $a\cdot b=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.

要说明的是(A_3)、(A_4)中所说的存在，意思是在 Z 中存在.

2·3　环，整环(或叫整区)，域

在一般的代数学中，假设有一个集合 S(可以是数的集合，也可以是数以外的元素的集合)，它的两个元素之间可以有两种运算，一个叫做加法，另一个叫做乘法，分别用记号"＋"，"·"表示，如果上述法则中(至少)有(A_0)、(A_1)、(A_2)、(A_3)、(A_4)、(M_0)、(M_1)、(D).(在(A_0)，(M_0)中须把 Z 换成 S)这样八条成立．则叫 S为环．此外若(M_2)也成立，则叫 S 为**可换环**．若 S 是可换环，且(1)也成立，则叫 S为整环．此外若(M_3)还成立，则叫 S 为**具有 1 的整环**.

从而，前面的性质(1)可表述为

(1) "Z 是具有 1 的整环".

而且，把Z叫做**有理整数环**(确切说，该应叫做整环).

象这样引入的环、整环等的概念在此具有两个方面的意义：一方面，涉及到前面叙述过的很多法则都不必在此一一重复了.另一方面，即便除Z以外，凡具有相同法则之对象的全体，都可以认为是具有共通概念的东西．同时，由上述法则还可导出其它的各式各样的法则，不过这些法则对所有的环或者整环都是共通的性质这里举几个简单的事实.

在一般环中有

$$0\cdot a=a\cdot 0=0,\ (-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-a\cdot b,\ (-a)(-b)=a\cdot b$$

若 $a+b=c$，则 $a=c-b$.(移项)

若 $a+b=a+c$，则 $b=c$．等等．

在可换环中有

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{ 等}$$

在整环中有

若 $ab=ac$ $a\neq 0$，则 $b=c$；

若 $a^2=b^2$，则 $a=\pm b$ 等等．

不用说，对于 Z 来讲，上述这些法则是当然成立的了．但是，后面将看到，当 m 不是素数时，$z/(m)$ 是可换环而不是整环，因此，上面的最后两个法则，对 $z/(m)$ 就不一定成立了(参见 § 5．5·2)．

最后，谈谈域．一个整环 s，当下面的法则 (M_4) 成立时，就叫做域(下面把从 s 去掉 0 后的集合记作 s^x)．

(M_4)，对于 s^x 的任意元 a，存在 a'，使得 $aa'=a'a=1$，(乘法的逆元素存在)．把这个 a' 表成 a^{-1}，简单地叫做 a 的**逆元**(如果 a 是数就叫做倒数)，并且把 $a^{-1}b$ 表成 $\frac{b}{a}$．注意这里的"存在"是指"在 S 中存在"，而在"Z 中，由于 ± 1 以外的数 a，其 a^{-1} 不是整数．因此 (M_4) 并不成立，即是说 Z 不是域"，然而 O，R，C 都是域，它们分别叫做**有理数域，实数域、复数域**．一般地说，把数的集合构成的域叫做**数域**．除上述的 O，R，C 数域外，还有无限多的数域，这些在 § 8·9 将着重谈到．

另一方面，其元不是数的整环和域中，最一般的是**多项式环**和**有理函数域**等，例如，把以 C 的元为系数的一个变数 x 的多项式 $(f(x)=a_0+$ $+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$a_0, a_1, \cdots, a_n\in C$ 的全体表成 $C[x]$．易知，这是具有 1 的整环．

同时，把以 C 的元为系数的一个变数 x 的有理式 $(\varphi(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，$f(x)$，$g(x)\in C[x]$，$g(x)\neq 0$ 的全体表成 $C(x)$ 时，它构成域，具有 $C[x]$ $\subset C(x)$，这是因为，$C(x)$ 的元是由 $C[x]$ 的所有元构成分式形式而得到的．在这种情形，$C(x)$ 叫做多项式环 $C[x]$ 的商域．显然，有理数域 Q 是有理整数环 Z 的商域．

以上所述是与整数性质(1)有关的一般代数学概念，至于对性质(2)，我们先对顺序的概念作些准备，然后用顺序的语言来叙述它．

在集合 S 的元和元的关系中，具有如下的性质，(R_1)，(R_2)，(R_3) 的关系，(无论用什么记号表示都行，一般用 $\leqslant$ 表示)叫做**顺序关系**，把具有这样关系的集合 S 叫做**有序集合**．

(R_1) $a\leqslant a$ (反射律)．

(R_2)　若 $a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则 $a\leqslant c$　(传递律).

(R_3)　若 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则 $a=b$　(反对称律).

若 S是有序集，且满足下列性质(T)，则 S叫做**全序集合**.

(T)　对于 S 的任意二元 a，b,关系 $a\leqslant b$，$b\leqslant a$ 中至少有一个成立.

若 S 是整域，同时也是全序集合，而且在它上面整数的性质 (2) 中的 (1°)和(2°)，即

(1°)　若 $a<b$，则 $a+c<b+c$.

(2°)　若 $a<b$，$c>o$，则 $ac<bc$.

成立，S 就叫做**全序整域**，这时，整数的性质(2)可以表成：

(2)　"Z 是全序整环".

§ 3　基本性质的整理

3·1　公 理 系

要把前述的整数性质整理成一个体系，最低限度，应以哪些基本性质作为出发点呢？就是说，需要考虑，在整数中把哪性质确定为公理才好．有种种方法选取整数的公理系(例如，根据著名的皮亚诺公理系来确定自然数，然后代数地定义一般的整数的做法是一个标准的方法).在这里，我们取前面诸性质中的 (1)，(2)，(3)为公理，并改记为如下的形式.

整数的公理系：[Z_1]，整数的全体 z 是具有 1 的整环.

[Z_2]，Z 是全序整环.

[Z_3]，任意非空正整数的集合有最小数.

3·2　直接的结果

我们说仅由上述公理就可以把 (前节列出的整数的性质全部导出来，关于这点的证明：在前面 § 2 所述的诸性质中，譬如(5)，(6)的证明是简单的，剩下的(4)，(7)～(10)虽然不能说都是自明的，但其中的任意一条都要直接或间接地用到[Z_3].因此，首先要把[Z_3]变成更好用的形式.(下面【定理】1)．为此我们定义整数集合的有界性，若整数集合 A 中的全体整数不小于(不大于)某个确定的整数 c. A 叫做是**下(上)有界的**(这里的 c 可以属于 A，也可以不属于 A).

【定理】1. 若 A 是Z的非空下(上)有界的子集，则 A 中有最小数(最大数).

证明　A下有界时，对所有的 $x\in A$. 有 c 使得 $c\leqslant x$. 设 $y=x-c+1$

$(x\in A)$的全体构成的集合为 A'，如果 $y\in A'$，则由 $y>0$，得 $A'\subset N^x$。所以，根据[z_3]，A' 有最小数 a'．设 $a=a'+c-1$，则由 $a'=a-c+1$得 $a\in A$，但是对于任意的 $x\in A$，$a'=a-c+1\leqslant y=x-c+1$，所以 $a\leqslant x$，a 是 A 的最小数，在 A 是上有界的情形，对 $x\in A$，把 $y=-x$ 的全体记为 B，则 B 下有界，所以在 B 中有最小数 b，$a=-b$ 是 A 的最大数．□

【定理】2．a、b 是整数时

(i) 若 $a>0$，则 $a\geqslant 1$．

(ii) 若 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$a|b$，则 $|a|\leqslant|b|$

证明 (i) 设 $0<a<1$，则 $a^2<a$，同样地，$0<\cdots<a^n<a^{n-1}<\cdots<a<1$，据[$Z_2$]，$a$ 的方幂的全体中有最小数，设其为 a^m，由于有 $a^{m+1}<a^m$，因此与 a^m 为最小数矛盾，所以 $a\geqslant 1$．

(ii) 由假设，有 $c\in z$ 使得 $ac=b$，而 $c\neq 0$，所以 $|c|>0$，更由(i)，$|c|\geqslant 1$，再加上 $0<|a|$，便有 $|a|\leqslant|a|\cdot|c|=|b|$．□

【定理】3．(数学归纳法)(见§2，2·2 (4)

对于含正整数 n 的命题 $p(n)$，若如下的 1°，2° 成立，则对所有的正整数 n，$p(n)$皆成立．

1° $p(1)$成立．

2° 对任意的 $m>1$，假设对满足 $1\leqslant k<m$ 的所有 k，$p(k)$成立，则 $p(m)$也成立．

证明 设存在使$p(n)$不成立的 n，由于这样的 n的集合 A 非空，据[Z_3]A 中有最小数 m，由1°，$1\bar{\in}A$，所以 $1<m$，而且满足 $1\leqslant k<m$ 的所有 k，有 $k\bar{\in}A$，即是说 $p(k)$成立，所以据 2°，$p(m)$也成立，这与 $m\in A$ 相矛盾，所以使 $p(n)$不成立的 n 不存在．□

【定理】 4．(见§2．2·2．(5)和(6))

(i) 若 $a|b$，$b|c$．则 $a|c$．

(ii) 若 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b\pm c)$

(iii) 若 $a|b$，$a|c$，则 $a|(mb+nc)$ (m，n 为整数)

证明 由于简单，故从略．(iii)是(i)，(ii)的自然推广，(i)也叫整数关系的传递性，(ii)，(iii)叫整除关系的线性性．□

3·3 理　想

把一个整数 a 的倍数的全体令为 A，据【定理】4 知道，A 具有如下的性质．

(10) $A\subset Z$，

(11) 若 $x, y \in A$, 则 $x \pm y \in A$.

(12) 若 $x \in A$, $m \in z$, 则 $mx \in A$.

代数中，把具有如此性质的集合 A 叫做 z 的理想，即有

【定义】 数的集合 A 满足上述条件(10)，(11)，(12)时，A 叫做 Z 的 **理想(整理想)**.

由定义，若 A 是 z 的理想，则有 $0 \in A$，若 $x \in A$，则有 $-x \in A$. 整数 a 的倍数的全体是理想，并且一般地有，

【定理】5. 一组确定的整数 $a_1, \cdots, a_m$ 的倍数的和的全体，即形如 $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m (x_k \in z, k = 1, 2, \cdots m)$ 的整数的全体构成理想，而且是含 $a_1, \cdots, a_m$ 的(按包含关系)最小的理想.

与其说这是整数论的定理，倒不如说这是一般的代数学定理.(即是不仅对于整数环.对一般可换环也成立的性质).其证明在很多书上都是可以看到的. 不过为了阅读的方便，我们还是写在下面.

证明 设如上形式的整数全体为 A，则 $A \subset Z$ 又设 $y \cdot z \in A$，且 $y = a_1x'_1 + \cdots + a_mx'_m$，$z = a_1x''_1 + \cdots + a_mx''_m$ 则 $y + z = a_1(x'_1 + x''_1) + \cdots + a_m(x'_m + x''_m) \in A$，并且，令 n 为任意整数，有 $ny = a_1(nx'_1) + \cdots + a_m(nx'_m) \in A$，所以 A 是 z 的理想. 另一方面，设 B 是包含 $a_1, \cdots, a_m$ 的任意的(Z的)理想，显然，由于它包含形如 $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m$ 的一切整数，所以有 $A \subset B$. □

把这个定理中得到的理想叫做 $a_1, \cdots, a_m$ 生成的理想，表成 $(a_1, \cdots, a_m)$. 特别的，$m = 1$ 时，(a) 是含 a 的最小的理想，它就是 a 的倍数的全体. 也叫做由 a 生成的**单项理想**(或**主理想**)，这时 $(-a) = (a)$，$(1) = (-1) = Z$. $(a) \subset (a, b)$，同时，若 $a \mid b$，则 $(a) \supset (b)$，反之也成立.

注意 对于数的集合 A 和 B，若把属于 A 的数与属于 B 的数的和的全体表作 $A + B$. 同时把数 a 与集合 B 的数的积的全体表作 aB，这时有

$$(a) = aZ, \ (a_1, \cdots, a_m) = a_1Z + \cdots + a_mZ.$$

【定理】6. (除法定理) (参看§2的(17))

对于任意的整数 a 和 $b \neq 0$，必存在唯一的一组整数 q, r 满足 $a = bq + r$，$0 \leqslant r < |b|$.

证明 设 $b > 0$，于是 $b \cdot |a| \geqslant |a|$，且 $b(-|a|) \leqslant -|a| \leqslant a$，所以，$b$ 的倍数中不超过 a 的数的全体 s 是非空且上有界的. 由【定理】1. s 中有最大数，设它为 $b \cdot q$，则它满足 $bq \leqslant a < b(q+1)$，因此令 $a - bq = r$ 即 $a = bq + r$，$0 \leqslant a < b$. 其次，设 $b < 0$，则有 q_0 和 r 使得 $a = |b| \cdot q_0 + r$，$0 \leqslant r < |b|$，于

是取 $q=-q_0$, 则有 $a=bq+\bar{r}$, $0\leqslant r<|b|$. 再则，设有 $a=bq+\bar{r}=bq'+\bar{r}'$, $0\leqslant r<|b|$ 和 $0\leqslant r'<|b|$ 则由 $b(q-q')=r'-\bar{r}$ 即有 $|b|\cdot|q-q'|=|r'-\bar{r}|<|b|$, 所以，若 $q-q'\neq0$, 则不等式左边 $\geqslant|b|$, 产生矛盾，因此必有 $q=q'$, 从而 $\bar{r}=\bar{r}'$. □

该定理中的 q 叫做**整商**，r 叫做余数(最小剩余)，显然，$r=0$ 和 $b|a$ 是等价的．整数 a 的倍数的全体是 z 的理想，实际上，其逆也成立．

【定理】7. Z 的任意理想是主理想.

证明 对于z的任意理想 A，我们来证明存在 a 使得 $A=(a)$. 若 $A=(0)$, 则取 $a=0$ 成立．当 $A\neq(0)$时，A 含 0 以外的整数，没有 $c\in A$, $c\neq0$, 则也有 $-c\in A$, c 和 $-c$ 中必有一个为正，所以属于 A 的全体正整数的集合 B 是非空的，从而，据[z_3]，B 里有最小数 a，那末，对于任意的 $x\in A$，有整数 q，r 使得 $x=a\cdot q+r$, $0\leqslant r<a$, 所以 $r=x-aq\in A$. 但由于 a 是生成 A 的数，而又要满足 $0\leqslant r<a$, 所以必有 $r=0$, 因此 $x=aq$, 即 x 是 a 的倍数，也就是说 $A\subset(a)$，反之，显然有 $(a)\subset A$, $\therefore A=(a)$. □

【系】 对于全不为零的任意整数组 $a_1, a_2, \cdots, a_m$,

(i) 存在整数 d，使得$(a_1,\cdots,a_m)=(d)$，可取 $d>0$.

(ii) d 是 $a_1,\cdots,a_m$ 的公约数，存在整数 $u_1,\cdots,u_m$，满足 $d=a_1u_1+\cdots+a_mu_m$.

证明 (i)，在理想$(a_1,\cdots,a_m)$中运用【定理】7 即成

(ii). 据(i)，一方面由于 $a_k\in(d)$, a_k 是 d 的倍数, d 是 $a_k(k=1,\cdots,m)$ 的约数．另一方面，由于 $d\in(a_1,\cdots,a_m)$，所以可表为 $d=a_1u_1+\cdots\cdots a_mu_m$, □

以下的【定理】8, 9, 10 分别是前节的性质(8)、(9)、(10).

【定理】8. 对于任意全不为零的整数 $a_1,\cdots,a_m$,

(i) 存在最大公约数，最小公倍数.

(ii) 最大公约数是任意公约数的倍数.

(iii) 最小公倍数是任意公倍数的约数.

证明 (i)例如设 a_1 是$a_1,\cdots,a_m$ 中的一个非零数，由于公约数全是 a_1 的约数，所以据【定理】2，这些公约数必不大于 $|a_1|$. 再据【定理】1，公约数中存在最大者．同样，据[Z_3]正的公倍数中有最小者.

(ii) 据前定理的系，d 是 a_1，…，a_m 的约数，一个任意的公约数是 $a_1u_1+\cdots+a_mu_m=d$ 的约数，从而，d 是最大公约数，且是任意公约数的倍数.

(iii) 设 l 为最小公倍数，x 为任意公倍数，若 $x=l\cdot q+r$，$0\leqslant r>l$，那末 $r=x-l\cdot q$ 也成为公倍数，由于 l 是最小公倍数，所以必有 $r=0$，亦即 $l|x$. □

根据这个定理，在理想的关系式 $(a_1,\cdots,a_m)=(d)$ 中，d 是最大公约数. 所以，对于这个最大公约数 d，一般也用记号 $(a_1,\cdots a_m)$ 来表示. 不过以后在理想的情况下，我们仍然冠以"理想"二字写成理想 $(a_1,\cdots,a_m)$、并且，对最小公倍数，我们用 $[a_1,\cdots,a_m]$ 表示.

$(a,b)=1$ 作为理想来讲是与 $(a,b)=(1)=Z$ 等价的，这时 a 和 b 叫做是**互素**的.

【定理】9. (i) 如果 $(c,a)=1$，且 $c|ab$，则 $c|b$.

(ii) p 是素数，若 $p|ab$，则 $p|a$ 或 $p|b$.

证明 (i) 由于 $(c,a)=1$，则必有 u，v 满足 $cu+av=1$，两边乘以 b，得 $cbu+abv=b$，由于左边第一，二项皆可被 c 整除，所以右边也同样有 b.

(ii) 因为 $(p,a)|p$，而 p 是素数，故 $(p,a)=p$ 或 $(p,a)=1$，在第一种情形，$p|a$；在第二种情形，据(i)，$p|b$. □

【系】 若 $(a,b)=1$，$(a,c)=1$，则 $(a,bc)=1$，反之也成立.

【定理】10.（素因子分解定理）

非零整数能分解成素因子之积，且(除因子的顺序外)分解式是唯一的. 也就是说，若 $a\neq 0$，则有唯一的分解式 $a=\varepsilon_1p_1\cdots\cdots p_m$，$(m\geqslant 0$，$p_k$ 为素数，$\varepsilon=\pm1)$.

证明 只须在 a 为正的情形来证明就可以了. 我们用数学归纳法，当 $a=1$ 时，可取 $m=0$，$\varepsilon=1$，分解式成立. 假设在 $a>1$ 时，对于满足 $1<a'<a$ 的所有 a'，因子分解式皆成立，则对于 a 为素数的情形，取 $m=1$，分解式即成立；a 为复合数时，假设可分解为 $a=b\cdot c$，$1<b<a$，$1<c<a$，则对于 b,c，归纳假设成立，即 $b=p_1\cdots p_l$，$c=p_{l+1}\cdots p_m$，所以有 $a=p_1\cdots p_m$. 至于唯一性，$a=1$ 时显然。现假设对满足 $1\leqslant a'<a$ 的所有 a' 分解式唯一. 且有 $a=p_1\cdots p_m=p_1'\cdots p_n'$，则 $p_m|p_1'\cdots p_n'$，由上面【定理】9的(ii)，必有某个 $k\in\{1,2\cdots n\}$，使得 $p_m|p_k^1$. 比如 $p_m|p_n'$，于是 $p_m=p_n'$，$p_1\cdots p_{m-1}=p_1'\cdots p_{n-1}'<a$，据归纳假设，$m=n$，因此两边的素因子是相同的，所以关于 a 的素因子分解是唯一的. □

注意 可以认为这个定理所讲的是极其自然的，从而不作上述的证明，一开始就直观地承认这个定理（即把这个作为一个公理，来考虑一个公理系）

自然一切都简单了，上述的【定理】8，【定理】9等都可以由它导出。可是，对于不是有理整数的（后面将要叙述的）代数域的整数情形，一般说来，因子分解定理是不成立的，这就说明了该定理的重要性，正因如此，有时称它为初等数论的基本定理。由此看出，上面的证明也是很有意义的。

关于素因子的分解，常把相同的素因子写成幂的形式，即可唯一地表成。

$$a=\varepsilon\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots p_k^{\alpha_k},(p_1,\cdots,p_k\text{ 是互异的素数}, \alpha_i\geqslant 1)$$

但是，若允许将 a 的素因子以外的一些素数加上 0 次幂以后，放入 a 的素因子分解式中的话，上面的表达式对 α_i 的限制可改为 $\alpha_i\geqslant 0$，这是有好处的。例如有两个数 a，b，设它们的全部素因子是 $p_1,p_2,\cdots p_k$，这时其中的 p_k 如果是 b 的素因子，而不是 a 的素因子，则在 a 的表达式中相应地取 $\alpha_k=0$ 即可，这一来就有

$a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\ p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$b=\varepsilon p_1^{\beta_1}\ p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$ $(\alpha_i\geqslant 0,\beta_i\geqslant 0)$这样，比如对以下的运算，就带来方便了。

$$a.b=\varepsilon'' p_1^{\alpha_1+\beta_1}\ p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_k^{\alpha_k+\beta_k},(\varepsilon''=\varepsilon.\varepsilon').$$

$$(a.b)=p_1^{\gamma_1}\ p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k},\gamma_i=\min(\alpha_i,\beta_i).$$

$$[a,b]=p_1^{\delta_1}\ p_2^{\delta_2}\cdots p_k^{\delta_k}\ \delta_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$$

并且，由这些容易证明

【系】 对正整数 a,b，有

(i)　$(a,b)[a,b]=a\cdot b$

(ii)　若 a,b 互素，则$[a,b]=a\cdot b$.

为了求出两个整数的最大公约数，最小公倍数，虽然可以用上面的公式，但需要作实际计算以求出素因子，并不简单。这时，下面的**欧几里得辗转相除法**是很有效的方法。

【定理】11. 若 $b\neq 0$，$a=b,q+r$，则$(a,b)=(r,b)$.

证明　设$(a,b)=d,(r,b)=d'$，由于 $b\neq 0$，则 $d>0$，$d'>0$。利用 $d'|b$，$d'|r$，$a=bq+r$，得 $d'|a$，$\therefore d'|d$. 同时，由于 $d|a$，$d|b$，及 $r=a-bq$，有 $d|r$，$\therefore$　$d|d'$，亦即 $d=d'$.　□

在这个定理中，我们没有假定 $0\leqslant r<|b|$，但若加上这个条件，则对最大公约数的计算是有用的。这时，设 a,b 为正，且设 $a>b$，由 $a=bq+r$，$0\leqslant r<b$，r 比 a 小，再把这一关系式用于 b,r，并且重复这样作，即得

$$a=b\cdot q+r_1,0<r_1<b;b=r_1q_1+r_2,0<r_2<r_1;\cdots;r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n$$

$0<r_n<r_{n-1}$; $r_{n-1}=r_nq_n$, 依次求出 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 及 $b>r_1>r_2>\cdots>r_n>0$, 则有

$(a,b)=(r_1,b)=(r_1, r_2)=\cdots=(r_{n-1}, r_n)=(0, r_n)=r_n$. 所以 r_n 是 a,b 的最大公约数，这个方法叫做**欧几里得辗转相除法**.

对三个以上的整数也是一样的，例如对于正整数 a,b,c, 设 $a=cq+r$, $b=cq'+s$, 则可得$(a,b,c)=(r,s,c)$, 重复这样作，如果成 为$(x,y,0)$, 则因$(x,y,o)=(x, y)$, 即回到两个数的情形了.

§ 4. 整数论的问题

4·1 素数问题和不定方程

把一个整数分解成几个素数的乘积，这在素数的研究中，早在古希腊时代就成为有名而基本的问题了. 这一方面表现在相异素数的无穷性上，另一方面表现在素数的求法或者对一个数是否为素数的判别法上.

【定理】1.（欧几里得）素数的个数是无穷的.

证明 设素数的个数有限，它的全部为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 那末，$a=p_1p_2\cdots p_n+1$ 不能被 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中任何一个整除，故不是复合数，但a又不等于其中任何 p_k, 因而a不是素数，显然也不是单位数，因此产生矛盾， □

不大于正整数 N 的**素数表的作法**（爱拉托斯散筛法）

写出数 $1,2,3,\cdots,N$, 消去 1 后，下一个数 2 是素数，然后消去2以外的一切偶数(2 的倍数)，在剩下的数中，2 的下一个数 3 是素数，再消去 3 的倍数(3 除外)，又在剩下的数中，对 3 的下一个素数，重复上述作法，当得到素数 p 时，消去 p 的倍数(p 除外)，这样作下去，直至N，最后在 N 内剩下的全是素数. 但是，在作实际计算时，只要消去不大于$\sqrt{N}$的素数的所有倍数，即可完成，并且，为了消去这种素数 p 的倍数，实际上从 p^2 开始消去就行了，当 N 很大时，可利用电子计算机进行计算.

观察上面得到的素数表会发现，素数的分布是极不规则的. 对素数分布的探讨，是整数论的一个大问题. 把不大于正实数 x 的素数的个数记为兀(x)，高斯猜想，当 x 增大时，$\pi(x)$的值近似地等于$\dfrac{x}{\log x}$，大约在一百年以后（十九世纪末）由阿达玛和托·拉·巴勒·布申得到了证明，这里所调近似，准确地说法是：

素数定理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}}=1$.

同时，狄利克莱的如下定理，揭示出了更深刻的内容.

狄利克莱定理 在首项和公差互素的任意等差数列中，存在着无限多个素数.

上述两个定理的证明都不简单，要用到解析的(函数论的)方法，故从略.

这样一来，由正整数的素因子分解定理直接得到的几个性质都讨论过了，还有下面的事实也很简单. 把正整数 a 的所有正约数的个数记为 $T(a)$(包含 1 和 a 自身)，且把 a 的所有正约数的和(包含 1 和 a 自身之和)记为 $s(a)$便有

【定理】2. 设正整数 a 的素因子分解为

$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$，则　$T(a)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)$.

$$S(a)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\cdots\frac{p_m^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}.$$

证明 取 a 的约数形如 $p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_m^{\lambda_m}(0\leqslant\lambda_1\leqslant\alpha_1,\ \cdots,\ 0\leqslant\lambda_m\leqslant\alpha_m)$，$\lambda_1$ 取法有 α_1+1 种，…，λ_m 的取法有 α_m+1 种，且它们是互相独立的，所以 $T(a)$ 如上式所表，同时有

$$S(a)=\sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1}\cdots\sum_{\lambda_m=0}^{\alpha_m}p_1^{\lambda_1}p_2^{\lambda_2}\cdots p_m^{\lambda_m}=\left(\sum_{\lambda_1=0}^{\alpha_1}p_1^{\lambda_1}\right)\cdots\left(\sum_{\lambda_m=0}^{\alpha_m}p_m^{\lambda_m}\right)=\text{上式右边}.\quad\square$$

在希腊时代，当 a 的约数(含 1 不含 a)的和等于 a 自身时，即$S(a)=2a$ 时，把 a 叫做**完全数**.

【定理】3 (欧拉定理)

a 是偶完全数的充要条件是 $a=2^{n-1}\cdot p$, $n>1$, $p=2^n-1$ 是素数.

证明 **必要性**：设 a 是偶完全数，则可取成 $a=2^{n-1}\cdot b(n>1$, b 是奇数)，由于 $S(a)=2a$，所以 $S(a)=(2^n-1)\cdot S(b)=2a=2^nb$，因此 $S(b)=b+\dfrac{b}{2^n-1}$，这里$\dfrac{b}{2^n-1}=c$ 是整数，且由于 $2^n-1>1$，c 是 b以外的b的约数，并且由于 $S(b)=b+c$，因此必有 $c=1$，b 不具有真约数，所以 $b=2^n-1$ 是素数.

充分性 反之，若 $a=2^{n-1}\cdot p$，$n>1$，$p=2^n-1$ 是素数，则 $S(a)=(2^n-1)(p+1)=(2^n-1)2^n=2^n\cdot p=2a$.

$\square$

形如 $p=2^n-1$ 的素数叫做**麦森素数**.要使 2^n-1 成为素数，必须 n 是素数. 这是因为，设 $n=l\cdot m$，$l>1$，$m>1$，则 $2^n-1=(2^l)^m-1=(2^l-1)(2^{l(m-1)}+\cdots+2^l+1)$.右边的每一个因子都是真约数.(但是，$n$ 是素数却不是充分条件)，当 $n=2,3,5,7$ 时得到的麦森素数是 3,7,31,127，与之相应的完全数是 6,28,496,8128. 直到现在，大约已经知道了二十三个麦森素数(是否有无穷多个麦森素数，尚属未知)，从而偶完全数有多少也就知道了.($n=11$ 时，$2^{11}-1$不是素数). 同时，奇完全数是否存在也还不知道.

另一方面，形如 $p=2^n+1$ 的素数叫做**费马素数**.要使 2^n+1 为素数，必须 n 不具有奇约数，即 n 是 2 的幂. 这是因为，设 n 有 1 以外的奇约数，取

$n=l\cdot m$，$m>1$，m 是奇数，则

$$2^n+1=(2^l+1)(2^{(m-1)l}-\cdots+2^{2l}-2^l+1)$$

右边的每个约数都是真约数. 因此 $n=2^r$，$r=0,1,2,3,4$ 时，$2^{2^r}+1$ 是素数，分别为 3,5,17,257,65537，对费马素数，除上述五个外，还没有新的发现.*

高斯证明了这样的命题，"只用直尺和圆规能作出正 N 边形的充要条件是

$N=2^k p_1 p_2\cdots p_l$ ($k\geqslant 0$，$l\geqslant 0$)，$p_1,\cdots,p_l$ 全是费马素数."他特别，对"正十七边形"的作图作了演示. 正多边形的作图问题是极其经典的问题之一. 上述结果载于他的伟大著作"整数论"(Disquisitiones Arthmeticae. 1801)中，它是其中近代理论所必须的，涉及到了新的方程式论和整数论的衔接关系问题.

以上所谈，是与素数有关的一些性质和问题，下面还有著名而尚未解决的问题.

哥德巴赫猜想(或问题)：大于 2 的偶数都可以表成两个素数的和.**

例 $4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，$10=3+7=5+5$ 等等.

不限于素数的研究，一般说来，把处理这种加法性质的问题的整数论叫做**加法的整数论**.

---

*：迄今已知，有 46 个费马数(包括 $r=5$ 直至 $r=16$ 所对应的十二个费马数)不是素数——译注.

**：这个猜想迄今未完全证明，但我国数学家陈景润已取得重大突破，他证明了：大偶数都可表示为两个素数之积与一个素数之和——译注.

我们还需要考虑更一般的整数论问题，其中虽有多种多样的问题，但大部分是与不定方程(以及同余方程)有关的．

例如，要求 $83x+24y=1$，$6x+3y=5$，$x^2+y^2=z^2$，$x^2-xy+y^2+2x-14y+6=0$ 等的整数解就是这样的问题．一般地，求含两个以上的未知数 $x_1y,\cdots$，而系数是整数的代数方程式 $f(x_1y,\cdots)=o$ 的整数解问题，就是不定方程式的问题，它要求第一，判断一个不定方程的解是否存在；第二，如果解存在，求出所有的解．关于解的存在问题，例如，也有象上面例子中第二个方程那样，尽管很简单，它却显然没有整数解．

不定方程起源于古希腊，这是在公元三、四世纪时期丢番图在他的十三卷本《数论》(Arithmetika)(现存6卷)中提出的，(该书中提出了很多这类问题)．因此，人们也把不定方程叫做丢番图方程．

以下我们着重介绍一次不定方程和二元二次不定方程，它们中有名的毕达哥拉斯方程和费马方程问题．

毕达哥拉斯问题$x^2+y^2=z^2$ 的正整数解（毕达哥拉斯数）$x=3,y=4,z=5$，是在希腊建立以前就知道的了．但一般的解大约是在六、七世纪时期，由印度移往阿拉伯居住的布莱马格普塔所得到的，它是 $x=m^2-n^2,y=2mn,z=m^2+n^2$($m$，$n$ 是满足 $m>n>0$ 任意整数)．(请读者作为练习来试一试)．

费马猜想　(也叫做费马大定理或费马最后定理)在费马的遗稿中声称证明了："当 $n\geqslant3$ 时 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数的解．"但没有见到证明的过程．从十七世纪以来直到现在，一般的证明还没有得到，因此不能作为正式的定理来叙述．但是对于 $n=3,4,5$ 甚至对更大的 n，已有证明，为着该问题的彻底解决，大大地刺激了整数论的发展，因此对促进整数论的发展，它是有很大功绩的．

下面比较系统地来考虑不定方程和同余方程．

4·2　一次不定方程和连分式

一次不定方程的解的存在条件可以简单地求出，不用说，这里所说的解应该是整数解．

【定理】4．一次不定方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=b \quad ①$$

有解存在的充要条件是 $(a_1,\cdots,a_m)|b$．

证明　令 $(a_1,\cdots,a_m)=d$，设①的解为 $x_1^0,\cdots,x_m^0$，则有

$$b=a_1x_1^0+\cdots+a_mx_m^0.$$

由于它属于理想，$(a_1,\cdots,a_m)=(d)$，所以 b 是 d 的倍数，反之，若 $d|b$，由于 $b\in(d)=(a_1,\cdots,a_m)$，所以 $b=a_1x_1^0+\cdots+a_mx_m^0$. □

其次，在解存在的前提下，我们来考虑实际求出解的问题. 这时，由于 $(a_1,\cdots,a_m)=d$，$d|b$，所以可令 $a_k=a_k'd$，$b=b'd$，用 d 除① 的两边得到

$$a_1'x_1+a_2'x_2+\cdots+a_m'x_m=b',(a_1',\cdots,a_m')=1. \quad ①'$$

①与①' 是同解的，从而，为了解①'，只要在①中令 $(a_1,\cdots,a_m)=1$ 成立即可.

现在，我们先考虑二元的情形，即考虑

$$ax+by=c,\ (a,b)=1 \quad ②$$

的情形，这时.

"设②有一组解为 x_0,y_0，则②的任意解可表成

$$x=x_0-bt,y=y_0+at. \quad ③$$

其中 t 可以取任意整数 ."

其原因是，在②中取 x,y 为任意解，于是把 $ax_0+by_0=c$ 与②的两边分别相减，得 $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$，所以 $a(x-x_0)=-b(y-y_0)$，由于 $(a,b)=1$，则 $a|(y-y_0)$. 所以 $y-y_0=at$. 再把这个代入上式的右边，则有

$$a(x-x_0)=-bat,\quad \therefore x-x=-bt.$$

也就是说任意解必定形如③.

反之，把③代入②的左边，由于有

$$a(x_0-bt)+b(y_0+at)=ax_0+by_0=c,$$

所以形如③的 x,y 都是解.

在③中，把 t 认为是参变量，且它的变化范围是 Z. 这样的含参变量的解③叫做②的**通解**. 而 x_0，y_0 这样不含参变量的解叫做**特解**. 于是，只要求出了一组特解，所有的解都可以得到了.

"对于②，若求出了

$$au+bv=1,\quad (a,b)=1 \quad ②'$$

的特解 u_0，v_0，则 $x_0=cu_0$，$y_0=cv_0$ 都是②的特解." 由此，要解②，只要解出②'即可. 这时最标准的方法是利用欧几里德辗转相除法，而且经过变形，可整理成所谓连分数法.

对系数 a,b 进行辗转相除，得

$$a=bq_0+r_1,\ b=r_1q_1+r_2,\cdots,r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n,\ r_{n-1}=r_nq_n. \quad ④$$

由假定，$r_n=(a,b)=1$，对④式依次作变形，由它的第一式得 $a+(-q_0)b=r_1$，再代入第二式，移项得 $(-q_1)a+(1+q_0q_1)b=r_2$，一般的，对任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，设 f_k，g_k分别是 q_0，$q_1,\cdots,q_{k-1}$ 的整式，则有

$f_k(q_0,\ q_1,\cdots,q_{k-1})a+g_k(q_0,\ q_1,\cdots,q_{k-1})b=r_k$（这个可用数学归纳法证明）．特别地，当 $k=n$ 时，有

$$f_n(q_0,\ q_1,\cdots,q_{n-1})a+g_n(q_0,\cdots,q_{x-1})b=1.$$

由此，$u_0=f_n(q_0,\cdots,q_{n-1})$，$v_0=g_n(q_0,\cdots,q_{n-1})$是一组解．

例　解 $83x+24y=1$.

作辗转相除，$83=3\times24+11$，$24=2\times11+2$，$11=5\times2+1$．所以，$a=83$，$b=24$，$q_0=3$，$q_1=2$，$q_2=5$，$r_1=11$，$r_2=2$，$r_3=1\ (n=3)$，所以 $a-3b=r_1$，$b-2r_1=r_2$，$r_1-5r_2=r_3=1$，从而 $b-2(a-3b)=r_2$，即 $-2a+7b=r_2$，$(a-3b)-5(-2a+7b)=1$，也就是说，$11a+(-38)b=1$，$\therefore x_0=u_0=11$，$y_0=v_0=-38$ 是一组特解，$x=11-24t$，$y=-38+83t$是通解．

连分数法　现在，对两个整数 a，b，考察分数$\frac{a}{b}$（并且，a，b是互素的，从而该分数是既约分数，又 a，b 中若有负数，便取其绝对值，由于对最后的符号可作适当的改变，所以可直接把 a，b 作为正数来讨论．）这时上面的④有如下的形式：

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{r_1}{b},\quad \frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},\cdots,\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_{n-1}+\frac{r_n}{r_{n-1}},\ \frac{r_{n-1}}{r_n}=q_x \qquad ④'$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{\cfrac{b}{r}}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{r_2}{r_1}}=\cdots\cdots=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{1}{q_n}}}} \qquad ⑤$$

⑤的右端叫**连分数**，表成

$$q_0+\frac{1}{q_1}\ \frac{1}{+q_2}\cdots\cdots\frac{1}{+q_{n-1}}\ \frac{1}{+q_n}, \qquad ⑤'$$

这时，把 $q_0+\frac{1}{q_1}\ \frac{1}{+q_2}\cdots\cdots\frac{1}{+q_m}(0\leqslant m\leqslant n)$.

叫做⑤′的部分商．把这个部分商表成$\frac{p_m}{\theta_m}$，则有

$\frac{p_0}{\theta_0}=q_0,\ \frac{p_1}{\theta_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1},\ \cdots,\ \frac{p_n}{\theta_n}=\frac{a}{b}$. 对 $m\geqslant 1$，有

$$p_m=q_mp_{m-1}+p_{m-2},\ \theta_m=q_m\theta_{m-1}+\theta_{m-2}, \tag{⑥}$$

并且，$p_{-1}=1,\ \theta_{-1}=0,\ p_0=q_0,\ \theta_0=1$

成立，这是因为，⑥在 $m=1$ 是显然成立的，对 $m>1$，假设 $m-1$ 时成立，则有

$$\frac{p_{m-1}}{\theta_{m-1}}=\frac{q_{m-1}p_{m-2}+p_{m-3}}{q_{m-1}\theta_{m-2}+\theta_{m-3}}.$$

至于 $\frac{p_m}{\theta_m}$，只要将 $\frac{p_{m-1}}{\theta_{m-1}}$ 中的 q_{m-1} 代成 $q_{m-1}+\frac{1}{q_m}$ 就可得到，即

$$\frac{p_m}{\theta_m}=\frac{\left(q_{m-1}+\frac{1}{q_m}\right)p_{m-2}+p_{m-3}}{\left(q_{m-1}+\frac{1}{q_m}\right)\theta_{m-2}+\theta_{m-3}}=\frac{q_m(q_{m-1}p_{m-2}+p_{m-3})+p_{m-2}}{q_m(q_{m-1}\theta_{m-2}+\theta_{m-3})+\theta_{m-2}}$$

$$=\frac{q_mp_{m-1}+p_{m-2}}{q_m\theta_{m-1}+\theta_{m-2}}.$$

据归纳法，⑥成立.

对⑥的第一式的两边分别乘以 θ_{m-1}，第二式两边分别乘以 p_{m-1} 再分别相减，得到

$$p_m\theta_{m-1}-\theta_mp_{m-1}=-(p_{m-1}\theta_{m-2}-\theta_{m-1}p_{m-2})=\cdots=(-1)^m(p_0\theta_{-1}-\theta_0p_{-1})=$$
$$=(-1)^m(q_0\times 0-1\times 1)=(1-1)^{m-1}.$$

也就是　$p_m\theta_{m-1}-\theta_mp_{m-1}=(-1)^{m-1}.$　　⑦

由此得到　$(p_m,\theta_m)=1$，从而 $p_n=a,\ \theta_n=b$.

所以，由⑦$(n=m)$得

$$a\{(-1)^{n-1}\theta_{n-1}\}+b\{(-1)^np_{n-1}\}=1.$$

所以　$u_0=(-1)^{n-1}\theta_{n-1},\ v_0=(-1)^np_{n-1}$ 是一组特解，对 $\theta_{n-1},\ p_{n-1}$ 的计算可用公式⑥.

例　在前例 $83x+24y=1$ 中，由于已得到 $n=3,\ q_0=3,\ q_1=2,\ q_2=5,\ q_3=2$，可直接算出 $p_0=3,\ \theta_0=1;\ p_1=2p_0+1=2\times 3+1=7,\ \theta_1=2\theta_0+0=$ $=2\times 1=2;$

$$p_2=5\times 7+3=38,\ \theta_2=5\times 2+1=11.$$

$\therefore$　$u_0=\theta_2=11,\ u_0=-p_2=-38.$

在一般情形，也就是在①中对 $m>2$ 的情形求解时，都是利用二元情形下的解法来完成的. 即在

$$a_1x_1+\cdots+a_mx_m=c,\ (a_1,\cdots,a_m)=1 \tag{①}$$

中，当$m>2$时，设$(a_2,\cdots,a_m)=b_1$，则可令

$$a_2x_2+\cdots+a_mx_m=b_1u_1.$$

于是①就变成了

$$a_1x_1+b_1u_1=c,\quad (a_1,b_1)=1. \tag{8}$$

并且，可令 $a_k=b_1a_k'(k=2,\cdots,m)$，所以有

$$a_2'x_2+\cdots+a_m'x_m=u_1,\quad (a_2',\cdots,a_m')=1. \tag{9}$$

因此，可根据二元情形的解法来解⑧，然后把u_1代入⑨的右边，这时⑨又成为①形的方程(只是变元的个数少了一个，而右边含了一个参变数)．反复使用上述处理过程，有限次后即可得到所要求的解．

例 $8x+15y+6z=1$.

由于 $(15,6)=3$，若令 $5y+2z=u$，便得$8x+3u=1$，对此求解，有$n=2$，$q_0=2$，$q_1=1$，$q_2=2$；$p_1=3$，$\theta_1=1$， $\therefore x_0=-1$，$u_0=3$；$x=-1-3t$，$u=3+8t$.

于是问题变成求解$5y+2z=3+8t$，首先解$5v+2w=1$，可得到$v_0=-1$，$w_0=3$，于是$y_0=(-1)(3+8t)$，$z_0=3(3+8t)$；$y=-(3+8t)-2s$，$z=3(3+8t)+5s$，

所以通解为 $x=-(1+3t)$，$y=-(3+8t+2s)$，$z=9+24t+5s$.

注意 通解可根据取用参变数的方法不同而具有不同的形式．例如，在上面的通解中，若令$1+t=t'$，$-(4t+s)=s'$，则$t=t'-1$，$s=4-(4t'+s')$，故得通解的另一形式为：

$$x=2-3t',\quad y=-3+2s',\quad z=5+4t'-5s'.$$

§5. 同　余

5·1 同余的基本性质

探讨个别整数的性质的重点之一是考察它与其它整数的整除关系，例如对整数a，求它的约数，作因式分解等都是为了要知道整数a的构造，然而整数a不一定都有约数，求出用不一定为a的约数的整数m来除a后所剩下的余数．也是了解a的性质的一个重要方面，本节将对这方面作进一步的讨论，我们暂且将作为除数的整数m确定，用m去除所有的整数，然后把整数按余数来分类，令余数相等的整数都属于同一类，这就是同余的概念．

用 m 除两个整数 a, a'，当剩余相等时叫做 a 和 a' 关于**模 m 是同余的**，并表成：

$$a \equiv a' \pmod{m}.$$

这时，立刻知道如下关系式是成立的：

(i) $a \equiv a \pmod{m}$；

(ii) 若 $a \equiv a' \pmod{m}$，则 $a' \equiv a \pmod{m}$；

(iii) 若 $a \equiv a'$，$a' \equiv a'' \pmod{m}$，则 $a \equiv a'' \pmod{m}$.　①

一般说来，如果集合 S 的元与元之间有某个关系"～"使得下面的 (R_1)，(R_2)，(R_4) 成立，则这个关系叫做**等价关系**.

(R_1)　$a \sim a$　(自反性)

(R_2)　若 $a \sim b$，$b \sim c$，则 $a \sim c$　(传递性)；

(R_4)　若 $a \sim b$，则 $b \sim a$　(对称性).

这里用对称性 (R_4) 代替了顺序关系 (R_3).

例如，图形的全等"≌"，图形的相似"∽"，直线的平行"∥"等，都是等价关系，并且由上述①很明显，"在整数中，关于模 m 的同余关系也是等价关系."

在集合 S 中若有等价关系～，则可根据这种关系把 S 分成子集，即对 S 的元 a，把满足 $x \sim a$ 的全体 x 组成的集合记成 $\bar{a}$ 叫做含 a 的**类**. 类 $\bar{a}$ 显然是非空的.(因为它至少含有一个元 a). S 就成为这些类的并集. 并且任意两个类或是相同的，或是无交的(没有公共元). 即是说若 $\bar{a} \neq \bar{b}$，则 $\bar{a} \cap \bar{b} = \phi$(空集). 象这样把 S 分类叫做按～分类，对于 z 按模 m 的同余来分类. 将在后面叙.

立刻可以看出，$a \equiv a' \pmod{m}$ 与如下的 (a)，(b)，(c) 中的任何一个关系式都是等价的.

(a)　$a - a' \equiv 0 \pmod{m}$；

(b)　$m \mid a - a'$；

(c)　$a = a' + mt$.

还有，数的运算和同余关系之间有如下的法则成立.(下面约定，对于模相同的几个同余式，只是总的在它们后面加上记号 $(\mathrm{mod}\ m)$).

【定理】1. (i) 若 $a \equiv a'$，$b \equiv b' \pmod{m}$，则 $a + b \equiv a' + b'$，$a - b \equiv a' - b'$，$ab \equiv a'b' \pmod{m}$.

(ii) 若 $a \equiv a' \pmod{m}$，则对任意的 c，有 $ca \equiv ca' \pmod{m}$.

证明简单，故从略.

该定理表明对模相同的同余式，其加，减，乘的运算与等式的运算一样地成立．由此看出，移项是允许的，也就是说，若 $a+b\equiv c(\mathrm{mod}.\ m,$ 则有 $a\equiv c-b(\mathrm{mod}\ m)$，同时，从有限个同余式 $a_k\equiv a_k^1(\mathrm{mod}\ m)$，$k=1,2,\cdots,n$，可有 $\sum_{k=1}^{n}a_k\equiv\sum_{k=1}^{n}a_k^1$，$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}a_k^1(\mathrm{mo\ d}m)$成立，也是因为这点，下面的系显然成立．

【系】 (*i*)若 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$，则 $a^k\equiv a'^k(\mathrm{mod}\ m)$．

(*ii*)设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 是整系数的整式 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$则 $f(a)\equiv f(a')\quad(\mathrm{mod}\ m)$．

以上是与等式相同的法则，但【定理】1 (*ii*) 之逆命题：若 $ca\equiv ca'(\mathrm{mod\ m})$，$C\not\equiv o\ (\mathrm{mod\ m})$，则 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$不是无条件可以得出的，对于这点，我们有

【定理】 2．(i)若 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$，$m_0|m$，则 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$．

(ii)若 $ca\equiv ca'(\mathrm{mod\ m})$，$c|m$，设 $m=cm_0$，则有 $a\equiv a'\ (\mathrm{mod}\ m_0)$．

(iii)若$ca\equiv ca'(\mathrm{mod}\ m)$，$(c\cdot m)=d$，$m=dm_0$，则 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$．

特别地，当$d=1$ 时，就回到了 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m_0)$．

证明　每一个的证明都很简单．例如对于(iii)，由 $c(a-a')=mt$ 和 $c=dc_0$，$m=dm_0$，$(c_0,\ m_0)=1$ 有 $dc_0(a-a')=dm_0t$，不言而喻，$d\neq o$，于是$c_0(a-a')=m_0t$，因为 $m_0|c_0(a-a')$，$(c_0,m_0)=1$ 所以 $m_0|(a-a')$．

从而，下面的定理也是明显的．

【定理】3．(i)若 $a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m)$，则$(a,m)=(a',m)$．

(ii)若 $a=a'(\mathrm{mod}\ m_1)$，$a\equiv a'(\mathrm{mod}\ m_2)$，最小公倍数 $[m_1,m_2]=m$．则$a=a'(\mathrm{mod} m)$

5·2　同余类．剩余系

我们把整数的全体 Z按模 m 的同余性来分组，这样的每个组是用 m 来除后余数相同的整数的全体，从而可以有 m 个组，把这样的组叫做模 m的**同余类**(或简称为**类**)，因而余数(剩余)的概念在这里得到了扩张，从一个类的整数中任取一个整数，称这个整数为它所属类的所有整数关于模m的剩余，于是，从每一类中取出一个整数构成的集合 $\{a_0,a_1\cdots,a_{m-1}\}$ 叫做模 m 的**完全剩余系**，其中有 $a_k\equiv k(\mathrm{mod}\ m)$．$k=0,\ 1,\cdots,m-1$，特别地，$\{0,1,\cdots,m-1\}$ 也是一个完全剩余系，叫做(**非负**)**最小剩余系**，同时，m 是奇数时的$\left\{0,\pm1,\pm2,\cdots\pm\frac{m-1}{2}\right\}$和 m 是偶数时的$\{0,\ \pm1,$

$\pm 2, \cdots, \pm\left(\frac{m}{2}-1\right)\}, \left\{\frac{m}{2}\right\}$，(或者将其中$\frac{m}{2}$换成$-\frac{m}{2}$也可)这些也是剩余系，叫做**绝对最小剩余系**.

由于最小剩余为 0 的这个类是 m 的全体倍数.它是由 m 生成的理想，$A=(m)$，同时，把剩余为 a 的类(含 a 的类)用 $A+a$ 来表示，这时【定理】1(i)在这里就意味着，$A+a$ 类的任意整数与 $A+b$ 类的任意整数的和属于 $A+(a+b)$ 类，差属于 $A+(a-b)$ 类，积属于 $A+ab$ 类．例如 $m=7$ 时，象第一表，有 7 个同余类，属于 $A+3$ 类的任意数与属于 $A+4$ 类的任意数之和

A	$A+1$	$A+2$	$A+3$	$A+4$	$A+5$	$A+6$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−14	−13	−12	−11	−10	−9	−8
−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1
0	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

第一表　$m=7$

属于 $A+(3+4)=A+7=A$ 类、差属于 $A+(3-4)=A+(-1)=A+6$ 类，积属于 $A+3\times4=A+12=A+5$ 类.

现在我们把类本身作为个体(对象)来考虑，即考察以 m 个类 $A, A+1, \cdots, A+(m-1)$ 为元素的集合，用 Z/A 或 $Z/(m)$ 来表示它，这是个有限集合(元的个数为 m)，而且可以自然地在 Z/A 的元之间定义加，减，乘运算．即是说，当定义 $A+a$ 及 $A+b$ 的和是 $A+(a+b)$，差是 $A+(a-b)$，积是 $A+ab$ 时，它们与剩余 a、b 等的选取无关，从而(和、差，积)是确定的，即若 $A+a=A+a'$，$A+b=A+b'$，则 $A+(a+b)=A+(a'+b')$，$A+(a-b)=A+(a'-b')$，$A+ab=A+a'b'$(这是【定理】16(i)的另一种表示)．对于按这种方式定义的运算，Z/A 的元之间几乎可以象数一样进行计算.

以下为了简便，把 Z/A 的元 $A+x$ 表成 x．这时，$\bar{x}=\bar{x}'$ 和 $x\equiv x'$ 是等

价的，并且有 $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}$, $\bar{x}-\bar{y}=\overline{x-y}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}=\overline{x\cdot y}$. 例如 $m=7$ 时（前面讲过的例子）有 $z(7)=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6}\}$，且有 $\bar{3}+\bar{4}=\bar{0}$, $\bar{3}-\bar{4}=\bar{6}$, $\bar{3}\cdot\bar{5}=\bar{5}$ 因此有 $3+4\equiv 0$, $3-4\equiv 6$, $3\cdot 4\equiv 5 \pmod 7$，这是很明显的事实．在这个例中，由第二表，第三表，也就可以看出类与类的运算（等于同余式的运算）方式．这里的加法，乘法与数一样服从结合律、交换律、分配律，并且 $\bar{0}$, $\bar{1}$ 在 $\{\bar{x}\}$ 的作用和 0, 1 在 $\{x\}$ 中的作用一样，即有 $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$, $\bar{x}\cdot\bar{0}=\bar{0}$, $\bar{x}\cdot\bar{1}=\bar{x}$. 所以 $\bar{x}$ 对于加法具有逆元 $(\bar{x}+\overline{-x}=\bar{0})$. 从而 "$Z/(m)$ 构成可换环."

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$

第二表　加法表 $(m=7)$

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

第三表　乘法表 $(m=7)$

但是，也有不同于数的运算的性质、例如，在 $m=6$ 的情形(见第四表)有 $\bar{3}\cdot\bar{4}=\bar{0}$，及 $\bar{3}\neq\bar{0}$，$\bar{4}\neq\bar{0}$(这种情形下，$\bar{2},\bar{3},\bar{4}$ 是零因子)．同时，在 $\bar{3}\cdot\bar{5}=\bar{3}\cdot\bar{3}$ 中，虽有 $\bar{3}\neq\bar{0}$，但 $\bar{5}\neq\bar{3}$．然而，在 $m=7$ 时(第三表)却没有这样的情形，在 $m=7$ 时，若 $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}$，则 $\bar{a}=\bar{0}$ 或 $\bar{b}=\bar{0}$，若 $\bar{a}\bar{b}=\bar{a}\bar{c}$，$\bar{a}\neq\bar{0}$，

	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

第四表　乘法表($m=6$)

则 $\bar{b}=\bar{c}$ 成立，不仅如此，若 $\bar{a}\neq\bar{0}$，则满足 $\bar{a}\cdot\bar{x}=\bar{1}$ 的 $\bar{x}$ 存在，即是说，$\bar{a}$ 的逆元素存在(亦即 $Z/(7)$ 构成域)．若把 $\bar{a}$ 的逆元写作 $(\bar{a})^{-1}$，因 $\bar{3}\cdot\bar{5}=\bar{1}$，于是有 $(\bar{3})^{-1}=\bar{5}$，$(\bar{5})^{-1}=\bar{3}$．但是所有这些只不过是整数同余问题的另一种表示而已．下面就是从 $Z/(m)$ 的表述方法返回去对 $\mathbf{z}$ 中的同余关系进行描述．

5·3　欧拉函数

据【定理】3．(i)，若一个类含有一个与模 m 互素的数则其中所有的数都与 m 互素．从而与 m 互素的类是确定的，这些(与 m 互素的)类叫做**缩剩余类**(或既约剩余类)．并且由这些类作出的剩余系叫做**缩剩余类**．)或既约剩余系)．他们一般是从非负最小剩余系中选出来的．缩剩余系的元的个数表作 $\varphi(m)$，它是 m 的函数，叫做**欧拉函数**，例如，当 $m=14$ 时，缩剩余系是 $\{1,3,5,9,11,13\}$，$\varphi(14)=6$.

对于 $\varphi(m)$，有下面的性质，

引理1．若 $(h,l)=1$，则 $\varphi(hl)=\varphi(h)\varphi(l)$．

证明　设 mod $m(m=hl)$，mod h，mod l 的缩剩余系分别为

$A=\{a_1a_2,\cdots,a_{\varphi(m)}\}$，$B=\{b_1,\cdots,b_{\varphi(h)}\}$　$C=\{a_1,\cdots,c_{\varphi(l)}\}$．首先证明如下的①、②、③是成立的，

①，对于A中的任意数(剩余)a，有确定的$b\in B$，$c\in C$，使得$a\equiv b\pmod h$，$a\equiv c\pmod l$．成立．

②，反之，对任意的$b\in B$，$c\in C$，有$a\in A$存在，使得$a\equiv b\pmod h$，$a\equiv c\pmod l$成立．

③，②中的a是由b，c唯一确定的．

事实上，①若$(a,hl)=1$，则因$(a,h)=1$，于是a与B的任意数$\bmod h$同余，故存在$b\in B$，使得$a\equiv b\pmod h$．对于C也一样．

②因$(h,l)=1$，于是对$b\in B$，$c\in C$，一次不定方程式$hx+ly=c-b$有解，设其一组解为(x_0,y_0)，则有$b+hx_0=c-ly_0$．令$a^*=b+hx_0=c-ly_0$，则$a^*\equiv b\pmod h$，$a^*\equiv c\pmod l$，又因$(a^*,h)=(a^*,l)=1$，于是据§3【定理】9的[系]，有$(a^*,hl)=1$，所以a^*与A的某个数同余：$a^*\equiv a\pmod{hl}$．$a\in A$．换言之，有$a\equiv b\pmod h$，$a\equiv c\pmod l$．

③设a，$a'\in A$，若$a\equiv b\equiv a'\pmod h$，$a\equiv c\equiv a'\pmod l$，由【定理】3(ii)得$a\equiv a'\pmod{hl}$，但是$a$，$a'\in A$，于是$a=a'$．

所以，由①，②，③，A的元a与B，C的元组(b,c)成一一对应关系，由于b的取法有$\varphi(h)$种，C的取法有$\varphi(l)$种，故a的取法$\varphi(hl)$等于$\varphi(h)\cdot\varphi(l)$种．

【定理】 4．(i)若p是素数，则$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^{\alpha-1}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$；

(ii)若$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则$\varphi(m)=m\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)$．

证明　(i)由于模p^α的完全剩余系的元的个数是p^α，其中为p的倍数的元有$p^{\alpha-1}$个，剩下的是与p^α互素的数，于是上述表达式成立．

(ii)据引理1，有$\varphi(m)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\varphi(p_2^{\alpha_2})\varphi(p_k^{\alpha_k})$．在右边的各个因子中，利用(i)结果即得证．□

特别的，对素数p，有$\varphi(p)=p-1$。例如有

$$\varphi(7)=6,\varphi(12)=\varphi(2^2)\,\varphi(3)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4.$$

$$\varphi(14)=14\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=6.\text{等}.$$

引理2　设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(m)}\}$是模$m$的缩剩余系，若$(a,m)=1$，则

(i)对任意$a_i\in A$，有$a_k\in A$使得$a\cdot a_i\equiv a_k\pmod m$成立

(ii) 若 $aa_i \equiv aa_j \pmod m$，则 $a_i \equiv a_j \pmod m$（从而 $a_i = a_j$）.

(iii) $A' = \{aa_1, aa_2, \cdots aa_{\varphi(m)}\}$ 也是缩剩余系.

(iv) 对任意的 $a_k \in A$，有 x 使得 $a \cdot x \equiv a_k \pmod m$ 成立，并且可取为 $x = a_i$.

证明 (i)由于 $(a, m) = (a_i, m) = 1$，所以 $(aa_i, m) = 1$，即 aa_i 与某个 a_k 同余.

(ii) 由 $aa_i \equiv aa_j \pmod m$，$(a, m) = 1$，于是据【定理】2 (iii)，得 $a_i \equiv a_j \pmod m$.

(iii) $aa_1, aa_2, \cdots, aa_{\varphi(m)}$ 全都与 m 互素，且是相异的，对各个取缩剩余系，然后从各个缩剩余类中各取出一个数即可构成所要的缩剩余系.

(iv) 因为 A 的数与每一个 A' 的数关于模 m 是同余的，所以对 $a_k \in A'$ 存在 a_i 使 $aa_i = a_k \pmod m$ 成立. □

【定理】5.（一般的费马定理），或（欧拉定理）

若 $(a, m) = 1$，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

证明 由引理 2，有 $aa_1 \equiv a_{k1}$，$aa_2 \equiv a_{k2}, \cdots\cdots aa_{\varphi(m)} \equiv a_{k\varphi(m)} \pmod m$.

$\therefore a^{\varphi(m)}$、$a_1a_2 \cdots a_{\varphi(m)} \equiv a_{k1}a_{k2} \cdots a_{k\varphi(m)} = a_1a_2 \cdots a_{\varphi(m)} \pmod m$.

又 $\because (a_1a_2 \cdots a_{\varphi(m)}, m) = 1$，于是 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$. □

【系】 1.（费马定理）

p 是素数时，有

(i)若 $p \nmid a$，则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$；

(ii)对任意的 a，有 $a^p \equiv a \pmod p$.

证明 (i). 属【定理】5 的特例.

(ii). 当 $p \nmid a$ 时，由(i)即得，当 $p \mid a$ 时，由于 $a^p \equiv 0 \equiv a \pmod p$，(ii) 成立. □

【系】2. (i)若 $(a, m) = 1$，则存在 c 满足 $ac \equiv 1 \pmod m$；(ii) 若 $(a, m) = 1$，则对任意的 b，存在 c，满足 $ac \equiv b \pmod m$.

证明 对(i)只要取 $c = a^{\varphi(m)-1}$ 即得.

对(ii)只要取 $c = a^{\varphi(m)-1}b$ 即得. □

5·4 群

一般说来，在一个集合 S 中，有一种运算或者有两种（乃至两种以上的）运算，其中具有一种运算的集合，是我们本节要着重考虑的情形，不过，这里的运算并不是一般意义下的加法或乘法，说成加法或乘法那只是一种表示而已. 例如，对乘法形式的运算，当下列的法则 (M_0)，(M_1)，

(M_3)，(M_4)成立时，S叫做**群**．

(M_0)　若 a，$b \in S$，则 $ab \in S$；

(M_1)　$(ab)c=a(bc)$；

(M_3)　对任意的 a，存在元 1，使得 $a\cdot 1=1\cdot a=a$ 成立；

(M_4)　对任意的 a，存在 a'，使得 $aa'=a'a=1$．

这时，1 叫做**单位元**；a' 叫做 a **的逆元**，常用 a^{-1} 表示．

在群 S中，如果还满足$(M_2)ab=ba$，则 S 叫做**阿贝尔群**或 **可换群**．

对于加法形式的运算，若满足(A_0)，设 $a\cdot b \in S$，则 $a+b \in S$．(A_1) $(a+b)+c=a+(b+c)$，$(A_2)a+b=b+a$，(A_3)对任意的 a，存在 o 元素，使得 $a+o=o+a=a$，成立，(A_4)对任意的 a，存在 a'，使得 $a+a'=a'+a=o$ 成立(这里常表 a' 为 $-a$)．这时，S叫做阿贝尔群．

z 对加法是阿贝尔群，更一般的，环是对加法的阿贝尔群．0 以外的有理数全体 Q^*对一般的乘法构成阿贝尔群．(但 Q^*)对加法不构成阿贝尔群)．另外，含有 0 的有理数的全体Q(有理数域对加法构成阿贝尔群，对乘法不构成阿贝尔群(因为没有 0 的逆元)．

群的元素个数有限时，叫做**有限群**，它的元素的个数叫做有限群的**阶**．同时，把含有无限多个元素的群叫做**无限群**．当群S 的子集合 T(对于与 S 相同的运算)也构成群时，称 T 为 S 的**子群**．群 S 是乘法群时，把 S的元 a 的 n 重积(n 是正整数)$a,a\cdots a$ 表作 a^n，并设 $a^1=a$，$a^0=1$．同时，对负整数 n，令 $|n|=k$，则把 a^{-1} 的 k 重积$(a^{-1})^k$ 作为 a^n．于是对全部整数 n，a^n 都有定义了，这时，$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$ 成立，a 的幂的全体$\{\cdots\cdots,\ a^{-2},\ a^{-1},\ 1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots\}$是 S的子群，用$[a]$表示它．特别的，$S=[a]$时，S 叫**循环解**，a 叫它**生成元**．在$[a]$中的 a 的幂中，如果 $m \neq n$，但 $a^m=a^n$．则$[a]$的相异元只有有限个．$[a]=\{1, a, a^2, \cdots, a^{l-1}\}$，而且有 $a^l=1$(叫做 l 阶的有限循环群)．若 $m \neq n$ $a^m \neq a^n$，那末$[a]$是无限循环群．一般的(S不是循环群时也一样)，把$[a]$的阶数叫做**元 a 的阶数**

如果把以上所述用加法来讲，那末把加法群S 的 n 个元 a 的和 $a+a+\cdots+a$ 表作 na，设 $1\cdot a=a$，$0\cdot a=0$．同时，对负整数 n，$|n|=h$ 时，$(-a)$的 h 个的和 $h(-a)$设为 na，于是对全部整数 n,na 被定义了，这时 $ma+na=(m+n)a$，$n(ma)=n\cdot nma$ 成立．$[a]$是 a 的倍元的全体$\{\cdots,(-2)a,\ -a,\ o,\ a,\ 2a,\ \cdots\}$，如果是 l 阶有循环群．则 $l\cdot a=0$．循环群是阿贝尔群，而阿贝尔群不一定是循环群．z 对于加法是循环群，Q 不是循环群．

有两个群S，S'，由 S到S'的映射 φ满足下面条件(H)时，φ 叫做 S到

S'的同态映射.

(H)对S的任意二元x, y, 有

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y).$$

特别地，设φ是一一映射，即$x\neq y$时，$\varphi(x)\neq\varphi(y)$，且$\varphi(S)=S'$，这时φ叫做**同构映射**. 若有S到S'的同构映射(至少一个)，则S和S'叫做是**同构**的，表作$S\cong S'$，这时S和S'作为群其构造是完全相同的

如果使用上述群的术语便可以把前述引理及系2表述如下.

当把z/(m)中的缩剩余类的全体表成(z/(m)) 时，有

"$(z/(m))^{\times}$对于乘法构成有限阿贝尔群".

特别的，$m=p$(素数)时，在$Z/(p)$的元中除去σ后就是$(Z/(p))^{\times}$的元，从而$Z/(p)$中的元除σ以外，关于乘法具有逆元，另一方面，由于$Z(p)$也是环，所以"$Z/(p)$构成域". 当$p=7$时，就是前面已经讲过的情形.

注意 作为上述事实的应用，若能对(1°)循环小数的性质，(2°)$^{\times}$1的n次方根的性质作作考查倒是有意义的，而且也是有趣味的事情，特别是(2°)，它在整数论中具有重要的意义，但在这里我们从略.

§6. 原根和指数

6·1 原　根

我们看出，前节的后半部分好象不全是由整数论出发而得到的，但限于篇幅，以下的证明(除去十分简单的情形)就只好给予省略了.

从模m的缩剩余系$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}\}$中取出一数$a_i$，为简便起见，就记成$a$，由于它的幂

$$1, a, a^2, \cdots, a^n, \cdots \qquad ①$$

全都与m互素，所以与A的某些数同余同时，由费马定理，有$a^{\varphi(m)}\equiv1 \pmod m$，把满足$a^k\equiv1 \pmod m$的最小正整数$k$叫做$a$**关于模m的阶数**(或幂数)，用$e$表示，即是说有$a^e\equiv1 \pmod m$若$0<j<e$，则$a^j\not\equiv1 \pmod m$，这时有

【定理】1. e是$\varphi(m)$的约数.

证明 设$\varphi(m)=e\cdot q+\bar{r}$, $0\leqslant r<e$则，

$$1\equiv a^{\varphi(m)}=(a^e)^q.a^r\equiv1\cdot a^r=a^r \pmod m.$$

若$0<r<e$，则产生矛盾，所以$\bar{r}=0$，即$e|\varphi(m)$. □

这时，$B=\{1, a, a^2, \cdots, a^{e-1}\}$的元相互不同余. 而$a^e$, a^{e+1}, …,

a^n，…，全部与它们是同余的，特别是，$e=\varphi(m)$时，B成为缩剩余系，这时缩剩余系$\{1, a, a^2, \cdots, a^{\varphi(m)-1}\}$是由$a$生成的，这样的$a$叫做**关于模m的原根**．例如，$m=7$时，$\varphi(m)=6$，$a=2$的幂是1，$2$，$a^2=4$，$a^3=8\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$，由于$e=3\neq\varphi(m)$，所以$a=2$不是原根，其次，$a=3$的幂为$1, 3, 3^2=9\equiv2, 3^3\equiv6, 3^4\equiv4, 3^5\equiv5$，$3^6\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$于是$e=6=\varphi(m)$，所以$a=3$是对于模7的原根．

【定理】2．当对于模m的原根存在时，原根的个数为$\varphi(\varphi(m))$，即是说，取一个原根为g，设关于模$\varphi(m)$的缩剩余系为$\{r_1=1, r_2, \cdots, r_k\}$，$k=\varphi(\varphi(m))$，则$\{g, g^{r_2}, \cdots, g^{r_k}\}$是全体原根．

例如$m=7$时，$\varphi(\varphi(7))=\varphi(6)=2$，关于模6的缩剩余系为$\{1, 5\}$，因$g=3$，故原根是3和$3^5\equiv5$两个．

注意 对任意的m，原根不一定存在，例如，$m=15$时，$\varphi(15)=8$，缩剩余系$\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$的各个数的阶$e$分别为1，4，2，4，4，2，4，2．没有阶数为8者，所以$m=15$的原根不存在．

【定理】3．$m>1$时，关于模m有原根存在的充分必要条件是$m=2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$，这里$p$是奇素数．

6·2 指 数

以下考虑m是素数p的情形，这时必存在原根g，$g^{p-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$，$\{1, g, g^2, \cdots, g^{p-2}\}$是一个缩剩余系，从而它全部与$\{1, 2, \cdots, p-1\}$中各数是同余的．(例如对$p=7, g=5$，第五表上栏两行是同余的)．

g^i	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5
a	1	5	4	6	2	3
a	1	2	3	4	5	6
g	1	5^4	5^5	5^2	5	5^3
a	1	2	3	4	5	6
i	0	4	5	2	1	3

第五表 $p=7, g=5, i=\mathrm{Ind}a$

这就意味着，可以用g的幂来表示$\{1, 2, \cdots, p-1\}$的各数，若$p\nmid a$，则有$a=g^i$（见上例第五表的中栏），当原根g确定时，从a可定出g^i从而从a可定出i，这个i叫做a关于模p的指数，记为$\mathrm{Ind}\ a$．(例如，第五表的下栏)，这个指数与对数服从同样的法则．

【定理】4．$\mathrm{Ind}(ab)\equiv\mathrm{Ind}\ a+\mathrm{Ind} b(\mathrm{mod}\ p-1)$，

$\mathrm{Ind}(a^n)\equiv n\ \mathrm{Ind}\ a \quad (\mathrm{mod}\ p-1)$．

从而，同余式的积的计算化为对它的"Ind"的和的计算，与对数一样地得到了简化．例如，对$3^5.4^3$作mod 7的计算，使用第五表的下栏有

$\mathrm{Ind}(3^5.4^3)=5\mathrm{Ind}3+3\mathrm{Ind}4=5\times5+3\times2=31\equiv1(\mathrm{mod}\ 6)$．另一方

面，因为 Ind5＝1，所以有 $3^5.4^3\equiv5(\mathrm{mod}\ 7)$.

用与 m 互素的任意整数 x 作成一个非零复数的函数 $\chi(x)$，当如下的条件(Ⅰ)，(Ⅱ)满足时，把它叫做关于模 m 的**特征**.

(Ⅰ)若 $x\equiv x'(\mathrm{mod}\ m)$，则 $\chi(x)=\chi(x')$；

(Ⅱ) $\chi(xy)=\chi(y).x(y)$

这时立刻看出，有 $\chi(1)=1$，又设 $\chi(x)=\omega$，由于 $x^{\varphi(m)}\equiv1(\mathrm{mod} m)$，所以 $\omega^{\varphi(m)}=(\chi(x))^{\varphi(m)}=\chi(\chi^{\varphi(m)})=\chi(1)=1$. 所以 ω 是 1 的 $\varphi(m)$次方根，特别地，$m=p$ 是奇素数时，取一个原根 g，设 $\chi(g)=\zeta$，由于与 p 互素的x与 g的某个幂 g^k 同余，所以 $\chi(x)=\chi(g^k)=\zeta^k$，也就是说，如果确定了 ζ，x 也就随之而定了. 由于 1 的 $p-1$ 次方根 ζ 有 $p-1$个，故特征也恰有 $p-1$个.

特别地，对满足 $x(g)=-1$ 的特征，不用 $\chi(x)$而用$\left(\frac{x}{p}\right)$表示，这叫做**勒让德符号**. 它的确定是与原根 g 的取法无关的. 这时，显然有

【定理】5. 当g是关于模p的原根时，若 $\chi\equiv g^k(\mathrm{mod}\ p)$则 有$\left(\frac{x}{p}\right)=(-1)^k$.

也就是说. $\left(\frac{x}{p}\right)=(-1)^{\mathrm{Ind}x}$

象前节末所谈的那样，缩剩余系的全体$(Z/(m)\chi$对于乘法构成阿贝尔群，迄今讲到的好多东西，用群论的术语，将得到简单而明了的表示. 如

(1°)$(Z/(m))^\times$ 是关于乘法的阶数 $\varphi(m)$的阿贝尔群.

(2°)有原根 g 的情况，$(Z/(m))^\times_m$是循环群，$\bar{g}$ 是它的生成元.

(3°)这里所说的特征就是群论中阿贝尔群的特征，即是说，它是由阿贝尔群$(Z/(m))^\times$到$C^\times$ 中的同态映射.

§ 7. 同余方程

7·1 同余方程

设有整系数的**整式** $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ 和 $h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_lx^l(n\leqslant l)$. 现在来考察 $g(x)$与 $h(x)$ 关于 m 的同余式 $g(x)\equiv h(x)(\mathrm{mod}\ m)$. 若设

$$f(x)=g(x)-h(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_lx^l.$$

则上述同余式与 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\ m)$等价，我们对这个同余式考察如下的三种情形。

(1°) $b_k \equiv c_k \pmod m$，($a_k \equiv 0 \pmod m$, $k=0,1,\cdots,l$ 的情形. 这时 $g(x)$ 与 $h(x)$ 为**取式同余**($f(x)$ 与 0 取式同余)的情形；

(2°) $g(x)$ 与 $h(x)$ 不是取式同余($f(x)$ 与 0 不取式同余)而**对全体整数 a 同余式**：$g(a) \equiv h(a) \pmod m$. $f(a) \equiv o \pmod m$)成立的情形；

(3°) 上述(1°)、(2°)皆不成立时，考虑对 $g(x)$, $h(x)$, ($f(x)$)存在**整数 x**，使得

$$g(x) \equiv h(x) \pmod m \quad (f(x) \equiv o \pmod m)$$满足的情形.

在情形(2°)，例如模是素数 p 时，$f(x)=x^p-x$ 在(1°)的意义下与 0 不同余，但是据费马定理，对全体整数 a，$f(a)=a^p-a \equiv o \pmod p$ 是成立的。

【**定理**】1. 对于素数 p，整式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_lx^l$ 关于模 p 与 0 不同余，但对多于 l 个的数 a，若有 $f(a) \equiv 0 \pmod p$，则在取式同余(1°)的意义下) $f(x) \equiv 0 \pmod p$.

【**系**】(威尔森定理) 有 $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$

在 $p=2$ 时这是明显的，当 $p>2$ 时

$$f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-\overline{p-1})-(x^{p-1}-1)$$

的次数小于 $p-1$，而且对 $p-1$ 个不同余的数 $1,2,\cdots,p-1$，f 与 0 同余，因此有取式同余 $f(x) \equiv o \pmod p$ 特别地，当 $x=0$ 时，有

$$f(0)=(-1)^{p-1}(p-1)!-(-1) \equiv o \pmod p.$$

在(3°)的情形是**同余方程**. 当

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_n \not\equiv o \pmod m$ 时，作

$$f(x) \equiv 0 \pmod p \qquad ①$$

这时把①叫做关于 x 的 **n 次同余方程**.(在不至产生误解的时候，可以简单地叫做**同余式**)

设①有解 u，则满足 $u' \equiv u \pmod m$ 的任意的 u' 也是①的解. 把彼此同余的解看成一个解，而当 $v \not\equiv u \pmod m$，但 $f(v) \equiv f(u) \equiv o \pmod m$ 时，把 u 和 v 叫做①的**相异解**.

7·2 一次同余式

首先考察一次同余式 $ax \equiv b \pmod m$. ②

【**定理**】2. 当 $(a,m)=d$ 时，要使②有解，其充要条件是 $d \mid b$. 而当这个条件成立时，②具有 d 个模 m 相异解.

当 $m=dm_0$ 时，该定理的后半部可以说成②具有关于模 m_0 的一个解.

【**系**】若 $(a,m)=1$，则对任意的 b，②有解，并且只有一个解.

解法1. 当$(a,m)=1$时，若a关于模m的阶数是e，则$x\equiv a^{e-1}b \pmod m$是解，实际上，有$a(a^{e-1}b)=a^e b\equiv b \pmod m$，所以有解.

例 解$2x\equiv 5 \pmod 7$，这里$m=7$，$a=2$，$b=5$，由于$(a,m)=1$，$a^2=4$，$a^3=8\equiv 1 \pmod 7$. 因此$e=3$，$x\equiv 2^2\cdot 5\equiv 6 \pmod 7$是解.

解法2. 当$m=p$(素数)时，利用取指数的方法解$\mathrm{Ind}\, a+\mathrm{Ind}\, x=\mathrm{Ind}\, b \pmod{p-1}$即可.

在上例中，有$\mathrm{Ind}2+\mathrm{Ind}\, x\equiv \mathrm{Ind}\, 5 \pmod 6$，据第五表得
$4+\mathrm{Ind}\, x1\equiv 1 \pmod 6$,

∴ 由$\mathrm{Ind}\, x\equiv 3 \pmod 6$有$x\equiv 6 \pmod 7$.

解法 3. $ax\equiv b \pmod m$是与满足$b-ax=my$的y存在性等价的，也就是说，只要解$ax+my=b$就够了，这可用§4.2的方法求解，然后取其中的x就是我们要求的解.

在上例中，可直接看出$2u+7v=1$的一个特解是$u_0=-3, v_0=1$，所以$2x+7y=5$的特解是$x_0=-15$，$y_0=5$. 因而$2x\equiv 5 \pmod 7$的解是$x\equiv -15\equiv 6 \pmod 7$.

注意1. 相反地，在解二元一次不定方程$ax+my=b$时，可以先用上述的解法1或2，解出$ax\equiv b \pmod m$，然后把x代进去求出y.

注意 2. $(a,m)=d$，$d|b$时，设$a=a_0\cdot d$，$m=m_0 d$，$b=b_0 d$，则可以先用上述方法解$a_0x\equiv b_0 \pmod{m_0}$ $(a_0, m_0)=1$. 其解关于$\bmod m_0$是唯一的，而关于$\bmod m$则有d个.

从以上看出，二元一次不定方程式与一元一次同余式从本质上讲是等价的.

对于一次联立同余式组有

【定理】3. m_1，m_2，…，m_k中两两互素，且设.

$$M_i=m_1\cdots m_{i-1}\cdot m_{i+1}\cdots m_k (i=1,2,\cdots,k),$$

由于M_i与m_i互素，所以满足$M_iM_i'\equiv 1 \pmod{m_i}$的$M_i'$是确定的，这时联立同余式组

$$\begin{cases} x\equiv b_1 & (\bmod m_1), \\ x\equiv b_2 & (\bmod m_2), \\ \quad\vdots & \\ x\equiv b_k & (\bmod m_k) \end{cases}$$

的解关于模　$M=m_1m_2\cdots m_k$唯一存在，且为

$$x\equiv M_1M_1'b_1+M_2M_2'b_2+\cdots+M_kM_k'b_k \quad (\bmod M).$$

例 解联立同余式组 $\begin{cases} x\equiv b_1 & (\text{mod } 3), \\ x\equiv b_2 & (\text{mod } 4), \\ x\equiv b_3 & (\text{mod } 5). \end{cases}$

解 由于这里 $M_1=20$，$M_2=15$, $M_3=12$, $20\times 2\equiv 1(\text{mod } 3)$, $15\times 3\equiv 1(\text{mod } 4)$，$12\times 3\equiv 1(\text{mod } 5)$，所以解为

$$x\equiv 40b_1+45b_2+36b_3 \quad (\text{mod } 60).$$

特别地，$b_1=2$，$b_2=3$，$b_3=1$ 时，有 $x\equiv 40\times 2+45\times 3+36\times 1\equiv 11$ $(\text{mod } 60)$.

7·3 二次同余式与平方剩余

二次同余式 $ax^2+bx+c\equiv 0\ (\text{mod } m)$，当 $(2a,\ m)=1$ 时，与 $(2ax+b)^2\equiv b^2-4ac\ (\text{mod } m)$等价，所以对于 $D=b^2-4ac$，设 $z^2\equiv D$ $(\text{mod } m)$有解 z_0，则解出一次同余式 $2ax+b\equiv z_0(\text{mod } m)$，此 x 就是所要求的解.

一般的，二项同余式 $x^n\equiv a(\text{mod } m)$　　①

不一定有解，在有解时，a 叫做 **n 次剩余**. 在无解时，a 叫做 **n次非剩余**. 特别地，当 $n=2$ 时，分别把 a 叫做**平方剩余，平方非剩余**.

【定理】4. p 是素数，当 $p\nmid a$ 时，关于模 p，a 是 n 幂剩余的充要条件是 $a^f\equiv 1(\text{mod } p)$成立，这里 $f=\dfrac{p-1}{(n,p-1)}$.

【系】 p 是奇素数时，关于模 p，a 为平方剩余的条件是 $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1$ $(\text{mod } p)$.

以下就平方剩余来讲讲. 先考虑以奇素数 p 为模的情形，设关于模的原根为 g，在 $p\nmid a$ 时，有表达式 $a\equiv g^k(\text{mod } p)$，设同余式

$$x^2\equiv a(\text{mod } p) \qquad ②$$

有解 x_0，则可写作 $x_0\equiv g^j\ (\text{mod } p)$所以有 $g^{2j}\equiv g^k(\text{mod } p)$，即必须 $aj\equiv k$ $(\text{mod } p-1)$，由于 $p-1$ 是偶数，所以 k 也是偶数，因此 $k=2k_0$、反之，当 $k=2k_0$ 时，由于 $a\equiv g^{2k_0}(\text{mod } p)$，所以②具有形如 $x_0\equiv g^{k_0}(\text{mod } p)$的解. 在模 p 的缩剩余系$\{1,g,g^2,\cdots,g^{k-2}\}$中，由于有一半是 g 的偶次幂，所以平方剩余与平方非剩余各占$\dfrac{p-1}{2}$个，由以上的事实. 立刻得出下述定理.

【定理】5. $p\nmid a$ 时，a 为平方剩余还是平方非剩余，取决于$\left(\dfrac{a}{p}\right)=+1$ 或

者是-1.

注意 这个定理的结果可用来定义勒让德符号$\left(\frac{a}{p}\right)$这样．要计算$\left(\frac{a}{p}\right)$只要看a是否为平方剩余就行了．

【定理】6. (i) 若$a\equiv a'\pmod p$，则$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a'}{p}\right)$；

(ii) $\left(\frac{a\cdot b}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$；

(iii) (欧拉准则) $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\pmod p$.

【定理】7（平方剩余的互倒法则） 设p，q是相异的奇素数，则

(i) $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ (互倒法则)

(ii) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$(第一补充法则)；

(iii) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ (第二补充法则)

互倒法则(i)有深刻的内容，十九世纪初高斯首先给出它的证明，并且一共给出了七种本质上不同的证明，后来又出现了多种证明，其中最初等的证明方法在一般的整数论书籍上都有，当p，q中至少有一个$\equiv 1\pmod 4$时，即至少有一个形如$4k+1$时，定理的(i)成为$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$当$p\equiv q\equiv 3\pmod 4$时，(i)成为$\left(\frac{p}{q}\right)=-\left(\frac{q}{p}\right)$；而当$p\equiv 1\pmod 4$时，(ii) $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$，当$p\equiv 3\pmod 4$时，(ii)成为$\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$；当$p=\pm 1\pmod 8$时(iii)成为$\left(\frac{2}{p}\right)=1$，当$p=\pm 3\pmod 8$时，(iii)成为$\left(\frac{2}{p}\right)=-1$.

使用这个法则，可以计算$\left(\frac{a}{p}\right)$，因此关于模p，a是否为平方剩余的判定可变得很简单．

例 若$p=109$，$a=91$，则

$$\left(\frac{91}{109}\right)=\left(\frac{7}{109}\right)\left(\frac{13}{109}\right)=\left(\frac{109}{7}\right)\left(\frac{109}{13}\right)=\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{7}\right)^2\left(\frac{13}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1.$$

在这些等号中第一个是由于 $91=7\times13$；第二个是由于 $109\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$；第三个是因为 $109\equiv4(\mathrm{mod}\ 7)$．$109\equiv5(\mathrm{mod}\ 13)$；第四个是因为 $5\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$；第五个是因为 $13\equiv3(\mathrm{mod}\ 5)$；第六个也是因为 $5\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$；第七个是因为 $5\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$；第八个是因为 $\left(\frac{2}{3}\right)=(-1)^{\frac{3^2-1}{8}}=-1$，所以关于模 109，91 是平方非剩余．

对一般的模 m，有

【定理】8． $m=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$（$p_i$ 是奇素数，$\alpha\geqslant0$，$\alpha_i>0$）．$(a,m)=1$时，a 关于模 m 是平方剩余的充要条件是 a 关于模 2^{α}，模 p_1，…，模 p_k 全是平方剩余．又 a 关于模 $2^{\alpha}(\alpha\geqslant1)$成为平方剩余的条件是：当 $\alpha=1$ 时无条件；$\alpha=2$ 时条件是 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$；$\alpha\geqslant3$ 时，条件是 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 8)$成立．

【系】 $m=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$（$p_i$ 是奇素数），$(a,m)=1$时，a 关于模 m 为平方剩余的条件是$\left(\frac{a}{p_1}\right)=\left(\frac{a}{p_2}\right)=\cdots=\left(\frac{a}{p_k}\right)=1$．

雅可比符号　$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p^{\alpha_k}$（$p_i$ 是奇素数）时，用$\left(\frac{a}{m}\right)$来表示勒让德符号的积，$\left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{a}{p_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$在勒让德符号中，限制分母为奇素数，而这里$\left(\frac{a}{m}\right)$的分母 m 可以是任意的奇数，这个符号$\left(\frac{a}{m}\right)$叫做**雅可比符号**用这个符号，$\left(\frac{a}{m}\right)=1$ 是 a 关于模 m 成为平方剩余的必要条件，但不是充分条件，不过【定理】6 的(i)、(ii)以及【定理】7对于该符号也照样成立．雅可比符号对于勒让德符号的计算也是有用的．

【定理】9． 设 m，n 是奇数：

(i)　若$a\equiv a'(\mathrm{mod}\,m)$，则$\left(\frac{a}{m}\right)=\left(\frac{a'}{m}\right)$；

(ii)　$\left(\frac{ab}{m}\right)=\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{m}\right)$；

(iii)　$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$；

(iv) $\left(\frac{-1}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}$;

(v) $\left(\frac{2}{m}\right)=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$.

例 在前例的勒让德符号计算中，若改用雅可比符号，可以得到简化，即

$$\left(\frac{91}{109}\right)=\left(\frac{109}{91}\right)=\left(\frac{18}{91}\right)=\left(\frac{2}{91}\right)\left(\frac{3}{91}\right)^2=\left(\frac{2}{91}\right)=-1.$$

第一等式是因为 $109\equiv1 \pmod 4$，$\left(\frac{109}{91}\right)$ 是雅可比记号（由于 $91=$ $=7\times13$）；

第二等式是因为 $109\equiv18 \pmod{91}$；

第三等式是因为 $18=2\times3^2$；最后等式是因为 $(-1)^{\frac{91^2-1}{8}}=-1$。

§8. 代数整数

8·1 定　义

在方程或函数问题的研究中，由于把数的范围由有理数扩张到了实数，又由实数扩张到了复数，才得到统一的理论，对于整数论也由狭义的"整数"扩张到了广义整数的范围才有可能得到更丰富的内容，这个广义的整数，即代数整数的概念是由高斯于1830年左右年提出的 今后，我们把狭义的，即通常的整数叫做**有理整数**.

高斯考虑的是形如 $a+a'i(i=\sqrt{-1})$ 的数，这里 a、a' 是有理整数，后人把它叫做**高斯整数**. 两个高斯整数的和，差、积也是高斯整数. 从而高斯整数的全体构成整环，这是含 $\mathbf{Z}$ 并且添加 i 于 $\mathbf{Z}$ 中生成的整环，记为 $\mathbf{Z}[i]$，其中，整除关系，即约数，倍数，单位，素数等概念和素因数分解定理都成立，可以同有理整数一样地进行讨论.

假设由高斯整数 $\alpha=a+a'i$，$\beta=b+b'i(\beta\neq0)$ 作商 $\frac{\alpha}{\beta}=r+r'i$. 这里

$r=\frac{ab+a'b'}{b^2+b'^2}$，$r'=\frac{a'b-ab'}{b^2+b'^2}$ 是有理数. 这样的数 $r+r'i(r,r'\in\mathbf{Q})$ 的全体构成数域，（数域是数构成的域，参看§2.3，**Q**，**R**，**C** 等也是数域，还有其它的无限多种数域，但是任意数域必含 **Q**，且含于 **C** 内，上述的数

域是 Z[i]的商域，它是添加 i 于有理数域 Q 中得到的域表成 Q(i)，就象有理整数是数域 Q 中的整数一样，高斯整数可视为 Q(i)中的整数，Z[i]也叫 Q(i)的**整数环**.

显然，高斯整数 $\alpha=a+a'i$ 是方程 $f(x)=x^2-2ax+a^2+a'^2=0$ 的根，这里 $f(x)$ 中 x^2 的系数为 1，系数都是有理整数，另一方面，Q(i) 的数 $p=r+r'i$ 是方程式 $g(x)=x^2-2rx+r^2+r'^2=0$ 的根，$g(x)$的系数是有理数而不一定是有理整数，不言而喻，假如用 $g(x)$ 的系数之分母的最小公倍数乘 $g(x)=0$ 的两边，则所有系数都变成有理整数，这时 x^2 的系数不一定是 1，用这种方式来定义一般的代数整数.(对于高斯整数来讲，还有 § 9 要讲的东西，今后还是把方程 $f(x)=0$ 的根叫做**整式 $f(x)$ 的根**.)

一般的，把一次以上（最高次项的系数为 1）**的有理系数的某个整式**

$$g(x)=x^n+r_{n-1}x^{n-1}+\cdots+r_1x+r_0 \quad (r_i\in Q) \qquad ①$$

的根叫做**代数数**. 这系也可以是用 r_0，r_1，…，r_{n-1} 的分母的最小公倍数 a_n 乘①的两边后得到的有理整系数整式：

$$G(x)=a_ng(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad a_i\in Z \qquad ①'$$

的根.特别地，把最高次项系数为 1 的有理整系数(一次以上)的整式：

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_i\in Z) \qquad ②$$

的根叫做**代数整数**. 这就是①中，r_i 都是有理整数的情形，也是①'中 $a_n=1$ 的情形.

很明显，代数整数的这一定义是高斯整数的推广，由下面的【定理】2 所述的性质，还能看出这是自然的推广.

当 α 是代数数时，以 α 为根的有理系数的整式中，次数最低的整式(取它的最高次项系数为 1)仅有一个，它是在有理系数范围内的既约整式，它叫做 α 的**最小整式**. 当①的 $g(x)$是 α 的最小整式时，其次数 n 叫做 **α 的次数**(α 是 Q 上的 n 次代数数). $g(x)$ 的根 $\alpha=\alpha_1$，α_2，…，α_n 叫做α 的**共轭数**. 这时有

【定理】1. (i)两个代数数的和、差、积以及用非 0 代数数去除所得的商也是代数数，从而，代数数的全体**A**构成数域.

(ii)代数数的共轭数是代数数。

【定理】2. (i)两个代数整数的和、差、积也是代数整数，从而，代数整数的全体 **I** 构成**整环**.

(ii) 代数整数的共轭数是代数整数。

(iii) 有理数中的代数整数是有理整数，即是说$I\cap Q=Z$.

(iv) 代数数乘以适当的有理整数后，可以成为代数整数.

(v) 系数是代数整数的整式.

$$F(x)=x^m+\bar{r}n^{m-1}+\cdots+r_1x+r_0(m\geqslant 1,\ r_i\in I) \quad ③$$

的根也是代数整数.

【定理】3. 设A的子集合(即代数数的某个集合)B满足如下条件，则B是全体代数整数.即是说B=I.

(1°) B是整环；

(2°) 含于B的数的共轭数也是含于B的数；

(3°) 含于B的有理数是有理整数；

(4°) 在满足上述三个条件的集合中，B是最大集合.

z[i] 满足该定理的条件(1°)、(2°)、(3°)，然而不满足条件(4°)，附加上条件(4°)后，即成为I.

一般的，在数的任意整环R中，可象有理数一样地来定义**整除关系**如下，(参照§2)，对于R的数α，β，当满足$\alpha=\beta\cdot\gamma$的R的数γ存在时，β叫做α的**约数或者因数**，α叫做β的**倍数**，而且称α能被β整除，记成$\beta|\alpha$. R中1的约数叫做**单位**，在R=Z[i]中，单位是1，-1，i，$-i$等四个.

在$\beta|\alpha$时，若又有$\alpha|\beta$(α既是β的倍数又是β的约数)，则α和β叫做**相伴数**.这时，由$\alpha=\beta\gamma$，$\beta=\alpha\delta$得$\alpha=\alpha\gamma\delta$，而$\alpha\neq 0$，于是$\gamma\delta=1$.即是说，$\gamma$和$\delta$都是单位.所以$\alpha=\beta\cdot\varepsilon$($\varepsilon$是单位).R的任意数$\alpha$必可被单位和相伴数整除.它们叫做$\alpha$的**平凡约数**.这以外的约数叫做**真约数**，当α没

※ 一般说来，设有对于加法的阿贝尔群V和域k_0，当k_0的元与V的元之间的运算，用乘法的形式来定义时，这样的积也是V的元，当$c,d\in k_0$，$\alpha\cdot\beta\in V$时，如果$(c+d)\alpha=c\alpha+d\alpha$，$c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$，$(cd)\alpha=c(d\alpha)$，$1\alpha\cdot=\alpha$成立，$V$就叫做$k_0$上的向量空间.(这时，$c\cdot 0=0$，$0\cdot\alpha=0$，$(-c)\alpha=c(-\alpha)=-c\alpha$等，显然也成立).对于$V$的元$\alpha$，…，$\alpha_m$，把形如$c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m$(当然$c_1,\cdots,c_m\in k_0$)的元叫做$\alpha$，…，$\alpha_m$的$k_0$系数的线性组合，要使$k$系数的线性组合表法唯一，其充要条件是，$\alpha$，…，$\alpha\in\alpha$具有性质7 若$x_1\alpha_1+x\cdots+x_m=0$，$x_1,\cdots,x_m\in k_0$，则$x_1=\cdots=x_m=0$. 这个性质叫做$\alpha_1$，…，$\alpha_m$的线性无关性、当从$V$的子集合$B$中任取有限个元都是线性无关时，$B$也叫做是线性无关的，对于$V$的线性无关的子集合$B$，$V$的所有元都是$B$中适当选取的有限个元的线性组合(从而，该线性组合的表法是唯一的)，B叫做V的基底可以证明，"所有向量空间都有基底"，向量空间的基底不是唯一的，但所有基底是等势的，若V的基底B是有限集合，则V的其它的基底B也是有限集合，它们的元的个数是相等时的，把这个B的元的个数叫做V的维数，表成$B\dim v$、当$B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$所有的$V$元可唯一地表成$\xi=c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m$.($c_1,\cdots,\alpha_m\in k_0$)的形式.

有真约数时，叫做**素数**.至于**复合数，素因数，公约数，公倍数**，可与§2一样地定义.例如，在Z[i]中，1+i和3都是素数，然而2是复合数，因为，可以作素因数分解，得$2=(1+i)(1-i)$.

但是，在代数整数全体的整环I中不存在素数.实际上，对于除0和单位以外的I的任意数α，有$\alpha=(\sqrt{\alpha})^2$，$\sqrt{\alpha}\in$I，但$\sqrt{\alpha}$不是单位，也不是α的相伴数，于是单位以外的数在I中具有真约数.从而在I中可以无限地进行因数分解，这对于整数论的发展是不利的，这时，我们不考虑整个I，而只考虑I的适当的子整环(例如，象Z(i)这样的整环)中的整数论，换一种说法，也就是只考虑A的适当的子数域k中的整数论，k中的代数整数的全体a_k=k∩I，叫做整环中**k的整数环**.

这里，对于数域中一般的内容再作若干叙述.一般的，有数域k和k_0 $k_0\subset k$时，把k叫做k_0的扩张域.这个关系表成扩张k/k_0，这时，k被认为是k_0上(一般意义下)的向量空间.*即

(1°) 若α，$\beta\in$k，则$\alpha+\beta\in$k，

(2°) 若$c\in k_0$，$\alpha\in$k，则$c\alpha\in$k

成立，从而k的数α_1，…，α_m的k_0系数的(以属于k_0的数为系数的)线性组合$c_1\alpha_1+\cdots+c_m\alpha_m$也属于k.由于向量空间具有基底，k有在$k_0$上的基底B={$\alpha_1$, α_2…}.

k的任意数被唯一地表成B中(适当的)有限个元的k_0系数的线性组合，把k作为k_0上的向量空间，其维数，即B的元的个数(势)叫做扩张k/k_0的维数，表成($k:k_0$)，当($k:k_0$)有限时，k/k_0叫做**有限扩张**.这时，若($k:k_0$)=n，则k/k_0叫做n次扩张、例如，Q(i)/Q有基底{1, i}Q(i)的数可表成$r\cdot1+r'\cdot i$，从而(Q(i):Q)=2，Q(i)/Q是2次扩张，若存在$\theta\in$k满足k=k_0(θ)，则k/k_0叫做**单纯扩张**.并且，对k/k_0，当k的所有元是k_0上的代数数(即，系数在k_0中的整式的根)时，k/k_0叫做**代数扩张**，这时有

【定理】4. k/k_0为有限扩张的充要条件是，k/k_0是单纯代数扩张，满足k=k_0(θ)的θ在k_0上的次数等于($k:k_0$).

【系】 对k=k_0(θ)，若θ在k_0上是m次的，则{1, θ, θ^2, …, θ^{m-1}}是k在k_0上的一个基底，k的任意数可唯一地表成$\xi=\beta_0+\beta^1\theta+\cdots+\beta_{m-1}\theta^{m-1}$($\beta_i\in k_0$)的形式.

今后，我们考虑k_0=Q的情形，并把Q的有限扩张简单地叫做**代数域**亦即考察**代数域的整数论**.

8·2 因数分解与理想

根据前一小节，n 次代数域 k 可以写成 $k=Q(\theta)$，这里 θ 是代数整数，

$Q(i)$是二次域(二次代数域)，$Q(\sqrt[3]{2})$是三次域．

在代数域k的整数环 O_k中有素数存在，它的任意整数可分解成素因素这个分解不一定是唯一的，素因数分解定理不一定成立．但素因数分解的唯一性具有如下意义．设O_k的单位以外的整数 α 的素因数分解为

$$\alpha=\pi_1\pi_2\cdots\pi_l=\pi_1^1\pi_2^1\cdots\pi_m^1.$$

当 $l=m$ 且(必要时可适当交换顺序) π_i与 π_i^1是相伴时，α 的素因数分解(从本质上说)叫做是**唯一的**当 O_k 的所有整数的素因数分解都唯一时，O_k 叫做**唯一分解整环**．例如，$Z[i]$是唯一分解整环，$Z(\sqrt{-5})$则不是．实际上，在$Z[\sqrt{-5}]$中

$$6=2\cdot3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

$2,3,1+\sqrt{-5},1\sqrt{-5}$的每一个都是素数，但互不相伴．

如此，代数域的整数环一般说来不是唯一分解整环，在这里，不能使用与有理整数同样的方法研究整数论，克服这个困难的关键在于提出理想这个概念．定义O_k的理想与§3 定义的 Z 的理想一样，即把满足如下条件(10)、(11)、(12)的数的集合 a 叫做**O_k的理想(k的整理想)**．

(10) $a\subset O_k$,

(11) 若 $x,y\in a$，则 $x+y\in a$,

(12) 若$\mu\in O_k$，$a\in a$，则$\mu x\in a$．

O_k的任意数 α 的全体倍数(α)构成理想，它叫做由 α 生成的**单项理想(主理想)**，这里叙述它的简单性质．

【定理】5．(i)若 ε 是 O_k 的单位，则$(\varepsilon)=(1)=O_k$．

(ii)α 和α'相伴的充要条件是$(\alpha)=(\alpha')$．

在 Z 中§3的【定理】7成立的，所有的理想是单项理想，然而，在某种 O_k 的理想中，有非单项理想．例如，在 $O_k=Z[\sqrt{-5}]$中，$a=(2,1+\sqrt{-5}$即由 2 和 $1+\sqrt{-5}$ 生成的理想(2的倍数和 $1+\sqrt{-5}$ 的倍数之和的全体)，随便取怎样的 $\alpha\in O_k$ 也不可能有 $a=(\alpha)$．像 Z 那样的，它的所有理想是单项理想的整环叫作**单项理想整环**．Z，$Z[i]$是单项理想整环，

而$Z[\sqrt{5}]$则不是．

【定理】6．整数环 O_k 是唯一分解整环的充要条件是，它是单项理想整环．

这个定理的充分性，对一般整环也成立，(在一般整环中有不是单项理想整环的唯一分解整环)，然而，特别地，对于整数环O_k，这个条件是必要的。

在§3述及的Z的公理系和定理中，【Z_1】对于所有的O_k成立，但【Z_2】，【Z_3】，【定理】1, 2, 3 涉及大小顺序，在一般的O_k中无意义，至于从定理4起的整除的性质，在一般的O_k中成立的只有定理4与定理5. 而【定理】6～10，一般不成立.

对于O_k的理想a, b，把a的数x和b的数y的和$x+y$的全体叫做a和b的和，表成a+b，又，把a的任意有限个数$x_1, \cdots x_m$及b的任意有限个数$y_1, \cdots, y_m$之积之和$x_1y_1+\cdots+x_my_m$的全体叫做a和b的积，表成a·b. 这时有

【定理】7. a, b, c是O_k的理想时：

(i) a∩b也是O_k的理想，并且是属于a, b的最大理想；

(ii) a+b也是O_k的理想，并且是含a, b的最小理想；

(iii) ab也是O_k的理想，且有ab=ba，(ab)c=a(bc)，及ab⊂a∩b. 特别的，若a+b=O_k，则ab=a∩b；

(iv) 作为理想a, b间的关系，a=bc和a⊃b是等价的.

a⊃b(从而，a=bc)时，b叫做a的**约理想**(或a的因子)，a叫做b的**倍理想**，也说成a被b整除. 表成b | a或a≡0(mod b)等，这时候，两个理想a, b的公约理想，公倍理想也可以自然地得到定义，由上述定理，容易看出a∩b是a, b的公倍理想，并且对于包含关系来说是最大的公倍理想，这时(正好与包含关系相反)叫做**最小公倍理想**. 同样的，a+b对于包含关系是最小公约理想，叫做a, b的**最大公约理想**，这种叫法的由来是，在这些理想全是单项理想的情形，若a=(α)，b=(β)，a∩b=(λ)，a+b=(δ)，则λ是α, β的最小公倍数δ，是α, β的最大公约数，(但是，当a, b是单项理想时，一般的，a∩b，a+b等不一定构成单项理想). 当a, b的最大公约理想是O_k时，即a+b=O_k=(1)时，a, b叫做是**互素**的. 当理想P≠O_k时，如果除P及O_k外不存在其他的约理想，P就叫极大理想. 又P满足下述条件(p)时，叫做素理想：

(p) "若$\alpha, \beta\in O_k$，$\alpha\beta\in$P，则$\alpha\in$P或$\beta\in$P"，这时有

【定理】8. (i) 整数环O_k中，极大理想与素理想是相同的；

(ii) 若单项理想P=(π)是素理想，则π是素数；

(iii) 若理想的积ab能被c整除，且b, c互素则a能被c整除；

(iv) 若a, b能被素理想P整除，则a或b能被P整除.

注意 上述诸定义对一般的整环(即使不是整数环)也适用．这时定理 8 的(i)，可以表述成"极大理想是素理想，但素理想却不一定是极大理想."定理 8 的(ii)的逆对于整数环 O_k 也不成立，即，由素数 π 生成的单项理想 $P=(\pi)$ 不一定是素理想，还有，下述定理是重要的．

【定理】9．(理想的素因子分解定理)．

整数环 O_k 的(O_k 自身和(0)以外的)任意理想 $\mathbf{a}$ 可(除顺序外)唯一地表为素理想的积，即 $a=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ 而且 $k\geqslant 1, e_i>0, p_1,\cdots,p_k$ 是相异的素理想．

在单项理想环时，由于有 $\mathbf{a}=(\alpha), P_i=(\pi_i)$，上述理想的素因子分解只不过是 α 的素因数分解 $\alpha=\pi_1^{e_1}\pi_2^{e_2}\cdots\pi_k^{e_k}$ 的另一方面表示方法，然而 O_k 不是单项理想环(即唯一分解环)时，上述定理就具有更大的意义了．这时，α 虽没有唯一的素因数分解，但 $(\alpha)=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ 和素理想可有唯一的分解，这时简单地写成

$$\alpha=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}. \quad ①$$

其中 p_j 叫 α 的素因子．

由以上可知，相当于 $\mathbf{Z}$ 中 § 3 的【定理】8, 9, 10 的定理，对 O_k 的元一般说来不成立，然而对于理想，每一个都成立，把这些作为基本性质，整数论就可以深入发展了．

当把理想的定义之(10)换成下述(10′)时，$\mathbf{a}$ 叫做 $\mathbf{k}$ 的分数理想．

(10′) $\mathbf{a}\subset\mathbf{k}$，存在适当的 $\gamma\in\mathbf{k}$，使得 $\gamma\mathbf{a}\subset o_k$．

前面所述的理想(整理想)是分数理想的特殊情形．对于分数理想，其和，积都可以与整理想一样的定义，这时有．

【定理】10． (i)设 $\mathbf{a}$ 是 $\mathbf{k}$ 的(0)以外的分数理想，则满足 $\gamma\mathbf{a}\subset o_k$，$\gamma\in\mathbf{k}$ 的 γ 的全体也是 $\mathbf{k}$ 的分数理想，叫做 $\mathbf{a}$ 的逆理想，表成 $\mathbf{a}^{-1}$；

(ii) $\mathbf{a}\cdot o_k=\mathbf{a}$，$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1}=o_k$；

(iii) $\mathbf{k}$ 的(0)以外的分数理想之全体对于乘法构成阿贝尔群．

对于上面的①式，当 α 是整数时($\alpha\in o_k$，取 $e_j>0$)自然成立，而 α 不是整数时($\alpha\in o_k$)，也可以使用负幂的方式表成①的形式．

有了以上的准备，代数整数论就可以得到深入地发展了，这里述及的仅仅是一些最基本的知识

§9. 二次域的整数和二元二次不定方程

9·1 二 次 域

$Z[i]$和$Z[\sqrt{-5}]$是二次域的整数环，它们分别是具有$a+a'i$，$a+a'\sqrt{-5}$ $(a, a'\in Z)$形的全体数，亦即$\{1, i\}$，$\{1, \sqrt{-5}\}$的Z系数的全体线性组合．这时$\{1, i\}$，$\{1, \sqrt{-5}\}$分别叫做$Z[i]$，$Z[\sqrt{-5}]$的**整数基底**．另一方面，在$k=Q(\sqrt{-3})$的整数中，除$a+a'\sqrt{-3}$ $(a, a'\in Z)$以外还有$\varepsilon=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$等，（由于$\varepsilon$是$x^2-x+1=0$的根，所以它是代数整数）．因此$\{1, \sqrt{-3}\}$不是$Q(\sqrt{-3})$的整数基底．事实上，可以证明，$\{1, \varepsilon\}$才是一个整数基底．

把全部二次域表作$Q(\sqrt{m})$，如果m中有平方因子，则把它提到根号外来，于是可以只对m中没有平方因子的情形来讨论(特别地，可以设$4\nmid m$)．当$m>0$，则有$Q(\sqrt{m})\subset R$，于是$Q(\sqrt{m})$叫做**实2次域**，当$m<0$时，叫做**虚二次域**．

【定理】1. 作为二次域$Q(\sqrt{m})$的整数基底，当$m\equiv 2, 3 \pmod 4$时，可以取$\{1, \sqrt{m}\}$，而$m\equiv 1 \pmod 4$时，可以取$\left\{1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}\right\}$.

从而，$k=Q(\sqrt{m})$的整数环，当$m\equiv 2, 3 \pmod 4$时是$o_k=Z[\sqrt{m}]$，当$m\equiv 1 \pmod 4$时是$o_k=z\left[\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right]$，例如在$k=Q(i)$时，对于$m=-1 \equiv 3 \pmod 4$，有$o_k=z[i]$，在$k=Q(\sqrt{-3})$时，对于$m=-3\equiv 1 \pmod 4$，有$o_k=z\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$.

二次域$k=Q(\sqrt{m})$的数$\alpha=r+r'\sqrt{m}$的共轭数为$\alpha'=r-r'\sqrt{m}$，$\alpha\alpha'=r^2-mr'^2$是有理数．它叫做α的**模**，表成$N(\alpha)$．特别地，若α是$Q(\sqrt{m})$的整数，则$N(\alpha)=\alpha\alpha'$也是整数，由于也是有理数，故是有理整数，所以可有$N(\alpha)=n\in Z$.

对于理想$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}$的数的共轭数全体$\mathfrak{a}'$也是理想，叫做$\mathfrak{a}$的**共轭理想**.

【定理】2. $\mathfrak{a}$是整理想时：

(i) $o_k/\mathfrak{a}$的剩余类的个数是有限的；

(ii) $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$是有理整数生成的单项理想$(n)$，$n$等于(i)的剩余类个数。把这个$n$叫做$\mathfrak{a}$**的模**，表成$N\mathfrak{a}$。则$N\mathfrak{a}=n=\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$。

$Q(\sqrt{m})$的整数基底和其共轭数构成的矩阵之行列式的平方d叫做$Q(\sqrt{m})$的判别式。比如当

$m\equiv 2, 3 \pmod 4$时，有$d=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{m} \\ 1 & -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2=4m$。

当$m\equiv 1 \pmod 4$时，有$d=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1+\sqrt{m}}{2} \\ 1 & \dfrac{1-\sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2=m$。

这时，对于二次域的素理想，下述定理成立。

【定理】3. 设二次域$Q(\sqrt{m})$的判别式为d，它的任意素理想为$\mathfrak{p}$，设含于$\mathfrak{p}$的最小有理正整数为p，则p是素数，且有如下的三种情形产生：

(1°) 若p是奇素数，$\left(\dfrac{d}{p}\right)=1$或若$p=2$，$d\equiv 1 \pmod 8$，则$N\mathfrak{p}=p$，$p=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$，$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}'$；

(2°) 若p是奇素数，$\left(\dfrac{d}{p}\right)=-1$，或若$p=2$，$d\equiv 5 \pmod 8$，则$N\mathfrak{p}=p^2$，$p=\mathfrak{p}$；

(3°) 若$p\mid d$，则$N\mathfrak{p}=p$，$p=\mathfrak{p}^2$。

单位　关于二次域的单位，有下述性质。

【定理】4. 对于二次域k，任取一个单位ε，则

(i) $N(\varepsilon)=1$；

(ii) 在虚二次域中，$|\varepsilon|=1$，从而，$k=Q(\sqrt{-1})$时，单位有± 1，$\pm i$等四个；$k=Q(\sqrt{-3})$时，单位有± 1，$\pm\varepsilon$，$\pm\bar{\varepsilon}$等六个，这里$\bar{\varepsilon}=\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$；对其它的$k$，单位只有$\pm 1$两个。

(iii) 在实二次域中，有无限多个单位，这时存在一个单位ε_0，使得有关系式

$$\varepsilon=\pm\varepsilon_0^n (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots).$$

这个ε_0叫做**基本单位**.

若ε_0是基本单位，则$-\varepsilon_0$，$\pm\varepsilon_0^{-1}$也是基本单位，即基本单位有四个，

其中大于1的只有一个，假设就把这个取为ε_0，则有$\varepsilon_0>1, 0<\varepsilon_0^{-1}<1$.

例如，对$Q(\sqrt{2})$，大于1的基本单位是$\varepsilon_0=\sqrt{2}+1$，又$\varepsilon_0^{-1}=\sqrt{2}-1$，$-\varepsilon=-\sqrt{2}-1$，$-\varepsilon_0^{-1}=-\sqrt{2}+1$都是基本单位，单位可表成$\varepsilon=\pm(\sqrt{2}+1)^n(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，

9·2　欧几里得整环

在§3【定理】6～10中谈到的有理整数的基本性质，对二次域的整数环，一般是不成立的．不过对于二次域$k=Q(\sqrt{m})$的整数环o_k，如果相当于§3【定理】6的下述性质(E)成立，那么k叫做**欧几里得二次域**，o_k叫做**欧几里得整环**.

(E)　对于任意的$\alpha, \beta\in o_k$，$\beta\neq0$，有k，$\rho\in o_k$使得$\alpha=\beta$，$k+\rho$，$|N(\rho)|<|N(\beta)|$成立.

【定理】5. 欧几里得整环是单项理想整环（从而是唯一分解整环）其逆定理不一定成立，在§8【定理】6已经讲过，单项理想整环与唯一分解整环是一致的．例如，高斯整数环$Z[i]$是欧几里得整环，从而是单项理想整环和唯一分解整环．于是，对于Z，§3的【定理】6成立，从而把Z换成$o_k=z[i]$时，§3的【定理】7～10也成立.

已经证明，欧几里得二次域只有如下的五个虚二次域和十六个实二次域，共计二十一个，它们分别是$m=-1, -2, -3, -7, -11$和$m=2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73$.

[定理] 5的逆定理不成立，存在单项理想整环(唯一分解整环)．但不是欧几里德整环．作为这样的二次域，以下的事实是熟知的.

在虚二次域中有$m=-79, -43, -67, -163$；在实二次域中有$m=14$ 22, 23, 31, 38, 43, 46, 47, 53, 59等(100以下的共22个)，高斯猜想，"虚二次域中的整数环能构成单项理想整环者，限于$m\geqslant-163$．而实二次域中象这样的整环有无限多个，"但至今一个都末得到证明．但不管在哪种情形下，至少有47个整数环，和Z一样，任意整数都可以作唯一的素因子分解.

9·3　理　想　类

对于$k=Q(\sqrt{m})$中两个非(0)整理想$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$，若存在$\rho\neq0$使得$\mathfrak{a}=\rho\mathfrak{b}$，$\rho\in k$，则记作$\mathfrak{a}\sim\mathfrak{b}$，"～"是等价关系，即有

(1°)　$\mathfrak{a}\sim\mathfrak{a}$；

(2°)　若a～b，则b～a；

(3°)　若a～b，b～c，则a～c.

从而(0)以外的全体整理想可以按上述等价关系分类，这样的类叫做(广义的)**理想类**.这时可以证明，类的个数是有限的，其个数h叫做**类数**.单项理想的全体E构成一个类，在类的集合G中，可以自然地定义积，E就是关于这个积的单位元，而对于这个积，G构成阿贝尔群．这叫做**理想类群**.类数h就是这个群的阶数，o_k是所谓单项理想整环这件事相当于$h=1$，$G=\{E\}$.

关于二次域的基本知识，应该讲的还多，已讲的这些知识有着广泛的应用，特别是对有理整数的整数论的应用，这里我们只讲一个问题——对二元二次不定方程式的应用．

9·4　二次不定方程

如下形式的二元二次不定方程叫做**佩尔方程**.

$x^2-ay^2=\pm1$(a是非平方的正整数).　　①

析出a中最大平方因子，设$a=f^2m(m\neq1)$则①的左边可以在实二次域$Q(\sqrt{m})$的整数环中因数分解：$(x+fy\sqrt{m})(x-fy\sqrt{m})=\pm1$，即$N(x+fy\sqrt{m})=\pm1$，所以$\varepsilon=x+fy\sqrt{m}$是单位，然而为了使单位$\varepsilon$成为这种形式，其充要条件是，当$m=2,3(\mathrm{mod}\ 4)$时，存在$r\in Z$满足$\varepsilon\equiv r(\mathrm{mod}\ f)$；当$m\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，存在$r\in z$满足$\varepsilon\equiv r(\mathrm{mod}\ 2f)$，但是，当$m\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$时，一般的单位形如$\frac{t+u\sqrt{m}}{2}$.不过可以求一对特殊的取为偶数的$t,u$，设$t=2t'$，$u=2u'$，这就有了$\varepsilon=t'+u'\sqrt{m}$的形式，且它还满足$f\mid u'$，因此形式地讲，还可以象$m\equiv2,3(\mathrm{mod}\ 4)$的情形一样来处理，设满足以上条件的大于1的单位中之最小者为$E_0=x_0+u_0\sqrt{m}$)则x_0和$y_0=\frac{u_0}{f}$是①的最小正整数解，由$E_0=x_0+fy_0\sqrt{m}$，$E_0^{-1}=\pm(x_0-fy_0\sqrt{m})$，则$E_0^n(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$中，$\sqrt{m}$的系数全部能被$f$整除，所以有$E_0^n=x_n+fy_n\sqrt{m}$的形式，这里$x_n,y_n$全是①的解，且它们就是①的全部解．

例1. 对$x^2-75y^2=1$，$75=5^2\times3$，$f=5,m=3$，$Q(\sqrt{3})$的基本单位是$\varepsilon_0=2+\sqrt{3}$作出ε_0的幂，得$\varepsilon_0^2=7+4\sqrt{3}$，$\varepsilon_0^3=26+15\sqrt{3}$，在$\varepsilon_0^3$中$\sqrt{3}$的系数被$f=5$除尽，所以$E_0=26+15\sqrt{3}$，因此最小正整数解是$x_0=26$，

$y_0=\frac{15}{5}=3$。

例2. $x^2-45y^2=1, 45=3^2\times5, f=3, m=5\equiv1(\text{mod }4)$. $Q(\sqrt{5})$的基本单位 $\varepsilon_0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$的幂是 $\varepsilon_0^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\varepsilon_0^3=2+\sqrt{5}$等，事实上仅限于$\varepsilon_0^{3k}$ (k为正整数)才有$t'+u'\sqrt{5}(t',u'\in z)$的形式，即$\varepsilon_0^6=9+4\sqrt{5}$，$\varepsilon_0^9=38+17\sqrt{5}$，$\varepsilon_0^{12}=161+72\sqrt{5}=E_0$，于是$x_0=161, y_0=\frac{72}{3}=24$是最小正整数解.

对于一般二元二次不定方程.

$$ax^2+bxy+cy^2=k, (a,b,c)=1, a>0. \quad ②$$

设判别式$d'=b^2-4ac$不是平方数(d'是平方数的情形，可以化为一次不定方程的简单问题)，这时，由于②有$N\left(ax+\frac{b+\sqrt{d'}}{2}y\right)=ak$，设$d'=f^2m$，仍成为二次域$Q(\sqrt{m})$中的问题，于是可以同佩尔方程一样的进行讨论，然而，实际上对于这样的情形，用关于理想的方法不一定简单，它需要有较复杂的处理过程，感兴趣的读者可以参考有关的书籍。

§10．结 束 语

沿着上述的途径，完全可以进入代数整数论中去了，可是基于本书的宗旨，却不得不就此而止．可惜对于19世纪整数论中的一个重要组成部分——解析整数论——我们也还没有触及到，如果把这部分也讨论了，可以说就达到了现代整数论的入口．作为补遗，让我们来看一看整数论历史的概观．整数论的历史之所以能告别希腊时代而进入近代整数论的时期，这是以17世纪的费马为标志的，费马在这方面证明了很多定理，提出了不少问题，谌称整数论的开山鼻祖．当历史进入十八世纪以后，诸如欧拉，拉格朗日等又使得整数论得到了显著的进步，到十八世纪末，勒让德把这些成果收集到他的"数整论"(Essai sur la theorie des nombres)中了，几乎与此同时高斯的大作"整数论"(前面已说过的Disguisi tiones Arithmeticae)也以第一次系统地阐述整数论为特点而问世了，它不仅总结了整个十八世纪的整数论，而且也大大地超越了时代的成果，其中在这本书里，他得到了平方剩余的互倒法则，二元二次不定方程(二次型理论)

及分圆方程理论等等，因此我们说十九世纪是现代整数论的开端．其次，狄利克莱的单位定理等除了代数研究之外也利用了解析方法作类数计算，因此成为解析数论的出发点．另外库默尔，克罗内克尔的因子论和戴德金的理想论对代数数论的发展也起了很大的作用，再结合到域理论(伽罗瓦，许代里兹等)的进步和希尔伯特的理论来看全都是些伟大的成就．在这个时期，为寻找域的扩张和伽罗瓦群，扩张域的理想等的关系，类域的概念也相继产生了．进入二十世纪以来整数论中最大的成就要算高木贞治的类域论的研究了，继之有哈斯、阿尔登，许托勒，温友等为进一步完善这一理论而提出的多种方法．(译者注：在解析数论上，中国数学家的贡献也是举世瞩目的．)

目前，在最现代的整数论研究中，有很多数学家(包括各国的许多优秀数学家在内)正在为之奋进．

VI. 近世几何学

历史发展到近代，数学的鲜花已结出了丰硕的果实，而到现代，情况更是如此．科学已处于高速度的发展之中，几何学也不例外．本节将对几种最新几何学的建立作一简单的介绍．在这些几何学中，有个分支叫做"拓扑学"(俗称橡皮几何)，而拓扑学中又有所谓**图论**这一分支．图论就象是近世几何学这一大宫殿中的一间小屋，具有它一定的地位．图论理解起来是非常直观的，它不需要过多的数学的预备知识．

不过，从逻辑上来说，不能认为一个很熟悉的东西，一定是容易理解的东西，以下我们将加以说明．

§1. 平行线公理

在纪元前300年左右，一本在世界数学史上划时代的名著诞生了．它就是欧几里德"原本"(或叫"原理")．所谓"原本"，顾名思义，就是把当时关于数的基本理论系统化了．它的内容用今天的术语来说，就是初等的平面几何学和立体几何学、初等整数论、实数论(有理数、无理数的理论)、初等代数等．但是"原本"中的论述方法和技巧确是几何学的，它把数只是看成线段的一种表示．

在希腊数学中，虽然缺乏现代的计算手段和方法，但在计算技巧上却大为不然．从"原本"上完全可以看到这一点．无论从理论的严密性，还是从

数学理论结构的严谨性方面，"原本"在今天对我们仍然是很有价值的。

"原本"共有13卷，其中1-6卷涉及平面几何学的内容，11-13卷涉及立体几何学的内容。

它的第一卷是由定义、公理、公设开始的。所谓定义是对点、直线、平面等概念给予说明的命题。比如说："点是只有位置而没有大小的几何对象"就是点的定义。公理是不需要证明而存在的(为人们公认的)真理。公设是象公理那样不需要证明而且被人们公认为它是真确的一种假设。在近代数学书中，一般把公设就看成公理*。公理方法成为后来理论结构的依据，它起到了为现代数学奠基的作用。公理方法能把一门数学学科仅仅在一个公理体系的基础上建立起来。"原本"上的公理、公设就是这样的。

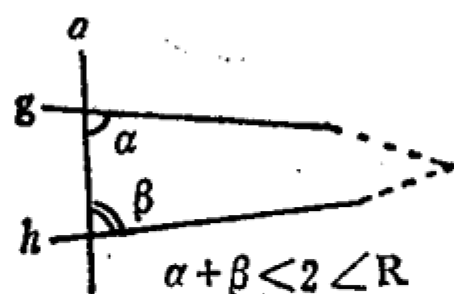


图 15-45

$\alpha+\beta<2\angle R$

公理一 等于同一量的各量是相等的。

公理二 相等的量加上相等的量，其和相等。

公理三 等量减去等量，其差相等。

公理四 能重合的量相等。

公理五 全体必大于部分。

公设一 任意两点间可以引连接它们的直线。

公设二 每条直线可以向其两端任意延长。

公设三 以任意点为中心，可以作以任意长为半径的圆。

公设四 所有直角相等。

公设五 在一个平面上，一条直线与二直线相交，在这条直线的同一侧的两个内角之和若小于π时，则二直线必在这一侧相交(图15-45)。

以上的公理公设中，最后一个公设称为第五公设。它比其它几个公设更复杂，实际上这个公设是与现在的平行线公理："过直线外一点引此直线的平行线有一条且只有一条"，或者"三角形的内角和等于π"等命题是等价的。我们不禁要问，其它公设的表述形式都是那么简单，却为什么欧几里得要用如此繁复的语言来描述第5公设呢？欧几里得的这个平行线公设又可否由其它的公理和公设推出来呢？为了解决这个疑问，人们作了大量的努力，结果均以失败而告终。至今第五公设仍然是不可缺少的。

※ 公理和公设有何区别，"原本"未明确阐述，似乎欧几里德认为，公设既是一种假设，还容许有切磋的可能性，特别是第五公设——译注

尽管"原本"是希腊赫莱利兹姆时期(纪元前334年到纪元前 30 年)数学上最大的一个成就，但是，在这本书中缺点和不足还是有的. 为了弥补"原本"的缺点，后人作了很大的努力. 例如，"原本"关于点、直线、平面等几何对象的定义用了另外的说明语进行解释. 但对这些说明语本身还应当加以说明. 由此可见，"原本"是有缺点的. 为了克服这种不足之处，人们曾作过很多研究. 许多人还试图对前述第五公设进行证明. 然而有长达两千多年的岁月里，所有这种尝试都失败了.

在那个时代，人们确信欧几里得几何学是独一无二的正确的几何学. 对于平行线公理人们认为它是显然的真理，是不能改变的. 错误的"信念"差不多持续了整整一个世纪. 冲破"信念"，对于第五公设的研究作出过贡献的第一个人是意大利僧侣萨克里(Saccheri 1667—1733)，他是为解开平行线公理的谜而迈出第一步的人，但是他未能得到什么象样的结果，原因是他也是一个相信欧几里得几何学是唯一真正的几何学的人.

平行线公理真是不能得到证明吗？更确切地说，能不能根据欧几里德的其它公理和公设来推出平行线公理呢？也就是说，这些公理、公设之间是不是全然没有关系的呢？如果是这样的话，假使改变了平行线公理，即改变第五公设的命题且让第一公设到第四公设与第一公理到第五公理保留不变，就会产生新的几何学. 俄国的罗巴切夫斯基和匈牙利的波约分别在上述思想的指导下，用事实证明了平行线公理是独立存在的. 从而，作为非欧几里得几何学的一种新几何学——现在叫做**非欧几何学**——被创立起来了. 他们在创立过程中，只是把第五公设换成了如下新的假设：

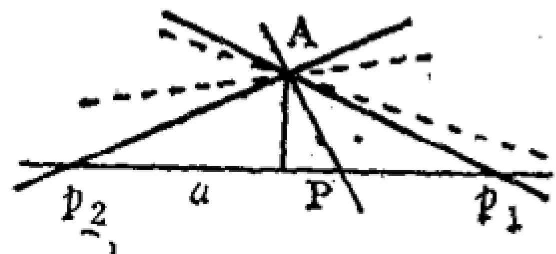


图 15-46

当给定直线 a 和它以外的一点 A 时，连接 a 上的任一点 P 和 A 得到直线 AP. 当 P 在 a 上向右方移向无限远时，AP 存在极限位置为 p_1，同样地，当 P 向左方无限远离时，AP 存在极限位置 p_2，这时把 p_1、p_2 叫做过 A 而平行于 a 的直线.

图 15—46 中的直线 AP 是与 a 相交的，过 A 的虚线表示不与 a 相交的直线，p_1、p_2 表示过 A 与 a 相交的直线与不相交的直线的分界线，这样一来，不与 a 相交的直线则有无穷多条.

在保持上面的假设之下，从图形看出，它比起欧几里得几何学来是很不相同的，而且发生了更加令人难以置信的事. 比如，平面上任意两条直线具有公共的垂线；三角形的内角和小于 π；过三点的圆一般有四个. 且其

曲线具有三种形状等等，由此看来，似乎是不可理解的事产生了，但却决无逻辑上的矛盾，而且内容丰富而完美的非欧几何学兴起了.

然而当时人们对这样的事却很不理解，非但如此，甚至认为别人所作的努力只是痴人妄为，引以为笑料。他们不知道这是建立在非直观假设上的理论，以此得到各式各样非直观的结果.这正是数学研究中常有的事情.

如果把地球和太阳都视为一个点而研究宇宙时，上述的新的几何学——罗巴切夫斯基、波约的非欧几何——就是最有用的工具.对于现代，特别是对于将来的所谓"宇宙空间时代"，这种几何学将充当更重要的角色.与之相比，我们在初等数学中所学的欧几里德几何考查的对象只是在地面上狭小的场所里各种直观的图而已.

作为补充的说明与对照(参照§2末尾)，在后面将把关于第五公设的问题作一较为全面的整理，以便读者了解得更为透彻.

总之，在欧几里得几何学外还存在着别的几何学.并且已用具体的实例作了说明，事实上，这样的几何学可以有很多种.例如黎曼(Riemann 1826—1866)取消了欧几里得的第五公设而代之以另一个第五公设："对于平面上的任何直线，一条平行线都没有".从而又开创了一门新的几何学.

所谓公理和公设，在名称上的区别只不过是公认和不公认.或者说全是根据直观与不全是根据直观来区别的.它们的共同实质都是用简单的假设作为认识的依据，而实际上都是公理，它们可以定义成假定为真的的命题.

§2.　射影几何学

图形具有各种各样的性质：比如长度、角度、面积或体积等，这些都叫做图形的度量性质，又如若以图形的位置关系来讲，诸如(有限个或无限个)点共线、共面的问题；(有限条或无限条)直线或(有限个或无限个)平面共点的问题等都叫做位置关系性质。以下将讨论怎样区别这两种性质的问题.如图15-47，设有平面 α 和它上面的直线 a，假定 O 是 α 外一点，连接 O 与直线 a 的任意点，得到直线 $OA, OP, OQ, OB, \cdots$，这些直线和另一个平面 α' 的交点分别为 $A', P', Q', B', \cdots$，$A', P', Q', B', \cdots$ 是 O 和 a 决定的平面与 α' 的交线 a' 上的点，即是说 $A', P', Q', B', \cdots$ 是同在直线 a' 上的.这是因为由以上的作图过程看出，直线 a 上的点 $A, P, Q, B, \cdots$，变过去后仍然落在一条直线 a' 上，分别成为点 $A', P', Q', B', \cdots$. 于是我们

说，"点的集合位于一直线之上的性质是不变的."另一方面，由这个过程还可以看到，线段 AB 的长，对应着线段 $A'B'$ 的长．而这两个长度一般说是不相等的．我们感兴趣的是某些不变性，可以考虑研究这些不变性质的几何学，现在归纳一下上述过程．首先，把 O 与各点 $A, P, Q, B, \cdots$ 连接起来．这叫做由 O 到 $A, P, Q, B, \cdots$ 作射影．其次，作这些直线与平面 α' 的交点 $A', P', Q', B', \cdots$，这叫做用平面 α' 把 $OA, OP, OQ, OB, \cdots$ **切断**．对于一个图形，如果把这样的射影和切断反复进行有限次，就可以把原来的图形转移到另外的图形上去．这样的过程叫做射影变换．研究在射影变换下图形不变性质的几何学叫做**射影几何学**．

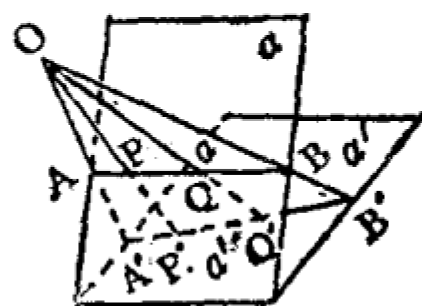


图 15-47

对于射影几何学，可以使之建立在如下的公理系基础上．

公理一　过相异二点 A, B 的直线有一条且只有一条。

公理一'　相异二平面 α, β 相交于一条且只相交于一条直线 x.

公理二　若点 A 不在直线 a 上，则过 A 和 a 的平面 ξ 有一个且只有一个．

公理二'　若直线 a 不在平面 α 上，则 a 和 α 有一个且仅有一个交点 X.

公理三　在任一直线 a 上，至少存在三个相异的点 X、Y、Z.

公理三'　对任一直线 a，通过 a 至少存在三个相异平面 ξ、η、ζ.

公理四　若点 A 在直线 a 上，而 a 又在平面 α 上，那么 A 必在 α 上．

公理五　存在点 X_0，直线 x_0 和平面 ξ_0，使得 X_0 不在 x_0 上，且 x_0 又不在 ξ_0 上．

在这些公理中容易看到，关于度量性未作任何规定．此外在这个公理系中没有作任何说明就使用了点、直线、平面等术语，实际上这三个概念是怎样的，事先并不知道．因此对上述公理，也许大多数人都还不能完全理解．其实，在公理系中对点、直线、平面三者的相互关系和它们的性质等，虽不是直接地也算是间接地定义了的．

汽车根据什么原理才动的呢？是什么物质构成的呢？假设我们都不知道这些，但只要知道它是汽车，并且懂得汽车的驾驶和交通规则，知道它是很方便的交通工具就够了．射影几何学的公理系的意义，也有些与此相仿，只要取点、直线、平面作为三种基本图形，并且给出使用的基本规则，

且运用它们去建立几何学就行了.

射影几何学是公理化数学的一个典型.

这一几何学是内容相当广泛的一门数学学科，在它里面还可以采取更多的公理体系，得到前面提及的欧氏几何学与非欧几何学等多种几何学.例如现在我们来考虑使一个实的二次曲线保持不变的所有射影变换的集合－研究该集合中元素不变性质的几何学就是与罗巴切夫斯基和波约的非欧几何相同的几何学.

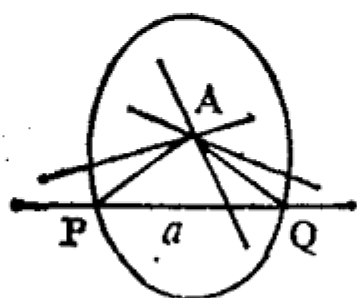


图 15-48

如图 15-48 把这里固定的二次曲线叫做**绝对形**，常记为Γ，我们只考虑绝对形Γ的内部，而把它的外部叫做假想区域，因而绝对形就是内部和假想区域的分界线且认为它是由无限远点构成的集合. 我们说直线就是通过Γ内部的直线a，它与绝对形Γ相交于两点P,Q(图 15—4).当在a外但在P内有一点A时，把二直线AP，AQ定义为**平行**于a.的直线. 这正好与罗巴切夫斯基几何学的平行定义相同. 把与a相交于Γ内部的直线叫做与a相交的直线，如此建立起来的几何学与作为射影几何学的个一分支的罗巴切夫斯基及波约的非欧几何学是实质上相同的几何学(这是克莱因指出的.)从而，还证明了下面一件重要的事情.

为此得把话题转回到最初的关于第五公设的问题上来. 非欧几何学的创立，是在它的第五公设(内部以及它与其他四个公设之间都)无矛盾的条件下完成的. 而实际上非欧几何学本身绝无不合理性，这是在罗巴切夫斯基所在的时代所没有解决的. 这一论点的证明，要利用上面提到过的克莱因提出的方法才能完成. 用此方法还能证明非欧几何学是射影几何学的一部分，而且能证明，射影几何学(在数域内无矛盾性等假设之下)是无矛盾的.

§3. 拓　　扑

从射影几何的定义已经知道，射影几何是研究在射影变换下图形性质不变的一门数学分支.类似的思想也可用来定义拓扑学(俗称橡皮几何学).这里要用数学的语言来作说明会稍微困难一些. 现在有两个图形F和F'，它们是点的集合，把F上全部点变成F'上的点，使F上邻近的点变到F'上也是邻近的点.反之，由F'到F上的变换也可以和F到F'的变换一样. 我

们把这样的过程叫做拓扑变换．当两个图形，它们之间存在拓扑变换时，叫做是同胚的．**研究图形在拓扑变换下不变的性质的几何学叫做拓扑学**．也可从这样说：拓扑学是研究所有同胚图形共通性质的几何学※

欧几里德几何学把全等图形看作相同的图形．射影几何学把射影图形看作相同的图形．类似地，扑拓学是把同胚图形看作相同的图形．在图 15-49 上是些平面图形．在(a)中，对圆周和它内部的点，施以某种拓扑变换，使A的对应点(象点)为A'，使圆周对应着图中的封闭曲线，所说的点变换后仍然是圆的内部的点，这也是一个拓扑性质．(b)说明线段不能与圆同胚，因为线段PQ的两端点经拓扑变换后不能成为同一象点．同理，在(c)中，圆盘与圆环不是同胚的．

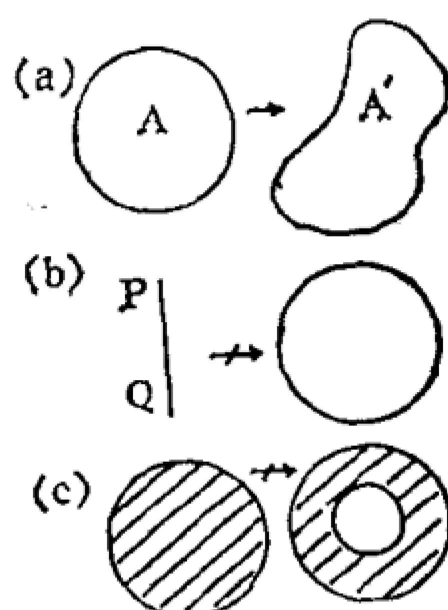


图15—49

§4．图　论

所谓图(graph)，其定义如下：

【定义】 一个图G是由p个点(也叫顶点)的有限非空集合V与V内相异点构成的g个无序对的一个集合X所构成的二元组(V,X)．

在图$G=(V,X)$中，若$u,v\in V$，无序对$x=(u,v)\in X$，则$x=(u,v)$叫做图G的一条线或边，而x叫做u与v的连接线，记作$x=uv$．把u与v叫做**邻点**，记作$u\ \ adj\ \ v$，并称u,v是x的端点．把点u与线x叫做**是关联的**，v与x也是关联的．如果两个相异的线x与y具有一个公共端点，则叫它们为邻线．

具有p个点和g条线的图，叫做(p,g)图，记为$G(p,g)$．把$(1,0)$图叫做平凡图．

※ 前面曾俗称拓扑学为橡皮几何学，把平面几何图形看作是附在橡皮膜上，让橡皮膜作拉伸或压缩等连续的变形，使之既不破裂也不折叠，在这样的变换下，图形的某些属性（如图形上曲线的封闭性，两曲线的相交性，某点在图形的内部或边界上），保持不变．拓扑学就是研究图形在这种"橡皮变换(即拓扑变换)下的不变性的几何学——译注

图一般是可以画成一个图形的*，而且把这个图形叫做图.因此对上述定义可以作直观说明,比如在图 15-50 的图 $G(5,7)$中，点 u 与 v 是邻点，而 u 与 w 却不是.线 x 与 y 是邻线，而 x 与 z 却不是.图中两条线 x 与 z 是交叉的.交叉点不是图的点等等.

关于图的几何学叫**图论**.

上面已给出图的定义及与图有关的常用术语，在涉及到顶点和边的这种关联关系的数学问题中，若能采取适当方法把该问题用图作为数学模型表示出来，则可根据图论知识来处理该问题使之得以解决.

下面，简要介绍一下促进图论产生的各有关问题和研究图论的一般方法.

欧拉曾建立了凸多面体的顶点，棱和面的数目之间的等式关系，如下列定理所述.

【定理】1. 设凸多面体的顶点数为 n，棱数为 e，面数为 f，则下列等式成立，

$$n+f=e+2.$$

人们称这个著名的公式为欧拉公式. 这一公式表明，凸多面体，无论经受多少次的连续变形(即前面所说的橡皮变形)，都具有的一个拓扑性质.须知，它与凸多面体、多边形、圆和球的度量性质是完全不同的.

本定理的证明见后面**【定理】**2.

现在我们把凸多面体看成是一种自由伸缩的不破裂不重叠的如橡皮薄膜一样张成的东西. 这时把它的任意一面 F 向这个多面体的外侧任意伸展.若把面 F 的边界所成的多边形以外的(无穷)区域记作 F_∞，则以 F_∞ 作为一个面的凸多面体仍然可以作为上述的图来考虑(图15-51)，无论其

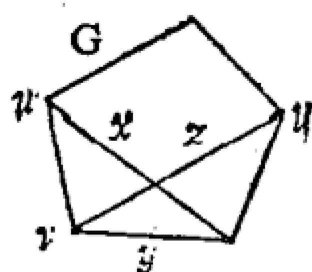


图 15-50

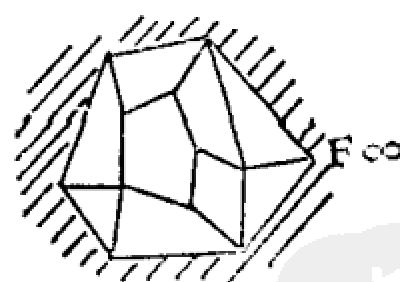


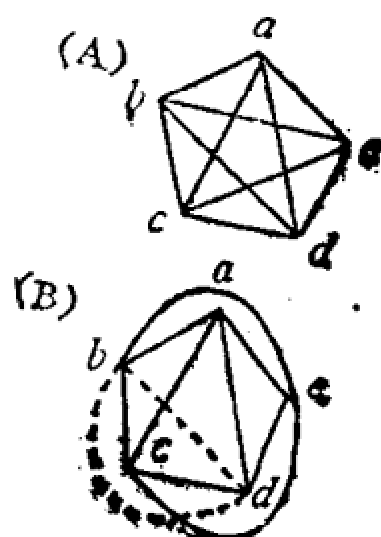
图 15-51

※　如果把图的顶点用平面上的几何点表示,把图的线用直线段或曲线段表示,那么这个图就直观地表现为平面上的一个(几何)图形,它有助于表示图的顶点和边之间的相互关系的实质，由于顶点位置及线的长短曲直的任意性，一个图可以用外表上很不相同的(几何)图形表示——译注

形状怎样，欧拉公式都是成立的.

应该指出，前面所定义的图与这里多面体的图形是有所不同的. 对于一般的图，其几何图形内的边也可以换一种办法在图形外画出来，亦即是该图形内的交叉点，也可以不在图形内出现.

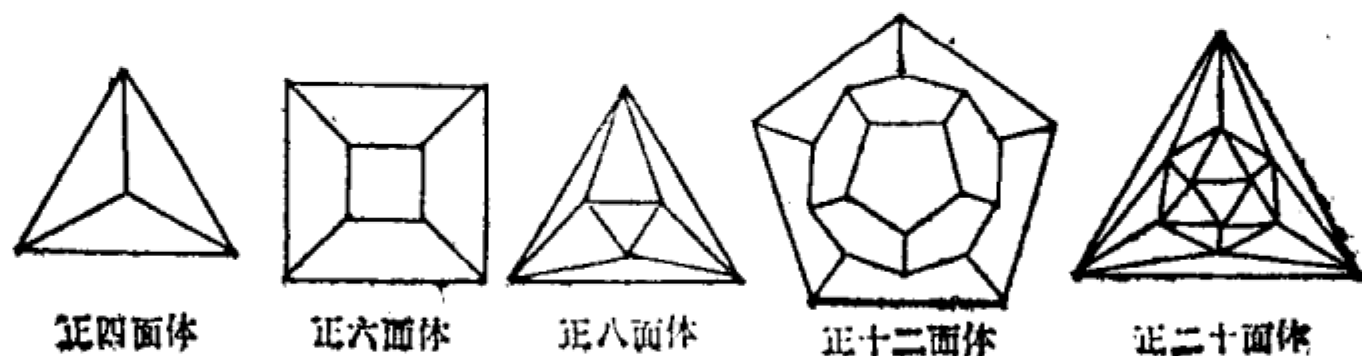
为此，举一个简单例子，如图 15-52A(该图叫做完全五边形)，它的交叉点，都在图形内部. 若要回避此情形，可以换用图(B). 比如，直线 bd 用弧线连接，对于线 be, ce 也同样处理. 这样一来，就可以使图形内没有交叉点出现.



对于某些多面体，用上述办法作出的图，甚至可以作到使其任意两条线都不互相交叉.

任意两条线都不交叉的图叫做是**平面的**否则叫做是**非平面的**. 当图是平面的，则叫做平面图.

图 15-53 所示的五种图是用前面的方法从五种正多面体得到的图.



其次，考虑一般的图.

一个图 G 的子图 H 是这样的图，它的顶点是 G 的顶点集的子集的点，它的线是 G 的线集合的子集的线. 图 H 是图 G 的子图可表示为 $H \subseteq G$.

连接一个图的两顶点 v_1, v_n(其连线仍属于该图)，可得到它的一个子图 $p_n = p(v_1, v_n)$. 如图 15-54，当连接 v_1, v_n 的线可重复通过某些顶点时，p_n 叫做连接 v_1, v_n 的道；当连接 v_1, v_n 的线通过的顶点全是相异点时，p_n 叫做弧. 当这弧闭合时，即当 $v_1 \equiv v_n$ 时，p_n 叫做环或闭路.

若对于图的任意两顶点，都存在着连接这两点的弧，则这个图叫做连通的.

图的连通性是图论最重要的概念之一.

图一般可表成几个连通子图的和. (在图15-55 中，G 是 G_1, G_2, G_3 的

和，G_i 都是连通的）.

图的极大连通子图（即这个子图的任何真子图不再是连通的）叫做**连通分支**或简单地叫做**分支**.

对于平面图的某个闭路，如果不再存在分割这个闭路的弧（即内部分割线），就把此闭路的内部（连同边界）叫做面.

于是，对于欧拉的凸多面体公式，根据上面的考虑，还可推广如下：

【定理】2. 设一个平面图的面、线、顶点和连通分支的个数分别为 f、e、n、c，则如下等式成立

$$f-e+n-c=1. \qquad (※)$$

证明　若"图"有 n 个顶点，则可用逐次加线的方法作"图"，同时，对线的个数 e 用数学归纳法来证明.

当 $e=0$，时 $f=1, c=n$.

显然，(＊)式成立.如图 15-56(a)，设添加到 k 条线时(＊)也成立.则再添加一条线后就有下面的两种情形需要讨论.

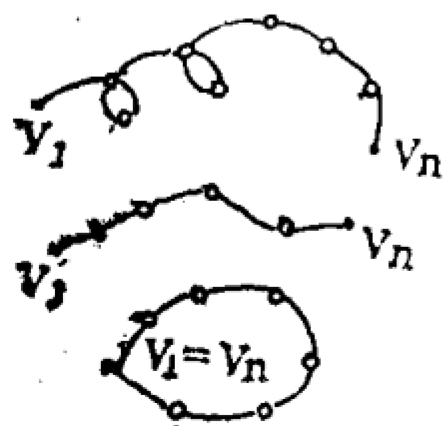


图 15-54

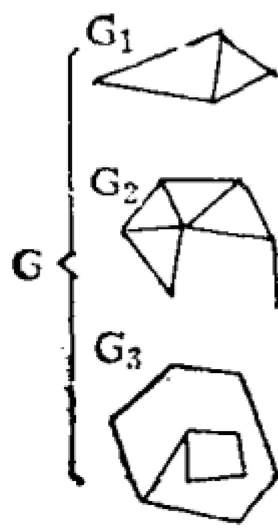


图15-55

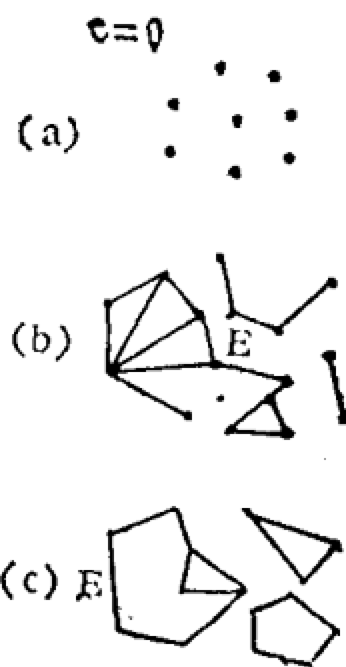


图 15-56

如图 15-56(b)，当添加的线 E 是两个不相连结的连通分支的连接部分时，e 增加1，c 减少1，f 不变，所以这时(＊)成立.

又如图 15-56(c)，当加上去的边 E 是连接一条弧的两个端点时，E将多分出一个面来.所以 e, s都要增加 1，而 c 不变，于是(＊)式仍成立.

所以，根据数学归纳法，对加上的边的各种情形及任意的边数e，(＊)

式都成立. □

作为【定理】2 的特例,当图是连通图时($c=1$ 时),由(*)式,有 $n+f=e+2$, 即得到了【定理】1.

下面, 我们来考察早在 1736 年已为欧拉解决的著名而古老的图论问题:"哥尼斯堡七桥问题"(Königsberg bridge problem)

图 15-57 是哥尼斯堡(现为加里宁格勒)的一部分, A、D 是布勒格尔河上两个岛, A、B、C、D 间有七座桥连接.

该问题是:"由 A、B、C、D 任何一地出发是否能通过且仅仅通过每一座桥一次后, 再回到原地呢?"

可以利用图 15-57, 对该问题进行实验, 但答案是否定的. 要是按照问题的要求去走, 是不可能走成功的. 看起来这个问题是一个数学游戏, 然而实际上, 它产生于物理学.

欧拉在研究这个问题的时候, 把图 15-57 的问题抽象为图 15-58 的形式. 事实上, 这个问题中的 A, B, C, D 四个地区要画多大, 是无关紧要的, 重要的是联接这四个地区的各桥的位置, 而河流等都不必考虑了. 若四个地区用四个点表示, 它们之间的桥用七条连线表示, 则七桥问题就大大简化为研究图 15-58 的问题了.

这里, 要注意几件事. 根据本节开头所述图的有关定义, 线是用两顶点 u, v 的无序对 (u, v) 来表示的, 即把 (u, v) 和 (v, u) 看作是相同的. 但在图 15-58 的图中, 在点 A、C 与在点 A、B 之间分别有两条线, 这一情形在图的定义中是没有的. 所以, 应该说具有图 15-58 形式的图是还未定义的. 我们把在两点间有两条或两条以上的线(多重线)的图叫做多重图. 因此, 图 15-58 是一个多重图. 又, 把由一点 a 出发不经过其他点又回到点 a 的线叫做在点 a 的一个**自环**(或轮), 把有自环的图叫做伪图, 例如图 15-59 即是一个伪图.

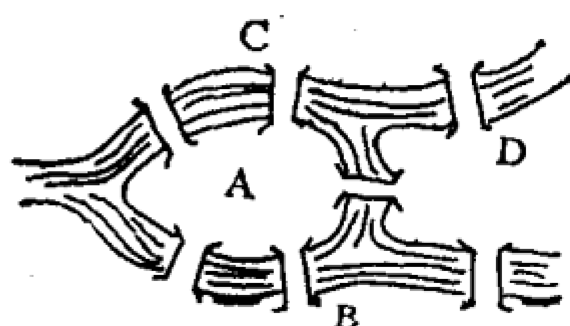


图15-57

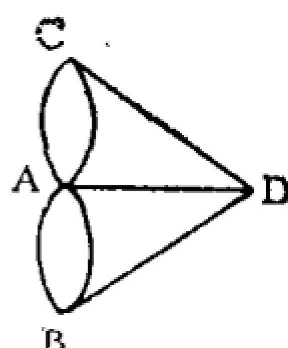


图 15-58

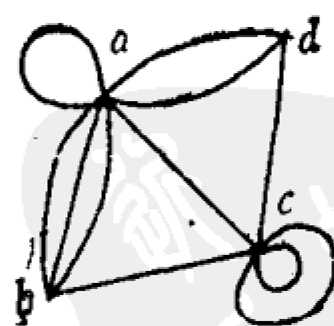


图 15-59

但在这里, 为简便计, 把多重图就叫作图, 这是不至于产生混淆的.

如上所述，欧拉曾把哥尼斯堡七桥问题抽象为图论问题．这里的图也可以是多重图，或是伪图．我们把由图上任意点出发，经过一条线一次且只经过一次又回到原出发点的闭道叫做**欧拉道**，把具有欧拉道的图叫做**欧拉图**，这个图就是所谓**一笔画出的图**．欧拉建立了欧拉道存在的充分必要条件，这就是下述的．

【定理】3．图 G 是欧拉图，当且仅当

1．G 是连通的，

2．G 的所有点的阶数都是偶数．

(图的点 V 的阶数是指以 V 为端点的所有邻接线的数目，把它记为 $\rho(V)$．

证明　(必要性)．条件 1 的必要性是显然的．现证条件 2 的必要性．在欧拉图上任取一点 V．则一个道沿某条线进入这个点后必定还要(经另一条线)离开这个点．因此此点的邻接线必是偶数条．即该点的阶数是偶数，故条件 2是欧拉图的必要条件．

(充分性)．反之，当图 G 满足条件 1、2 时，可以证明，G 有欧拉道．即是说，G 是从任意顶点 a 开始可以一笔画出的图．

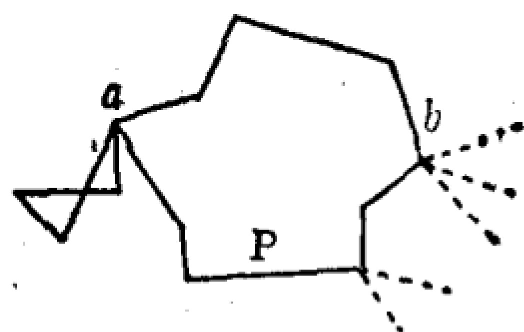


图 15-60

今由顶点 a 出发，限制在 G 上始终沿新的线前进．由于通向各顶点的线数是偶数，用上述方法作出的道 P，它不可能终止于 a 之外的点，而必须最终回到 a 来．

又若由 a 出发而最终回到 a 的道 P 不经过 G 的全部线，则在 G 中去掉道 P 的线，并把剩下的图记为 $\overline{P}$．由子图 $\overline{P}$ 的作图方法可见，它的顶点是偶数阶的，而根据假定，G 的顶点也是偶数阶的，故 $\overline{P}=G-P$ 的顶点也是偶数阶的，并且因 G 是连通的(条件 1)，P 与 $\overline{P}$ 至少有一个公共顶点 b．设 $\overline{P}$ 的线由 b 出发，这时，可由 b 在 $\overline{P}$ 中作出新的道 P'．因 P' 和 P 都要经过 b(即由 b 出去，又回到 b)，故 P 和 P' 可以组合成一个由 a 出发又回到 a 的闭路 P_1，它全属于 G，但它的线比 P 的线多，且有 $P_1=P(a,b)+P'+P(b,a)$，若 P_1 包含了 G 的全部线，则充分性已得证．若 P_1 仍未包含 G 的全部线，则设 $\overline{\overline{P}}=G-P_1$ 在 $\overline{\overline{P}}$ 中再重复用上面的方法，经有限次后，即可作出包含 G 的全部线的道来．(这是因为图 G 只能有有限个点和线)，这时所得到的道是欧拉道(图15-60)．　□

根据**【定理】**3，直接可得，哥尼斯堡七桥问题的解是否定的(因为 A，B，C，D 的阶数全是奇数!)并且，以此定理为依据，可以讨论问题，如何

找到最少数目的道，这些道之间无公共的线，但所有这些道合在一起，就正好经过图的各条线各一次，为此，先叙述下面的定理4、定理5.

【定理】4，一个图G的各点的总阶数等于G的总线数q的两倍，即是说，设$G(p,q)$的p个点为$v_1,\cdots,v_p$，v_i的阶数为$\rho(v_i)$，则

$$\sum_{i=p^1}^{m}\rho(v_i)=2q.$$

证明　因为G的各条线都有两个端点，且都属于G，故不难推算出上式. □

【定理】5．对任意的图，具有奇数阶的所有点的个数是偶数(包括数零).

证明　若把奇数阶点v_j的阶数表示为$\rho^{(1)}(v_j)$，偶数阶点v_k的阶数表示为$\rho^{(2)}(v_k)$，则显然有

$$\sum_{i=1}^{p}\rho(v_i)=\sum\rho^{(1)}(v_j)+\sum\rho^{(2)}(v_k)$$

暂且设所有$\rho^{(1)}(v_j)$的个数是奇数则$\sum\rho^{(1)}(v_j)$也是奇数，而$\sum\rho^{(2)}(v_k)$总是偶数．于是，其和$\sum_{i=1}^{p}\rho(v_i)$是奇数，这与【定理】4的公式

$$\sum_{i=1}^{p}\rho(v_i)=2q(\text{偶数})$$

相矛盾．所以$\rho^{(1)}(v_j)$的个数必为偶数. □

【定理】6．若G不是欧拉图，从而(由【定理】3)可设G有K个奇数阶的点．这时，走遍G的全部线的道的最小个数为$\frac{1}{2}K$.

证明　据【定理】5，G的奇数阶的点的个数K是偶数．因为对于走遍G的全部线的道来说，每一个不闭的道P_i的两个端点必是奇数阶的点，故道P_i的个数至少是$\frac{1}{2}K$个.

另一方面，确有$\frac{1}{2}K$个道走遍G的全部线各一次．为此，只要作出这$\frac{1}{2}K$个道即可．　首先，在G的$\frac{1}{2}K$对奇数阶的点对之间分别连$\frac{1}{2}K$条线E'，把它们加到G中之后，得到G的一个扩展，记为G'．这时G'是一个欧拉图，因此它有欧拉道P'，再由P'中去掉E'得到的这个图就被分解成走遍G的$\frac{1}{2}K$个子图(这便作出了走遍G的全部线的$\frac{1}{2}K$个道). □

哈密顿回路

上面已谈到，所谓欧拉道，是从图的任意一点出发，经过图的**每一条线一次且仅一次**又回到该点的闭道．至于图中的点，有多个道数次通过它都是可以的．

与此相呼应，可以考虑由图上任一点出发通过图的**每一个点**一次且仅一次的路径．比如，在图15-61中就有这样的路径．它经过图的每个点一次且仅一次，经过各线最多一次(而不要求经过图的每一条线)，且构成一个回路．当一个图G具有这样的回路时，叫做**哈密顿图**．这个回路叫做**哈密顿回路**．

在已经有了图论的系统论理的今天看来，从欧拉道到哈密顿回路似乎是一种简单的类推．然而要知道，在200年前，当欧拉解决哥尼斯堡七桥问题时，图论还未建立呢．甚至连欧拉这篇论文本身也遭到了长期的埋没．至于哈密顿回路，虽然是著名数学家哈密顿得出的，但它的发表也颇有一番奇妙的周折．

在1859年，都柏林大学教授哈密顿设计了一个模型，示意世界上主要茶叶市场销售情况，该模型是个木制正十二面体(图15-62)，在它的二十个顶点处分别标志着世界上主要城市的名称．(伦敦、纽约、莫斯科、巴黎、北京、柏林、布达佩斯、布拉格、罗马、东京、圣弗兰西斯科、墨尔本、阿姆斯特丹、爱丁堡、都柏林、里约热内卢、新德里、华沙、耶路撒冷、洛彼不斯库、)他提出如下的问题："由任何一个城市出发去访问每个城市一次且仅一次，然后回到该市．试作出绕行这二十个城市一周的路径来!"，现在，由于问题已解决，倒觉得它是很容易的事了．事实上，该问题可以这样简单地解决：只要在所说多面体的各顶点处各钉上一颗图钉，再往下进行时，用一根线，每经过一个城市，就在图钉上绕一下，如此作下去，就可以找出答案来了．

然而，对正十二面体的这个通道的考察是件麻烦事，不过，如果读者已经领会到了上述思想，再根据图15-63中画出的正十二面体的图来研究，就不会是困难的．实际上，哈密顿也是根据图的知识解开这个迷的，他的

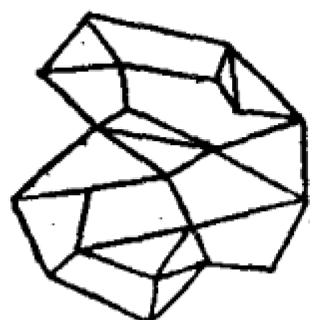


图 15-61

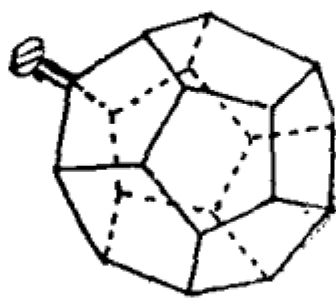


图 15-62

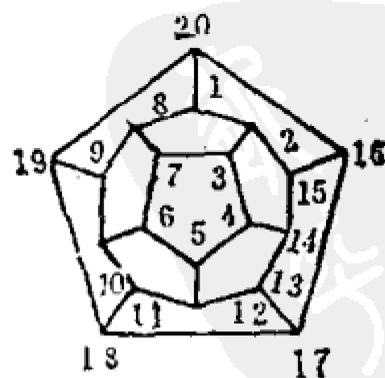


图15-63

一个解答已在图 15-63 上表示出来(按 1,2,3,…, 20 的顺序前进).

看起来，欧拉道和哈密顿回路是差不多的．然而，如果比较一下它们在解法上的难易，就知道，它们有相当大的差别，在欧拉道是否存在的问题上，考察所有点的阶数是否都为偶数是十分重要的．对于哈密顿回路，却还没有一般的判定方法．如果说图论的问题只是一个解法问题，那么哈密顿回路的存在与否都涉及到更多的知识，一个好的判别方法至今还没有得到，故它是在我们本节存在的一个悬案.

§5. 四色问题

图论的发展，在应用上已引起强烈的反响，有名的**四色问题**可以说明这一点.这是本节(最后一节)将要谈到的问题.

关于四色问题的命题是："对于地球仪上或纸面上的地图，为了以着色的方式把各国或各地区分别开来，必须而且只须用四种颜色."这问题是明白的；即使给一个不懂数学的人叙述这个问题，无疑地，他还是会了解该问题的意思的．其所以看起来简单明白，只是因为在这里没有用数学的表达方式作详细的陈述罢了，我们约定，在地图中，除了国家以外，把海、大湖等都要当作国家看待；并且,在一个国家有几个完全与分离的部分时，也要把其各部分当作一个国家来处理.

我们说各国是"可以区分的"，是指相邻国家必须具有**不同的颜色**，而不相邻国家的颜色无论相同或相异都行，所谓相邻的国家是指它们的国境以一条**边境线**而互相连接，国与国之间只有点作边境的情形视为不相邻.

地球仪(即球面)上的地图与纸面(即平面)上的地图在本质上是相同的.这只要回顾一下在上一节用展开在平面上的方法作多面体的图的情形，就容易理解了.

图 15-64 是用四种颜色 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 对一个地图的各国着色的一个例子.(注意，此地图的外部 F_∞ 也作为一个国家来考虑).

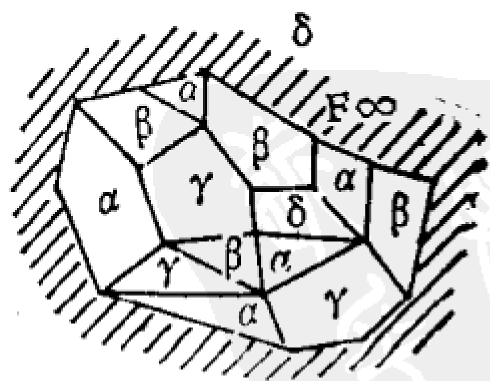


图 15-64

若利用欧拉解决七桥问题的思想来考虑四色问题，则我们看到，各国的大小和形状对问题的解决是无关紧要的；重要的只是两国相邻还是不相邻，因此，我们把各国用点来表示，把相邻的两国

用两点的连线来表示.这样，我们已定义了一个图.

一般说来，对于一个平面图总可用上述办法作出一个新的图，这只要把这平面图的各面换成点，然后用新的线连接这些点即可.这时可见，原来平面图的点成了新图的面，原来的线成了新的线.这样的两个图(原图与新图)叫做互为对偶的图.

图 15-65 中用实线画出的图是 15-50 中用虚线画出的图 的 对 偶 图.

今用以上方法处理四色问题.把以面表示国的图换成以点表示国的图进行研究，鉴于在前一情形是对面着色，而在后一情形是对点着色，故为了区别起见，这二者分别叫做**面着色和点着色**.

现在开始考虑四色问题命题的证明，首先证明其必要性，即要用不用颜色区分地图，必须四种颜色.

假设有两国邻接，则它们的着色应该不同.而且，与一国邻接的国越多，则所用的颜色也越多，这是显然的，例如，有 n 个国家，其中任何两个国家都互相邻接，即是说，这 n 个国家中任何一国必都与其余 $n-1$ 国邻接，因对 n 几个国都有这样的情形，故 n 种颜色是必要的，用此想法来考察我们的地图(平面图)，凭经验容易知道，四色是必要的了.比如，在图 15-66 $[I]_{(1)}$，$_{(1)'}$或$[II]_{(2)}$，$_{(2)'}$ 中，就是四国中每两国都邻接，显然，对这里的每一种情形，四色是必要的.

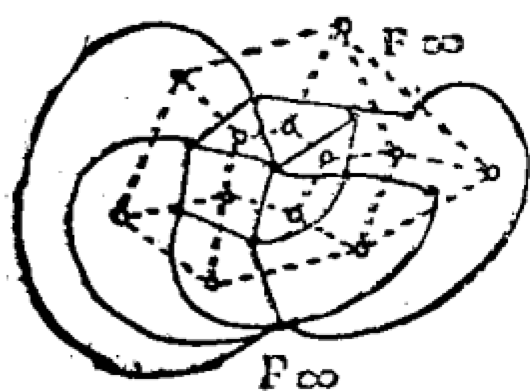


图15-65

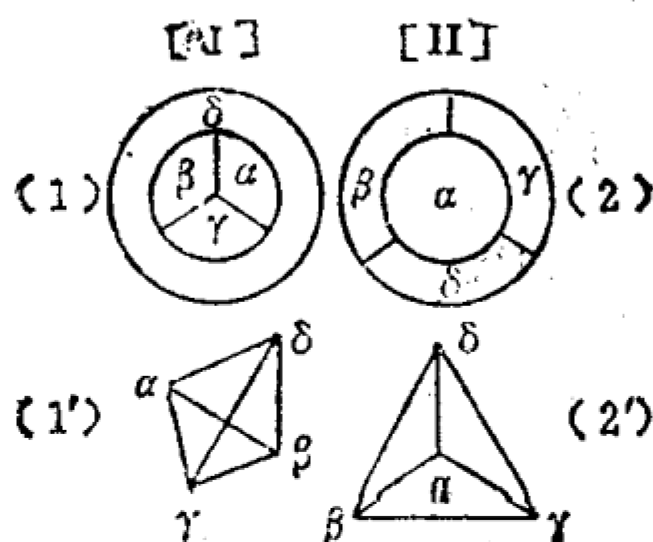


图 15-66

因此，四色问题命题的必要性，就这样简单地证明了.

(图15-66 的(1)和(2)在本质上是完全一样的图，图(1)'和(2)'也如此.例如，(1)的点 α 在$\triangle\beta\gamma\delta$之外，然而点 α 与 β,γ,δ 一样，不必限定在平面上的什么位置，于是当 α 在$\triangle\beta\gamma\delta$ 内时，这就构成了(2)'，也就是说，可以认为(1)'与(2)'是相同的图.这时，(1)'与(2)'叫做是**同构的**.

一般地，两个图 G 和 H，当其有同样多的点，而且它们的点集之间存在着保持邻接性的一一对应关系时，叫做是同构的．记为 $G\cong H$ 或者 $G=H$）．

四色问题困难之处主要表现在它的**充分性的证明**上．

下面先就这个问题的**历史**及**由来**作一介绍(关于历史部分的材料摘自 Ore 著的"四色问题")．

关于四色问题的出处有各种各样的说法，有的以误传误，众说纷云，大可怀疑．比如，关于这个出处，欧拉有一种说法，德国数学家麦比乌斯又有一种说法．此外，还有人说，四色问题是中世纪末或文艺复兴时期地图制作者们发现的，如此等等．然而，以上各说，其事实根据都是欠充分的．

实际上，叙述四色问题最初出处的是伦敦大学教授·德摩根(1806—1871)和他的友人都柏林大学教授哈密顿的通信书简．其上注明的日期是 1852 年 10 月 23 日．摩根在该书简中有这样一段话："我的一个研究生最近想证明一个问题，这个问题是我不知道的，当然更说不上解决它了．他说，有一个任意分割的平面图形，需在其各分块区域上着色，使之具有公共边界线的区域着上不同的颜色．他认为四种颜色是必要的，而多于四种的颜色就不必要了．试请尊兄考虑一下，对于五种或五种以上的颜色，其必要性是否存在？……"

凭籍以上证据，我们所说的四色问题的出处显然是确定无疑的了．

四色问题自提出以来到现在已经有一个多世纪生．

此后，在 1878 年，凯莱(1821—1895)在伦敦数学协会的大会上讲述过这个问题，他的讲义没有出版．第二年，他又在皇家地理学会会报第一卷上论述了这个问题，稍后一点，一个叫克蒙普(Kempe)的公开发表了他的"证明"，之后，一个叫赫乌德(Heawood)的人指出这个证明是不完全的，同时他又提出了一个结论："五色是充分的"，并且证明了这个所谓**五色定理**(1890 年，其证明在本章末叙述)．

关于四色问题，前面说过，最初是德·摩根听到研究生说的，而实际上他又是根据物理学家弗勒德里夫·格斯利在 1852 年的一篇文章而明确提出的．至于格斯利，又是其兄弗朗夕兹·格斯利教给他的．

弗朗夕兹·格斯利活到 1889 年，可是他提出的问题，终生都没有发表过．不过，四色问题有时也有人叫做**格斯利问题的**．

对四色问题进一步的探讨

四色问题，详细说，就是"球面上或平面上的地图中各国以四种颜色来区分就够了"这一猜想是否正确？其判定方法如何？现在也进展到什么

程度了呢？我们说，问题是明确的，但答案还是未知的．这里，为了证明四色问题，先来介绍一下目前最有声望的一个思想方法，即所谓哈德维格(Hadwiger)猜想．

地图似乎有个特点，要画出它的各式各样的位置分布状态，看起来颇为容易．但是，即使要画出一个五国的地图，使其中每两个国家都具有互相邻接的位置关系，也是不可能的．

下面将叙述并证明这一结论．

【定理】7． 球面或平面上的两两邻接的五国地图是不存在的．

证明 暂且假设满足所说条件的地图是存在的，即是说，五个国家中每两个都有一条国境线相邻接．这时，没有必要利用整个球面，也不必在五国．N_1, N_2, N_3, N_4, N_5之间作复杂的连结；只须在各N_i内部取一点P_i(P_i不属于N_i的国境线)，使得把这样取得的五个点P_1, P_2, P_3, P_4, P_5作为顶点时任意二顶点$P_iP_k(i\neq k)$作为球面上的点，可以连接成一条线，且这样的线只能落在国N_i和N_k的内部．

按这样的作法，可连$C_5^2=10$条线，其中通到同一国的线是互不相交的，这是因为在一个国家内的点与它(同其他国家的)国界上的点连成的直线是是互不相交的．

所以，我们在球面上把五个顶点中任意两个连接起来就得到有10条线的图G_5，它的线按上述理由是互相不交叉的．

现在，不管原来给予的地图，而只考察图G_5对球面所产生的一种分割地图ξ．由于G_5是连通的，故对图ξ成立的结论对原来考虑的国也是成立的，设这些国家的数为α_2．由【定理】1的欧拉公式，有

$$5+\alpha_2=10+2, \quad 故 \quad \alpha_2=7,$$

又由于G_5没有"二边点"(即仅仅对应于两边的顶点)，ξ的各国至少有三个边，而各边对应着两个国家，所以边数的二倍至少为

$$3\times\alpha_2=3\times7=21.$$

于是导致矛盾：

$$10\times2\geqslant3\times7.$$

以上所述说明了两两邻接的五图地图是不存在的．【定理】7得证 □

(此证明取自 *G·Ringel* 的书"曲面与图的着色问题")

由于对球面上的地图的研究可以作为平面上的地图看待，故以后

仅限于考虑平面上的地图．为了使地图的各国构成两两邻接的关系，适当去掉某些边界线，就可以使邻接关系变得更密，即是使每一国有更多的邻接国．根据上面的【定理】7，这样作出的新地图，即使是在邻接最密的情形，也只能作到在某四国之中任意两国互相邻接．

以上，我们仅仅对地图而言，而使用取地图的对偶图(图 15-65) 的方法研究问题，在很多情形是方便的．先把国取作点，在表示相邻国的点之间用线连结起来，即是说，两国的接关系，用这两点之间的连线表示．在原地图中去掉两国间的边界线就相当于将它的对偶图的对应边 $E=(u,v)$ 的两端 u,v 重合成一点 $u=v$，这样的作图叫做**边E的缩小**．

用地图的对偶图及缩小的方法可以说明这样的事实："对于平面图，将其边依次缩小时，其结果可以决定一个具有完全五边形(图 15-52(A)) 的图，也可能产生完全四边形(图15-66)的图"．

不仅平面图如此；一般地，还可考虑非平面图的情形．推广上面的方法，可知"在图 G 中，用缩小的方式可以得到各种各样的包括完全多边形的图．另外，由于 G 的顶点数是有限的，所以在这些完全多边形中，有最大的顶点数 l 存在，把这个 l 记为 $\sigma(G)$．"

然后，把任意图 G 的顶点着色，且把这里可能用上的颜色种数的最小数字 k 作为 G 的颜色数，叫做 G 的**着色数**，写作 $K(G)=k$．

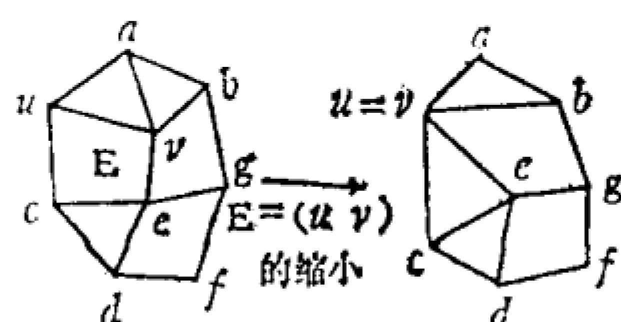


图 15-67

于是哈德维格猜想可简单地写成．

$K(G)\leqslant\delta(G)$ 或 $K(G)=k\Rightarrow\delta(G)\geq k$．

即是说，"图G用最少的K种颜色着色时缩小 G 所能得到的最大完全多边形的顶点数不小于k．"

这个猜想在 $k=5$ 时与四色问题是等价的．这是瓦格纳(*Wagner*)于1960年得到的结果．至于对任意的 k，哈德维格的猜想是否正确，尚不明白，而只在特殊的情形($k=5$)，四色猜想才被解决了．

下面的各定理是直到现在(大约 1970 年)为止所得到的少数几个主要结果．

【定理】8．顶点数少于四的图是不能分离*的平面图．采用哈密顿回路，对于这样的图，用四种颜色就可以作出各种不同颜色的图了．(*Tutte*, 1956)．

※ 关于图的分离概念，这里不作说明，它主要只用在【定理】8中，其含义是可以领会的．

定理】9. 对于每个国家至多有六条边境线的平面地图，用四种颜色来区别是可能的(*Groots* 和 *Aarts*, 1962)。

此外，若地图上的国家**少于**36个，那么这地图用四种颜色可以区分。这一事实早已证明了(Winn, 1938)。最近(1969)，阿勒(Ore)和斯登普尔(Stemple)证明，当国家的个数**小于**40时，用四种颜色作区分是可能的。

五色定理　要用着色区分平面上的地图，五种颜色就够了。

下面用对地图取对偶图的方法证明这个定理，为此，先把定理的叙述方式改变如下：

为给平面图的顶点着色，使得每条边的两端具有不同的颜色(下面，仍把这叫做"区分")，五种颜色就够了。

证明　考虑平面图 G 的一个面至少有五条边的情形，即考虑它的每个面都是 n 边形($n>4$)的情形，把边界上不相邻的两点可以看作一个点，这叫做两点的合并，如图 15-68，图 G 上两点 g, c 可以合并为一点，把 g，c 合并后，图 G 变成了一个新图。显然，它仍是平面图，即是说，合并后，平面图的性质不变。如此对平面图依次进行合并，直到没有可合并的点对为止。例如，图 15-68 中的图 G 就是经过一系列的合并过程而最后变成图 G_1 的。G_1 也是一个平面图，它具有各面都是**三角形**这一特点(易知，它是由边数大于四的多边形经过一系列合并手续而成的。

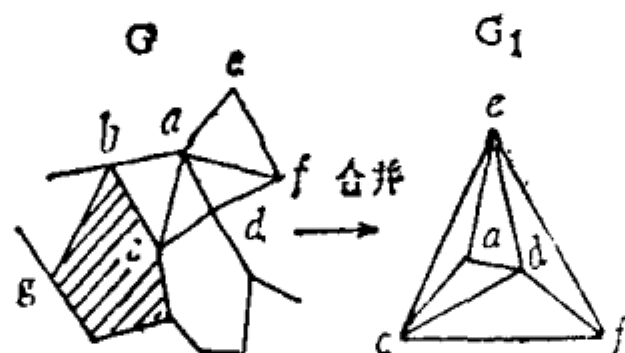


图 15-68

每个面都是三角形的平面图叫做极大(平面)图。

与点的合并完全相反的过程称为点的**分割**。例如，把极大平面图 G_1(图15-68)相反地进行一系列的分割，最后又可以回到图 G。

现在来考察顶点的颜色和连接问题。设刚才的图 G_1 的顶点需用 k 种颜色"区分"开。对 G_1 的点施行分割并将分割出来的两点着上原来这点的颜色，同时所有其他点颜色保持不变，显然，分割后得到的图仍然是由 k 种颜色"区分"的。因此，依次分割下去，直至回到图 G 为止，则 G 也只要用 k 种颜色即可"区分"。于是，如果证明了极大平面图用五种颜色可"区分"，则任意平面图用五种颜色可"区分"也被证明了。为此，下面对极大平面图的顶点数 n 用归纳法来证明五色定理。在 $n\leqslant 5$ 时，定理显然是成立的。

假设对至多 n 个顶点的情形，全部极大平面图用五色可"区分"。记任意一顶点为 v，则它的阶数 $\rho(v)$(其定义参见【定理】3)满足

$\rho(v)\geq 3$,

记这五种颜色为 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$. 记顶点数为 $n+1$ 的任意极大平面图为 $G(n+1)$.

(i) 在 $G(n+1)$ 有使 $\rho(v)=3$ 的顶点 v 的情形.

如图 15-69, 从图 $G(n+1)$ 中去掉 v, 得到有 n 个顶点的极大平面图 $G_1(n)$. 故由归纳法假设, 对 $G_1(n)$ 用五色即可"区分".

注意 v 是三边的一个共公端点. 设这三边的另一端点分别有颜色 α,β,γ. 因而 v 的颜色是 δ 或 ε, 于是, 当把 v 恢复到原位时, 得到的 $G(n+1)$ 仍是可用五色"区分"的. 即, $G(n+1)$ 是否被五色区分, 不受阶数 3 的点 v 的影响.

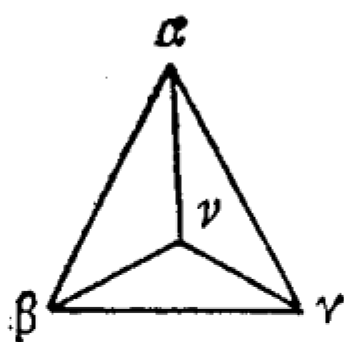


图 15-69

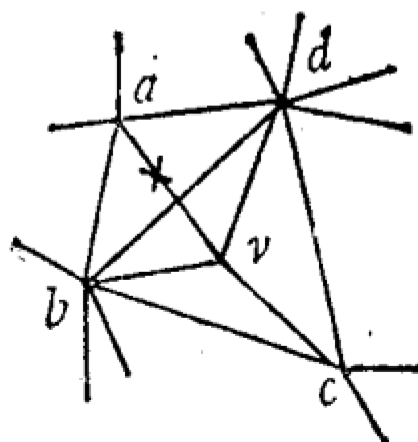


图 15-70

(ii) 在 $G(n+1)$ 有使 $\rho(v)=4$ 的点 v 的情形.

如图15-70, v是四条边的公共端点. 设这四边的另一端点分别为a,b,c,d. 在这四边中任意去掉一边, 例如说, 边(a,v), 而添上新的一边(b,d), 得到图 $G_2(n+1)$, 显然, 它是极大平面图, 因 v 的阶数为 3, 故根据刚才讨论过的(i), $G_2(n+1)$是可用五色"区分"的. 又因在 a,b,c,d 至多有四种相异的颜色, 故当把边(b,d)还原成(a,v)时, 取 v 为剩下的那种颜色, 则 $G(n+1)$就成为可以用五色"区分"的了.

(iii) 在 $G(n+1)$所有点的阶数 $\rho(v_i)\geq 5$的情形.

G 的阶数为 5 的点至少有 12 个(对此, 可证明如下: 设连通的平面图 G 的顶点、边、面的个数分别为 n,e,f, 则由【定理】1, 有

$$n+f=e+2. \qquad ①$$

又因 G 是极大图, 全部面都是三角形, 故 $3f=2e$, 由此式及①式消去 f, 得

$$3n=e+6. \qquad ②$$

现在, 设满足 $\rho(v_i)=5$ 的点的个数为 m, 满足 $\rho(v_i)\geq 6$ 的点的个数

为 $n-m$，则下列不等式成立

$$5m+6(n-m)\leqslant 2e，故 m\geq 6n-2e. \qquad ③$$

由②，③得 $m\geq 12$. 故阶数为 5 的点至少有 12 个.

取阶数为 5 的一个点为 v，设交汇于 v 点的五个边的另一端分别为 a，b，c，d，e（图 15-71）. 任取这五点中不相邻的两点，例如说，a、d，并把 d 合并到 a.

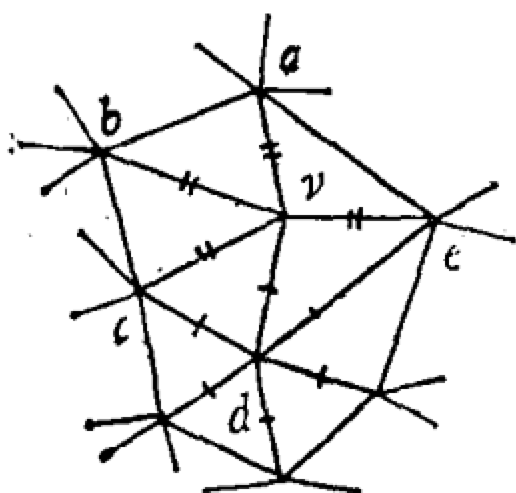


图 15-71

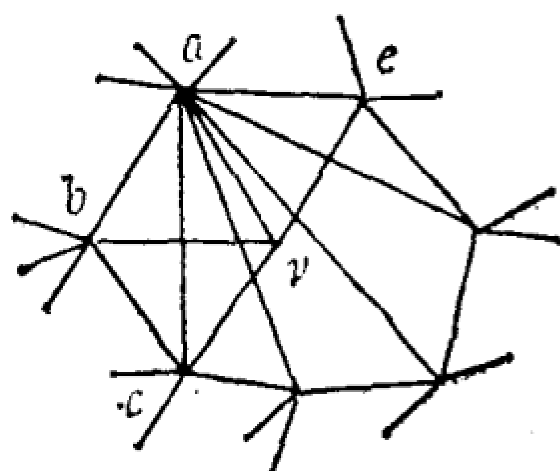


图 15-72

这时得到新图 $G_3(n)$（图 15-72）. $G_3(n)$ 是非平面的，全部顶点都满足 $\rho(v)\geq 4$，特别考虑 $\rho(v)=4$. 这时，去掉 v 点及交汇于 v 点的四边条，所得图 G 记为 $G_4(n-1)$. 于是 G_4 是极大平面图，它的全部顶点满足 $\rho(u)\geq 3$. 所以，按归纳法假设，$G_4(n-1)$ 是用五色可"区分"的.

再把 v 与交汇于 v 的四条边恢复原位，给 v 着以不同于 a，b，c，d 处的颜色且恢复 d 的位置. 若取 d 的颜色与 a 相同，则图形就恢复到了 $G(n+1)$，即得出：$G(n+1)$ 是用五色可"区分"的. 定理已全部证明. □

计算机证明的过程……年？……人？……

附　　录



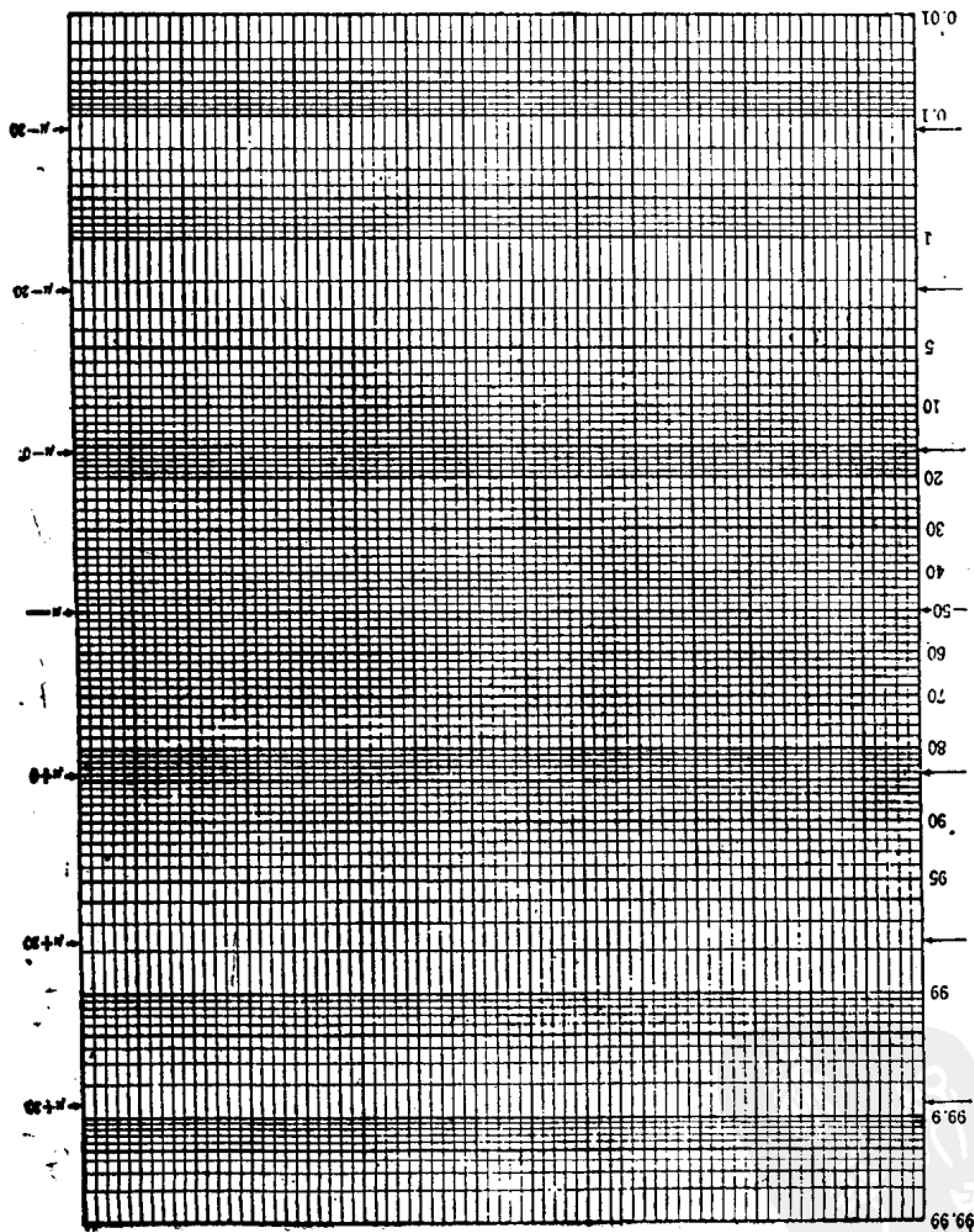
94 73 26 92 94	68 14 49 39 29	89 90 17 74 27	97 64 11 49 99	18 46 49 96 05
96 86 31 28 31	22 41 48 84 39	90 12 39 66 31	65 60 55 24 01	65 52 32 05 49
22 83 12 45 46	66 92 03 84 16	08 97 85 16 23	35 98 17 29 93	63 13 86 49 58
94 78 72 48 32	95 15 97 49 17	53 90 24 98 88	70 23 89 44 26	38 24 70 72 72
48 39 63 91 85	57 22 73 06 16	89 32 32 19 72	53 73 56 23 96	06 33 38 88 43
90 83 09 12 36	91 48 16 97 69	15 01 22 13 74	38 30 35 42 06	83 98 75 96 82
74 00 08 72 25	12 87 57 41 02	82 02 23 57 12	66 99 18 07 46	15 10 34 92 75
19 79 65 20 42	27 39 06 33 66	39 28 70 53 87	16 33 39 65 48	28 47 66 32 92
47 21 40 16 12	23 68 28 80 21	52 34 98 11 65	21 70 30 61 00	62 63 66 84 99
46 25 42 50 75	13 09 91 72 23	45 09 26 09 48	97 22 78 34 00	65 54 65 68 02
07 25 37 25 09	30 41 45 49 89	44 02 55 83 09	10 31 03 07 33	15 11 03 14 47
87 04 37 09 18	47 11 30 25 68	78 94 72 65 72	84 95 25 59 65	14 75 29 53 98
10 73 73 17 24	49 89 99 42 13	97 26 13 89 22	80 62 94 11 48	41 81 42 09 91
62 41 79 45 17	85 83 11 87 25	62 86 65 36 16	76 27 24 23 26	96 25 00 07 93
47 98 33 57 50	81 62 56 15 30	89 83 17 05 29	61 91 45 96 07	72 54 90 48 02
03 94 55 44 25	16 62 25 84 06	71 15 42 03 02	08 42 85 32 19	83 43 19 94 39
85 99 70 01 77	29 41 05 09 75	71 44 02 69 98	14 62 58 10 12	04 57 31 12 44
26 03 95 33 51	80 14 17 05 05	75 55 83 61 40	66 38 12 22 54	63 34 45 64 54
77 24 32 44 01	16 95 41 04 54	82 26 78 05 60	00 78 51 71 91	43 18 68 25 83
47 81 25 41 30	83 92 21 27 94	77 78 56 04 71	93 83 88 95 05	80 18 26 83 83
93 74 18 67 25	62 66 68 29 80	75 59 07 71 35	28 54 69 12 30	10 37 59 95 61
53 07 22 35 99	20 85 72 10 82	85 23 28 11 99	34 23 48 40 55	01 36 46 25 03
90 16 67 96 12	36 11 94 15 16	18 07 52 81 61	08 98 83 62 13	42 37 18 24 90
22 40 14 16 57	01 36 93 36 71	31 63 06 35 30	02 51 38 45 47	64 93 43 56 46
53 36 78 24 04	93 10 49 43 83	64 61 20 51 11	67 95 02 20 98	02 00 43 66 26
74 31 78 40 97	11 92 79 16 28	40 13 12 51 18	43 72 22 05 03	75 62 68 36 48
33 61 35 58 25	23 78 39 73 50	60 53 58 68 17	30 21 61 07 06	48 49 78 86 24
11 81 18 68 64	50 66 35 45 20	61 03 87 08 92	98 47 53 85 21	84 51 26 87 14
18 20 31 76 58	67 41 41 49 94	58 57 08 25 39	00 84 88 94 72	72 98 08 43 95
81 78 62 87 12	45 77 23 09 65	37 26 35 06 11	20 57 55 32 87	21 66 46 85 03
20 66 24 93 56	65 66 24 62 40	11 71 17 27 09	71 76 75 94 55	02 35 61 89 01
22 85 62 23 37	58 89 25 05 56	76 88 68 65 47	13 89 12 78 60	56 36 91 47 70
12 64 84 13 99	21 75 50 38 05	55 40 55 31 64	28 63 86 66 20	69 89 11 36 42
46 96 22 23 26	58 43 57 52 93	44 70 20 92 91	35 62 54 90 70	28 55 15 92 58
54 80 86 86 03	67 02 55 62 82	10 45 33 50 44	54 69 84 34 48	55 66 03 42 71
56 00 92 49 96	07 08 24 05 69	44 44 82 55 27	04 28 41 70 38	28 02 19 50 54
62 75 65 81 82	38 57 19 35 23	76 13 86 60 53	85 36 74 77 25	81 98 42 10 24
37 24 92 67 07	28 24 08 83 37	82 13 51 16 46	72 44 99 66 09	44 28 00 45 46
09 72 01 78 65	28 78 46 38 75	13 98 78 78 59	61 92 82 65 93	14 81 74 25 58
05 09 00 25 39	23 82 53 80 50	32 00 44 95 27	25 66 86 23 64	43 82 12 39 31

正态分布表 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31327
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34850	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	.37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.30490	.40658	.40824	.40988	.41149	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073	.42220	.42364	.42507	.42647	.42786	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47778	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899
2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.79224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.46560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49897	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2	.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3	.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4	.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5	.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6	.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	49988	.49988	.49999
3.7	.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8	.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49991	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9	.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997	.49995

n / α	.90	.80	.70	.60	.50	.40	.30	.20	.10	0.05	0.01
1	.158	.325	.510	.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	63.657
2	.142	.289	.445	.617	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	9.925
3	.137	.277	.424	.584	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	5.841
4	.134	.271	.414	.569	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	4.604
5	.132	.267	.408	.559	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	4.032
6	.131	.265	.404	.553	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.707
7	.130	.263	.402	.549	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	3.499
8	.130	.262	.399	.546	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	3.355
9	.129	.261	.398	.543	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	3.250
10	.129	.260	.397	.542	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	3.169
11	.129	.260	.396	.540	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	3.106
12	.128	.259	.395	.539	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	3.055
13	.128	.259	.394	.538	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	3.012
14	.128	.258	.393	.537	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.977
15	.128	.258	.393	.536	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.947
16	.128	.258	.392	.535	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.921
17	.128	.257	.392	.534	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.898
18	.127	.257	.392	.534	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.878
19	.127	.257	.391	.533	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.861
20	.127	.257	.391	.533	687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.845
21	.127	.257	.391	.532	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.831
22	.127	.256	.390	.532	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.819
23	.127	256	.390	.532	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.807
24	.127	.256	.390	.531	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.797
25	.127	256	390	.531	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.787
26	.127	.256	.390	.531	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.779
27	.127	.256	389	.531	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.771
28	.127	.256	.389	.530	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.763
29	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.756
30	.127	.256	.389	.530	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.750
40	.126	.255	.388	.529	.681	.851	1.050	1.303	16.84	2.021	2.704
∞	.126	.253	.385	.524	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.576

正 态 概 率 纸



［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学要项定理公式证明辞典
作者＝
页数＝１０８７
出版社＝
出版日期＝
ＳＳ号＝１１０３６４３３
ＤＸ号＝
ＵＲＬ＝ｈｔｔｐ：／／ｂｏｏｋ．ｓｚｄｎｅｔ．ｏｒｇ．ｃｎ／ｂｏｏｋＤｅｔａｉｌ．ｊｓｐ？ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝＆ｄ＝２０４０１８３５０Ｅ１５３ＡＢＢ９Ｂ７３ＦＥＢＣ８２Ｂ５６７１５